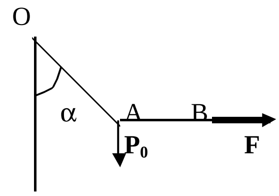
# SERIE D'EXERCICES N° 12 : MECANIQUE : DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

Les grandeurs en caractère gras sont des grandeurs vectorielles. Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.

**Postulat dynamique : point matériel en équilibre.**

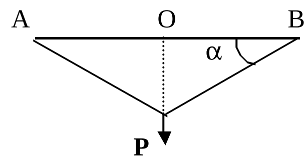
*Exercice 1.*

On dispose de deux ressorts linéaires identiques de longueur au repos $L$ . Chacun, soumis à un poids $P_0$ , prend un allongement $l_0$ , déterminé par leur raideur commune $k$ . On suspend un poids $P_0$ à l'un des ressorts et on tire horizontalement le poids à l'aide de l'autre ressort que l'on tire avec une force variable $F$ . Le premier fait alors un angle $\alpha$ avec la verticale. Pour chaque valeur de $\alpha$ correspondant à une force $F$ , le ressort (1) prend un allongement $l_1$ et le ressort (2) un allongement $l_2$ .
Calculer les allongements $l_1$ et $l_2$ en fonction de $\alpha$ et $l_0$ .




*Exercice 2.*

Un brin de caoutchouc de longueur $2L$ non tendu est fixé entre deux points $A$ et $B$ On admettra que son poids est négligeable et que le brin est horizontal. On accroche un poids $P$ au milieu $O$ de $AB$ . Sachant que le caoutchouc tendu avec une force $F$ s'allonge de $l$ tel que $F = k\,l$ , exprimer $P$ en fonction de $k$ , $L$ et $\alpha$ .




**Postulat dynamique : point matériel libre.**

*Exercice 3.*

Une voiture, de masse $m$ , roulant rectilignement à la vitesse $\mathbf{v_0} = v_0\,\mathbf{i}$ , coupe son moteur à $t = 0$ et n'est plus soumise, suivant $\mathbf{i}$ , qu'à une force de frottement proportionnelle à la vitesse $\mathbf{F} = -h\,\mathbf{v}$ .

1. Ecrire la loi de variation de $v$ en fonction du temps (on fera apparaître la constante de temps $\tau$ que l'on définira).
2. En déduire l'équation horaire du mouvement.

*Exercice 4.*

Un corps de masse $m$ flotte sur un liquide de masse volumique $\rho$ . Sa surface à la ligne de flottaison étant $S$ , calculer la période des oscillations verticales du système en fonction de $m$ , $\rho$ , $S$ et $g$ intensité du champ de pesanteur.
On admettra pour simplifier que la surface $S$ reste constante de part et d'autre de la position d'équilibre, sur une longueur supérieure à l'amplitude des oscillations.
On rappelle que la poussée d'Archimède $\mathbf{P}$ est équivalente à une force unique, verticale, dirigée vers le haut, d'intensité égale au poids du fluide déplacée, s'appliquant en $C$ , centre de poussée (on suppose ici $C$ à la verticale du centre de gravité $G$ ).

