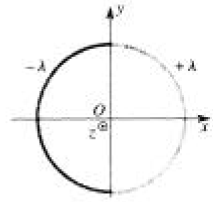
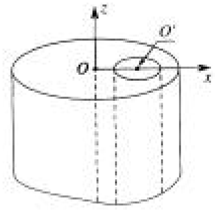
SERIE D'EXERCICES N° 29 : CHAMP ET POTENTIEL ELECTROSTATIQUES

Distributions de charges.

Exercice 1 : cerceau chargé.
Quelles sont les symétries de la distribution circulaire ci-contre ?

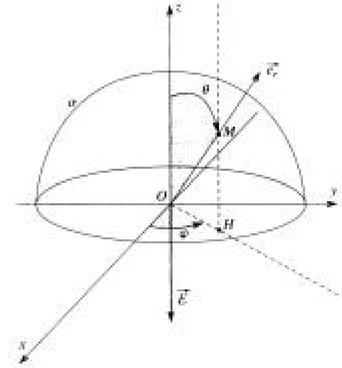


Exercice 2 : cylindre chargé avec cavité.
Un cylindre infini d'axe (Oz), comportant une partie cylindrique évidée d'axe $(O'z)$, porte une charge volumique ρ uniforme.
Quelles symétries peut-on attribuer à cette distribution de charges ?

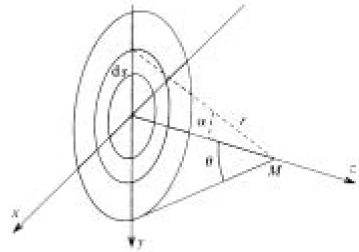


Champ électrostatique.

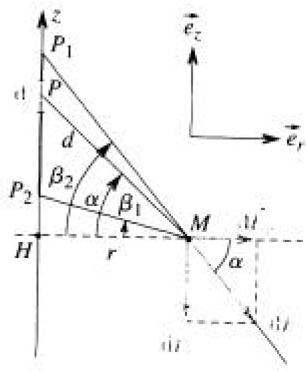
Exercice 3 : demi-sphère chargée en surface.
Calculer le champ électrostatique créé en son centre par une demi-sphère portant la charge surfacique σ répartie uniformément.



Exercice 4 : disque chargé.
Effectuer le calcul du champ électrostatique $\vec{E}$ crée par un disque de rayon R portant la charge surfacique $\sigma = cte$, en un point de son axe. Les notations sont précisées ci-contre.
Tracer $E(M)$ en fonction de z.



Exercice 5 : segment chargé.
1. Calculer en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) le champ électrostatique créé par un segment de l'axe (Oz), de charge linéique uniforme λ, compris entre les points P_1 et P_2 d'abscisses z_1 et z_2, repérés par les angles β_1 et β_2.
2. Discuter la cas du fil rectiligne infini uniformément chargé.



Potentiel électrostatique.

Exercice 6 : disque chargé.
Calculer directement le potentiel électrostatique créé par un disque de rayon R et portant la charge surfacique $\sigma = cte$, en un point de son axe, avec les notations précisées sur la figure de l'exercice 4. Tracer simultanément $E(M)$ (voir l'exercice 4) et $V(M)$ en fonction de z et conclure.

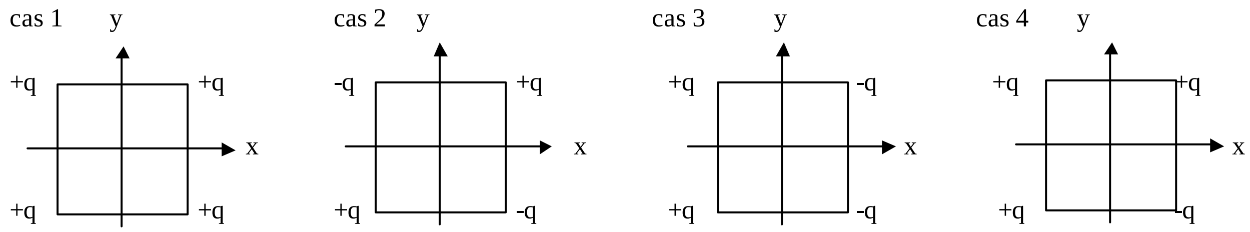
Exercice 7 : fil rectiligne infini.
Déterminer le potentiel associé à un fil rectiligne infini portant la charge linéique uniforme λ. Le champ de cette distribution a été calculé à la deuxième question de l'exercice 5.

