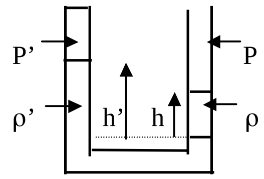
SERIE D'EXERCICES N° 23 : THERMODYNAMIQUE
ELEMENTS DE STATIQUE DES FLUIDES DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

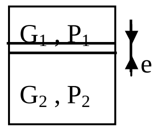
Le champ de pesanteur est supposé uniforme.

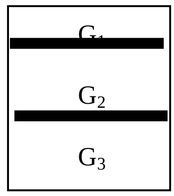
Loi fondamentale de la statique des fluides.

Exercice 1.
Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles, de masses volumiques ρ et ρ' . La branche fermée emprisonne un gaz à la pression P' , la pression du gaz au dessus de la surface libre est P .
Quelle relation lie P , P' , ρ , ρ' , h et h' ?

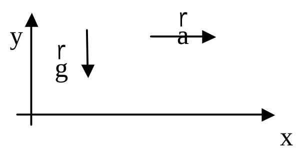


Exercice 2.
1. Une colonne cylindrique renferme deux gaz G_1 et G_2 , séparés par un index de mercure d'épaisseur e (en cm). Donner la condition d'équilibre liant P_1 et P_2 , pressions de G_1 et G_2 exprimées en Pa , puis h_1 et h_2 , pressions de G_1 et G_2 exprimées en cm de mercure.
2. Une enceinte renferme les gaz G_1 , G_2 et G_3 dans des volumes limités par deux pistons identiques de masse m et de section S .
Sachant que $P_3 = 5\ P_0$ avec $P_0 = m\ g\ /\ S$, déterminer P_1 et P_2 à l'équilibre.



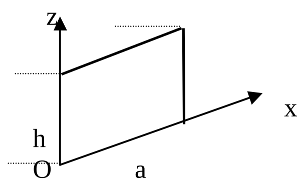


Exercice 3.
On considère un fluide placé dans un récipient, dans un wagon animé d'un mouvement rectiligne, horizontal et uniformément accéléré.
Quelle est la forme de la surface libre ?

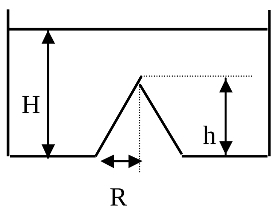


Calcul des forces de pression.

Exercice 4.
Donner la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la paroi verticale d'un récipient, rempli d'un liquide de masse volumique ρ et placé dans l'air. On appellera h la hauteur de la paroi et a sa largeur, on négligera la variation de la pression atmosphérique avec l'altitude. Déterminer la cote du point d'application de cette résultante.



Exercice 5.
Un récipient qui contient un liquide sur une hauteur H a un fond plat et horizontal percé d'une ouverture circulaire de rayon R . Cette ouverture est fermée par un cône de hauteur h .
Calculer la force qui s'exerce sur le cône (on négligera la variation de la pression atmosphérique avec l'altitude).



Atmosphère et aérostats.

Rappel :
On appelle densité d'un gaz par rapport à l'air le rapport :

$$d = \frac{\text{masse d'un certain volume de gaz}}{\text{masse du meme volume d'air}}$$

la mesure étant faite dans les mêmes conditions de température et de pression.

Exercice 6.
Un long tube vertical contient un gaz de densité d par rapport à l'air. A l'altitude prise pour origine $z = 0$, la pression est p_0 à l'intérieur du tube, P_0 dans l'air extérieur. Air et gaz sont à température uniforme.
1. Calculer la pression P de l'air et la pression p du gaz à l'altitude z (z positif vers le haut), la masse volumique de l'air étant ρ_0 à l'altitude $z = 0$.
2. A quelle altitude les deux pressions p et P sont-elles égales ?
On supposera les gaz parfaits.
A.N. : $P_0 = 1{,}00$ atm ; $p_0 = 1{,}02$ atm ; $\rho_0 = 1{,}20\ kg.m^{-3}$; $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$; $d = 0{,}700$.

Exercice 7.

1. Dans la troposphère, c'est à dire jusqu'à une altitude de l'ordre de 10 km , on peut admettre en première approximation que la température de l'air atmosphérique décroît avec l'altitude z suivant la loi : $T = T_0 - a\,z$ où le gradient de température $-a$ est constant. L'air atmosphérique est supposé en équilibre, montrer que la pression $P(z)$ est liée à la pression P_0 au sol $(z = 0)$ par une relation de la forme $P = P_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{q}{q-1}}$ où q est une constante que l'on déterminera.

En déduire que la masse volumique ρ de l'air varie en fonction de P suivant la loi $\rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{q}}$.

On supposera les gaz parfaits.

A.N. : $a = 6{,}5.10^{-3}$ K.m^{-1} , masse molaire de l'air $M = 29$ g.mol^{-1} : calculer q .