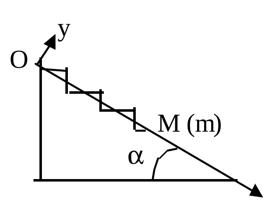
*Exercice 5.*

Une fusée balistique, assimilée à un point matériel $M$ de masse $m$ , est mise à feu à la surface de la Terre, avec une vitesse $\mathbf{v_0}$ de valeur inférieure à la vitesse de satellisation sur une orbite circulaire, faisant un angle $\alpha$ avec l'horizontale (on fera une figure dans le plan de tir défini par ( $\mathbf{g}$ , $\mathbf{v_0}$ ) ramené au trièdre (O, $\mathbf{i}$ , $\mathbf{k}$ ) où $\mathbf{i}$ est unitaire suivant l'horizontale et $\mathbf{k}$ unitaire suivant la verticale ascendante).
Le champ de pesanteur $\mathbf{g}$ est supposé uniforme ( $g = 10\ m.s^{-2}$ ) .
1. On néglige en première approximation la résistance de l'air.
a) Etablir l'équation de la trajectoire.
b) Exprimer la portée $OC$ puis la flèche $AH$ (A point d'altitude maximale, $H$ sa projection sur l'horizontale) en fonction de $v_0$ , $\alpha$ et $g$ .
A.N. Calculer la portée maximale et la hauteur maximale alors atteinte si $v_0 = 1\ km.s^{-1}$ .
c) Ecrire l'équation vérifiée par l'angle de tir $\alpha$ pour que la trajectoire passe par un point $B$ de l'espace de coordonnées ($x_B$ , $z_B$ ).
A.N. Calculer $\alpha$ pour $x_B = 73{,}2$ km et $y_B = 19{,}6$ km si $v_0$ a la valeur précédente.
2. On tient comte maintenant de la résistance de l'air, opposée à la vitesse de la fusée : $\mathbf{f} = -h\,\mathbf{v}$ avec $h$ constante positive.
Etablir les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de $M$ .

**Postulat dynamique : point matériel lié.**

*Exercice 6.*

On considère un ressort de raideur $k$ et de longueur au repos $l_0$ , dont les extrémités sont reliées à un point fixe $O$ et à un point matériel $M$ de masse $m$ . On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe $Ox$ sur le plan incliné (voir la figure).




1. Déterminer l'abscisse $x_e$ du point $M$ à l'équilibre en fonction de $l_0$ , $m$ , $g$ , $k$ et $\alpha$ .

2. A partir de la position d'équilibre M est déplacé d'une distance d comptée algébriquement sur Ox et lâché sans vitesse initiale. Etablir l'équation horaire x (t) en fonction de d , k , m et $x_e$ .

*Exercice 7.*

1. La figure 1 représente une portion de plan incliné sur l'horizontale d'un angle $\alpha$ . Un chariot de masse m est mobile sans frottement sur des rails posés parallèlement à une ligne de plus grande pente du plan. Sa position est repérée sur l'axe x'Ox par l'abscisse x de son centre d'inertie G qui est nulle à l'instant initial. On lance le chariot vers le haut à la vitesse $\mathbf{v_0}$ .
Pour quelle valeur de $v_0$ , exprimée en fonction de g , a , $\alpha$ , la vitesse du chariot s'annule-t-elle au point A d'abscisse x = a ?
2. La figure 2 représente le même plan incliné muni d'un dispositif à ressort, poulie et fil, qui permet d'exercer sur le chariot une force de rappel $F_x = - k x$ , k étant une constante. Le chariot est lancé vers le haut avec la vitesse $\mathbf{v'_0}$ , atteint le point B où sa vitesse s'annule et redescend. Comme précédemment, x = 0 à l'instant initial.
Ecrire et intégrer l'équation différentielle du mouvement (on exprimera l'amplitude et la phase à l'origine en fonction de $v'_0$ , k , m , g et $\alpha$ ). Pour quelle valeur de $v'_0$ le point B est-il confondu avec le point A (on donnera $v'_0$ en fonction de la pulsation propre $\omega_0$ , a et $v_0$ ) ?

Figure 1 :

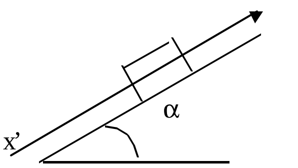
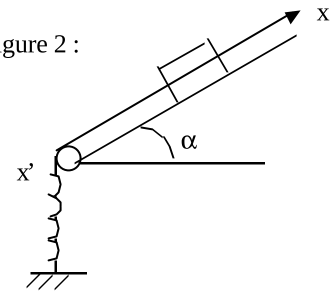



Figure 2 :