Champ et potentiel électrostatiques.

Exercice 8 : système de quatre charges ponctuelles.

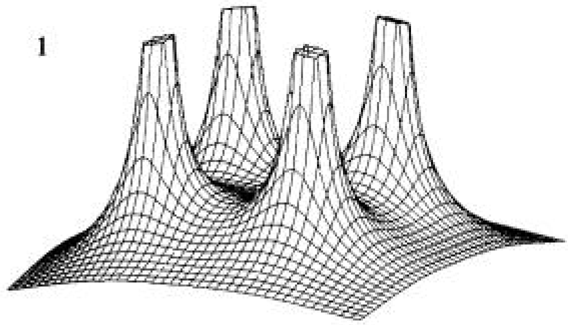
Soit quatre charges ponctuelles disposées au sommet d'un carré dont la longueur de la diagonale est $2a$.

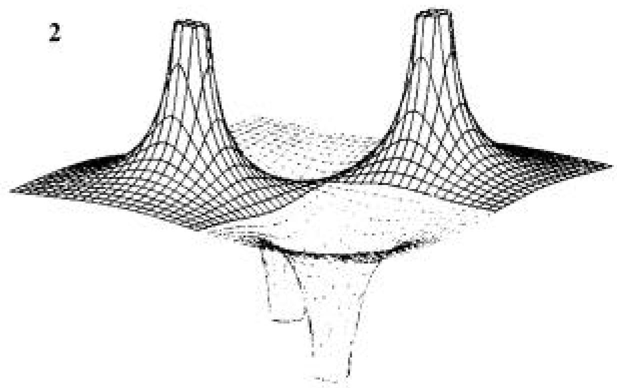
1. Calculer $\vec{E}$ et V au centre $O\,(0,0)$ du carré dans les configurations suivantes :

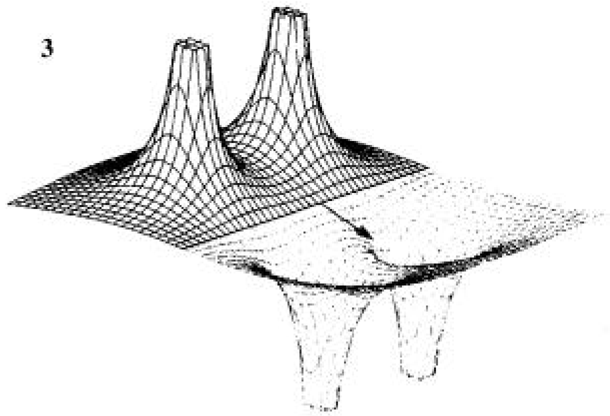


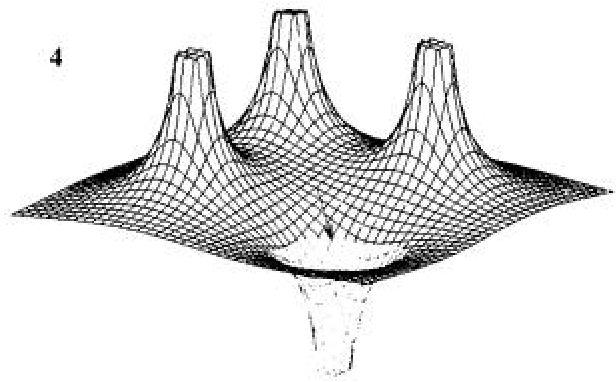
On présentera les résultats sous forme d'un tableau donnant dans chaque cas $V\,(O)$, $E_x\,(O)$ et $E_y\,(O)$. On dessinera $\vec{E}(O)$ sur les figures ci-dessus.

2. Montrer que $\vec{E}(O) = \vec{0}$ correspond à un extremum de potentiel en O . On rappelle d'autre part qu'un champ $\vec{E}$ non nul est dirigé vers les potentiels décroissants. Retrouver ces propriétés sur les représentations symboliques « en relief » du potentiel obtenues avec Maple dans chacun des quatre cas.