2. Un aérostat est constitué par une enveloppe gonflée partiellement ou totalement par un gaz moins dense que l'air (de densité $d < 1$ par rapport à celui-ci), soutenant une nacelle. Le gaz est continuellement en communication avec l'air atmosphérique extérieur par une ouverture, la manche, située à la base de l'enveloppe. On suppose le gaz en équilibre de pression et de température avec l'air ambiant. Les gaz sont supposés parfaits et en équilibre décrit par les relations $P(T)$ et $\rho(P)$ précédentes. On désigne par V le volume de l'enveloppe à un instant donné. La nacelle, l'enveloppe, les passagers, les accessoires y compris le lest ont un poids P_s . On supposera l'accélération de la pesanteur constante.

a) Au départ l'enveloppe est partiellement gonflée.
Calculer la force ascensionnelle F qui s'exerce sur le ballon en fonction de ρ_{gaz} , V , d et P_s .
Montrer que si P_s est constant, la force F reste constante tant que l'enveloppe n'est pas entièrement gonflée.

b) Lorsque l'enveloppe est entièrement gonflée, V atteint sa valeur maximale et le volume de l'enveloppe demeure constant. Le ballon continuant à s'élever, la gaz sort alors par la manche pour assurer l'équilibre avec l'air extérieur. Montrer que la force ascensionnelle décroît jusqu'à s'annuler : l'aérostat atteint un plafond d'altitude.

Théorème d'Archimède.

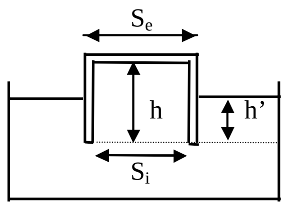
Exercice 8.

Une sphère en verre de rayon $R = 2{,}0$ cm plonge dans le mercure. Son point le plus bas est à $h = 1{,}1$ cm de la surface du liquide. Calculer la masse volumique ρ du verre. On donne celle du mercure $\rho_{Hg} = 13{,}6.10^{3}$ kg.m^{-3} . On négligera celle de l'air.

Exercice 9.

Soit un verre de forme cylindrique, de masse à vide m , de hauteur intérieure h , de section intérieure S_i et de section extérieure S_e . On remplit complètement ce verre avec de l'eau, puis on ferme la surface libre avec la main et on retourne ce verre sur une cuve à eau, en l'enfonçant suivant une hauteur h' .

Quelle est la force appliquée par l'opérateur sur le verre pour le maintenir en équilibre ?

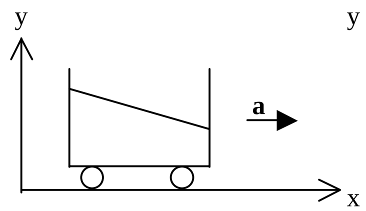


Réponses (les vecteurs sont ici notés en caractères gras).

Exercice 1.
$P' + \rho' \, g \, h' = P + \rho \, g \, h$.

Exercice 2.
1) $P_2 = P_1 + \rho_{Hg} \, g \, e$ et $h_2 = h_1 + e$. 2) $P_2 = 4 \, P_0$ et $P_1 = 3 \, P_0$.

Exercice 3.



$y = - \dfrac{a}{g} \, x + cte$

Exercice 4.
1) $\mathbf{F} = - \rho \, g \, a \, \dfrac{h^2}{2} \, \mathbf{u_y}$. 2) $D \, (a / 2 , 0 , h / 3)$.

Exercice 5.
$F_z = - \pi \, \rho \, g \, R^2 \, (H - h / 3)$.

Exercice 6.
1) $P = P_0 \exp \left(- \dfrac{\rho_0 \, g \, z}{P_0} \right)$ et $p = p_0 \exp \left(- \dfrac{d \, \rho_0 \, g \, z}{P_0} \right)$; 2) $z = \dfrac{P_0}{\rho_0 \, g \, (1 - d)} \ln \dfrac{P_0}{p_0} = - 568$ m .

Exercice 7.
1) $q = \dfrac{M \, g}{M \, g - a \, R}$; $q = 1{,}2$. 2.a) $F_z = \rho_{gaz} \, V \, g \left(\dfrac{1}{d} - 1 \right) - P_s$: tant que l'enveloppe est partiellement gonflée $\rho_{gaz} \, V = m_{gaz} = cte$ et si $P_s = cte$: $F_z = cte$. 2.b) Lorsque le ballon monte, ρ_{gaz} diminue car P diminue : avec $V = cte$: F_z diminue et s'annule (plafond d'altitude).

Exercice 8.
$\rho = \dfrac{\rho_{Hg} \, h^2 \, (3 R - h)}{4 R^3} = 2{,}5.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Exercice 9.
$\mathbf{F} = [\rho \, (S_e \, h' - S_i \, h) - m] \, \mathbf{g}$.