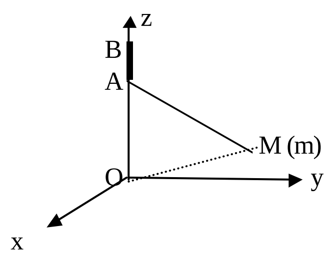

*Exercice 8.*

Une tige tourne dans le plan horizontal xOy autour de son extrémité O à la vitesse angulaire constante $\omega$ . Sur cette tige, un anneau M de masse m , peut glisser sans frottement. A t = 0 , l'anneau part de $M_0$ ( $OM_O = a$ , $\theta_0 = 0$ ), sans vitesse initiale par rapport à la tige .

1. Déterminer la trajectoire de l'anneau en coordonnées polaires par rapport au repère xOy .
2. Déterminer la réaction de la tige sur l'anneau en fonction de a , $\omega$ , $\theta$ et g .

*Exercice 9.*

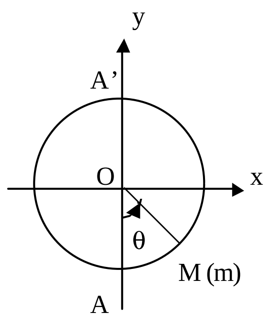
Un élastique E accroché en B passe en A dans un petit anneau et porte en son extrémité M une masse ponctuelle pesante m . Soit k la raideur de E , BA sa longueur au repos. M étant accroché, la position d'équilibre de M se trouve en O . On pose OA = a .




1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ .
2. Résoudre , les conditions initiales quelconques étant définies par : t = 0 , $\mathbf{r} = \mathbf{r_0}$ , $\mathbf{v} = \mathbf{v_0}$ .

*Exercice 10.*

Un point matériel M , de masse m , relié à l'origine O par un fil inextensible et sans masse, décrit dans le sens positif un cercle vertical, de centre O , de rayon r .

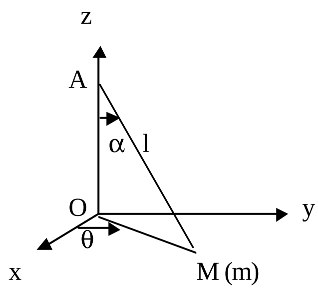



1. Quelles sont les tensions $\mathbf{T_A}$ et $\mathbf{T_{A'}}$ lorsque M passe en A avec la vitesse $\mathbf{v_A}$ et en A' avec la vitesse $\mathbf{v_{A'}}$ ? (on exprimera $T_A$ et $T_{A'}$ en fonction de $v_A$ , $v_{A'}$ , m , r et g intensité du champ de pesanteur). Les valeurs trouvées sont-elles toujours positives ?
2. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta$ que fait OM avec la verticale. Pour intégrer cette équation, multiplier chaque terme par $\frac{d\theta}{dt}$ pour faire apparaître des dérivées connues, en déduire l'expression de la vitesse à l'instant t sachant qu'à l'instant initial $\theta = 0$ et $v = v_0$ (on exprimera $v^2$ en fonction de $v_0$ , g , r et $\theta$ ). Calculer alors la tension du fil T en fonction de $v_0$ , g , r et $\theta$ .
3. La vitesse initiale $v_0$ étant donnée, on désigne par $\theta_v$ la valeur de $\theta$ qui annule l'expression de v et par $\theta_T$ celle qui annule l'expression de T . Exprimer $\cos\theta_v$ puis $\cos\theta_T$ en fonction de $v_0$ , g et r , et tracer les courbes $\cos\theta_v = f(v_0^2)$ et $\cos\theta_T = f(v_0^2)$ . En déduire la nature du mouvement de M suivant la valeur de $v_0$ .

**Moment cinétique.**

*Exercice 11.*
Selon le modèle classique d'atome, un électron décrit autour du noyau une orbite circulaire de rayon $r$, à la vitesse angulaire $\omega$ constante, sous l'action d'une force centrale d'origine électrique. Calculer le moment cinétique orbital de l'électron en fonction de la surface $S$ de l'orbite et du courant équivalent $i = e / T$ ($e$ : charge de l'électron, $m_e$ : masse de l'électron, $T$ : période de révolution).