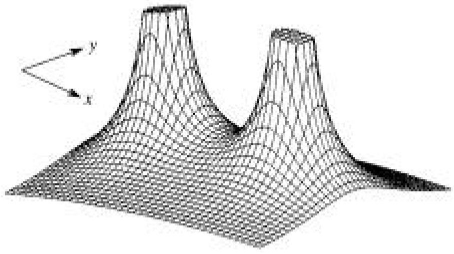


Exercice 9 : équilibre d'une charge dans le champ électrostatique de deux charges fixes.

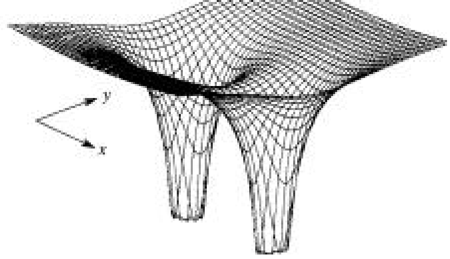
Soit un plan repéré par les axes (Ox) et (Oy) . Soient deux charges ponctuelles $q > 0$ fixes identiques, placées en $A\,(-a\,,\,0)$ et $B\,(a\,,\,0)$.

1. Déterminer la position d'équilibre d'une charge ponctuelle Q pouvant se déplacer dans ce champ.
2. On donne la représentation symbolique « en relief » de l'énergie potentielle de la charge Q dans le cas $Q > 0$ puis $Q < 0$ (obtenue avec Maple). Etudier la stabilité de la position d'équilibre déterminée à la première question dans les cas suivants :

a) dans le cas $Q > 0$ on envisagera un déplacement de la charge Q limité à l'axe (Ox) ;
b) dans le cas $Q < 0$ on envisagera un déplacement de la charge Q limité à l'axe (Oy) .



cas $Q > 0$



cas $Q < 0$

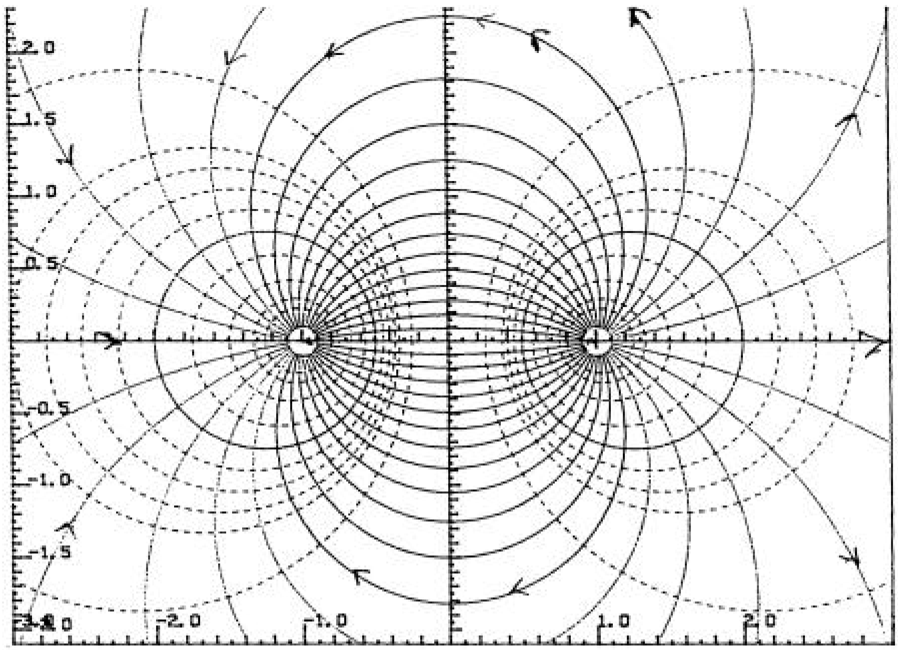
Exercice 10 : deux fils parallèles de charges opposées.

Soient deux fils rectilignes infinis, parallèles à l'axe (Oz) et d'équations cartésiennes respectives $x = +a$ et $x = -a$, de charges linéiques uniformes $+\lambda$ et $-\lambda$ ($\lambda > 0$). On note A_1 et A_2 leur intersection respective avec le plan (xOy).

Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) et on note r_1 et r_2 les distances entre M et le premier fil d'une part, M et le second fil d'autre part.

On choisit l'origine des potentiels au point O origine du repère.

1. En utilisant le résultat de l'exercice 7 pour un fil infini, établir l'expression du potentiel en M en fonction de λ, r_1 et r_2.
2. En posant $k = \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$, établir en coordonnées cartésiennes l'équation de la surface équipotentielle lieu des points M tels que $V(M) = V_0$. Montrer qu'il s'agit d'un cylindre dont l'intersection avec le plan (xOy) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Interpréter la carte des équipotentielles et des lignes de champ tracée ci-dessous dans un plan z = cte :



Réponses (les vecteurs sont ici notés en caractères gras).

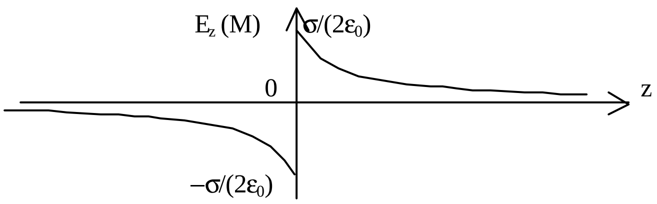
Exercice 1.
(xOy) et (xOz) : plans miroirs ; (yOz) : plan anti-miroir.

Exercice 2.
(xOy) et (xOz) : plans miroirs ; invariance par translation parallèlement à (Oz) .

Exercice 3.
$\mathbf{E}(O) = -\dfrac{\sigma}{4\,\varepsilon_0}\,\mathbf{u_z}$.

Exercice 4.
$E_z(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$ pour $z > 0$, avec $E_{axe}(-z) = -E_{axe}(z)$:

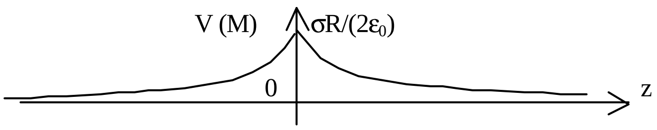
Pour $\sigma > 0$:



Exercice 5.
1) $\mathbf{E}(M) = \dfrac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,[\,(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)\,\mathbf{u_r} + (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)\,\mathbf{u_z}\,]$. 2) $\mathbf{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,\mathbf{u_r}$.

Exercice 6.
$V(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right)$ pour $z > 0$, avec $V_{axe}(-z) = V_{axe}(z)$:

Pour $\sigma > 0$:



Conclusion : à la traversée d'une surface chargée, **E** subit une discontinuité de valeur σ / ε_0 ; V est continu.

Exercice 7.
$V(r) = -\dfrac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\ln r + cte$;

Exercice 8.

	V (O)	E_x (O)	E_y (O)
cas 1	$q / (\pi\,\varepsilon_0\,a)$	0	0
cas 2	0	0	0
cas 3	0	$q / (\sqrt{2}\,\pi\,\varepsilon_0\,a^2)$	0
cas 4	$q / (2\,\pi\,\varepsilon_0\,a)$	$q / (2\sqrt{2}\,\pi\,\varepsilon_0\,a^2)$	$-q / (2\sqrt{2}\,\pi\,\varepsilon_0\,a^2)$

2) $E_x(O) = -\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ et $E_y(O) = -\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$;

Exercice 9.
1) M en O . 2.a) O position d'équilibre stable. 2.b) O position d'équilibre stable.

Exercice 10.
1) $V(M) = \dfrac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\ln\dfrac{r_2}{r_1}$. 2) Cercle de centre ($x_0 = a\,\dfrac{k^2+1}{k^2-1}$, $y_0 = 0$) ; de rayon $R = \left|\dfrac{2\,a\,k}{1-k^2}\right|$.

3) $V_0 = 0 \Rightarrow k = 1$: équipotentielle : plan (yOz) ; $V_0 \to \infty \Rightarrow k \to \infty$: équipotentielle : fil $+\lambda$;
$V_0 \to -\infty \Rightarrow k \to 0$: équipotentielle : fil $-\lambda$.