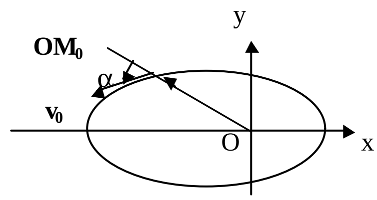
*Exercice 12.*
Un point matériel $M$, de masse $m$, lié par un fil inextensible de longueur $l$ à un point fixe $A$, tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega$ autour de l'axe $Az$.
1. $\alpha$ étant l'angle que forme $AM$ avec la verticale, calculer la tension du fil $T$ puis l'angle $\alpha$ en fonction de $m$, $g$, $l$ et $\omega$.
2. Calculer en coordonnées cylindriques d'origine $O$ l'expression du moment cinétique de $M$ par rapport à $A$.
Vérifier que sa dérivée par rapport au temps est égale au moment par rapport à $A$ de la résultante des forces appliquées à $M$.




**Force centrale.**

*Exercice 13.*
Montrer que si la trajectoire d'un point soumis à une force centrale est un cercle, le mouvement de ce point est alors uniforme.

*Exercice 14.*
Un point matériel soumis à une force centrale de centre de force $O$, décrit une trajectoire elliptique. En un point $M_0$ son vecteur position est $\mathbf{OM_0}$ et sa vitesse $\mathbf{v_0}$ avec $\alpha = (\mathbf{OM_0}, \mathbf{v_0})$. Les valeurs extrémales de $OM$ sont $r_1$ et $r_2$ avec $r_2 > r_1$.
Calculer les vitesses de $M$ en ces points en fonction des données.




*Exercice 15.*
Un point matériel $M$, de masse $m$, est soumis à une force centrale $\mathbf{F} = \dfrac{Km}{r^4}\mathbf{r}$. A l'instant initial $t = 0$, le point $M$ se trouve en $A$ de coordonnées $r_0 = a$ et $\theta_0 = 0$, la vitesse initiale $\mathbf{v_0}$ étant perpendiculaire à $\mathbf{OA}$ avec une constante des aires $C$ positive.
Etablir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $r$ en faisant intervenir $C$ et $K$.

**Formule de Binet.**

*Exercice 16.*
En utilisant la formule de Binet pour l'accélération, trouver la loi de force pour une trajectoire d'équation polaire : $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ où $p$ et $e$ sont des constantes.

**Réponses.**

*Exercice 1.*
$l_1 = l_0 / \cos\alpha$ et $l_2 = l_0 \tan\alpha$ .

*Exercice 2.*
$P = 2\,k\,L\,(\tan\alpha - \sin\alpha)$ .

*Exercice 3.*
1) $v = v_0\,e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{m}{h}$ . 2) $x = \tau\,v_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ .

*Exercice 4.*
$T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho S\,g}}$ .

*Exercice 5.*
1.a) $z = -\dfrac{g}{2\,v_0^{\,2}\cos^2(\alpha)}\,x^2 + \tan(\alpha)\,x$ . 1.b) $OC = \dfrac{v_0^{\,2}}{g}\sin(2\alpha)$ et $AH = \dfrac{v_0^{\,2}\sin^2(\alpha)}{2\,g}$ ; $OC_{max} = \dfrac{v_0^{\,2}}{g} = 100$ km alors AH = 25 km . 1.c) $\tan^2(\alpha) - \dfrac{2\,v_0^{\,2}}{g\,x_B}\tan(\alpha) + \left(1 + \dfrac{2\,v_0^{\,2}\,z_B}{g\,x_B^{\,2}}\right) = 0$ donne $\alpha_1 = 60\,°$ (tir en cloche) et $\alpha_2 = 45\,°$ (tir tendu).

2) $x = \dfrac{m}{h}\,v_0\cos(\alpha)\,(1 - e^{-ht/m})$ et $z = \dfrac{m}{h}\left(v_0\sin(\alpha) + \dfrac{m}{h}\,g\right)(1 - e^{-ht/m}) - \dfrac{m}{h}\,g\,t$ .

*Exercice 6.*
1) $x_e = l_0 + \dfrac{m\,g}{k}\sin(\alpha)$ . 2) $x = d\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) + x_e$ .

*Exercice 7.*
1) $v_0 = \sqrt{2\,g\,a\sin(\alpha)}$ . 2) $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}\,x = -\,g\sin(\alpha)$ d'où $x = X_m\cos(\omega_0\,t + \varphi) - \dfrac{m\,g}{k}\sin(\alpha)$ avec $X_m = \sqrt{v'^{\,2}_0\,\dfrac{m}{k} + \left(\dfrac{m\,g}{k}\sin(\alpha)\right)^2}$ et $\varphi = \text{Arctan}\left[-\dfrac{v'_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}}{\dfrac{m}{k}\,g\sin(\alpha)}\right]$ ; B confondu avec A pour $v'_0 = \sqrt{\omega_0^{\,2}\,a^2 + v_0^{\,2}}$ .

*Exercice 8.*
1) $r = a\,\text{ch}(\theta)$ ; 2) $R_\theta = 2\,m\,a\,\omega^2\,\text{sh}(\theta)$ et $R_z = m\,g$ .

*Exercice 9.*
1) $\ddot{\mathbf{r}} + \dfrac{k}{m}\,\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . 2) $\mathbf{r} = \mathbf{r_0}\cos(\omega t) + \dfrac{\mathbf{v_0}}{\omega}\sin(\omega t)$ (oscillateur spatial).

*Exercice 10.*
1) $T_A = m\left(\dfrac{v_A^{\,2}}{r} + g\right)$ et $T_{A'} = m\left(\dfrac{v_{A'}^{\,2}}{r} - g\right)$ . 2) $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{r}\sin(\theta) = 0$ ; $v^2 = v_0^{\,2} + 2\,g\,r\,(\cos(\theta) - 1)$ ; $T = m\left(\dfrac{v_0^{\,2}}{r} + g\,(3\cos(\theta) - 2)\right)$ . 3) $\cos(\theta_v) = -\dfrac{v_0^{\,2}}{2\,g\,r} + 1$ et $\cos(\theta_T) = -\dfrac{v_0^{\,2}}{3\,g\,r} + \dfrac{2}{3}$ : mouvement pendulaire pour $\theta_v < \theta_T$ ; fil détendu pour $\theta_T < \theta_v$ ; mouvement circulaire pour $v_0^{\,2} > 5\,g\,r$ .

*Exercice 11.*
$\mathbf{s_0} = \dfrac{2\,m_e\,Si}{e}\,\mathbf{u_z}$ .

*Exercice 12.*

1) $T = m\,l\,\omega^2$ et $\cos(\alpha) = \dfrac{g}{l\,\omega^2}$ (exige $\omega > \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ ). 2) $\mathbf{s_A} = m\,l^2\,\omega \sin(\alpha)\,(\cos(\alpha)\,\mathbf{u_r} + \sin(\alpha)\,\mathbf{u_z})$ et

$\dfrac{d\mathbf{s_A}}{dt} = m\,l^2\,\omega^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\mathbf{u_\varphi}$ .

*Exercice 14.*

$r_1\,v_1 = r_2\,v_2 = C = r_0\,v_0 \sin(\alpha)$ .

*Exercice 15.*

$\ddot{r} = \dfrac{C^2 + K}{r^3} = \dfrac{r_0{}^2\ v_0{}^2 + K}{r^3}$ .

*Exercice 15.*

$\mathbf{F} = -\dfrac{K\,m}{r^2}\,\mathbf{u_r}$ .