

Problème 1 : La mécanique de la marche (Mines-Ponts 1999)

Enoncé page 2

Solution page 2

Problème 2 : Roulement d'un cylindre dans un demi-cylindre (Concours TA 1994)

Enoncé page 4

Solution page 4

Problème 3 : Chute d'une tartine beurrée 1 (Mines-Ponts 1999)

Enoncé page 6

Solution page 8

Problème 4 : Oscillations d'une barre sur des rails (ATS 2006)

Enoncé page 11

Solution page 12

Problème 5 : Quelques oscillations (Mines-Ponts 2008)

Enoncé page 14

Solution page 16

Problème 6 : Etude d'un accélérographe mécanique (CCP 2008)

Enoncé page 21

Solution page 23

Problème 7 : Chute d'une tartine beurrée 2 (ESIM 1999)

Enoncé page 29

Solution page 30

Problème 1 : La mécanique de la marche (Mines-Ponts 1999)

Par un beau matin d'été, un physicien délaisse son laboratoire pour une randonnée pédestre à travers la campagne. Après 10 km de marche sur un chemin horizontal, il s'assoit à l'ombre d'un arbre et soliloque : « *Je suis fatigué. Pourtant, je n'ai pas travaillé. Comment est-ce possible ?* ».

1. Le physicien effectue une marche de L kilomètres à vitesse constante sur une route horizontale (on prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour le champ de pesanteur). On suppose que le centre de masse du promeneur conserve une altitude constante pendant la marche et que le contact sol-promeneur se fait sans glissement. On modélise l'homme comme un solide. Quel est le travail mécanique effectué par l'homme au cours de la marche ?

Le corps humain n'est pas un corps solide. Au cours de la marche, le centre de masse effectue des oscillations. L'ordre de grandeur de l'amplitude de ces oscillations est $a = 2 \text{ cm}$ pour chaque pas effectué. Quand le centre de masse s'élève, l'énergie élastique musculaire est transformée en énergie potentielle. Quand le centre de masse s'abaisse, l'énergie potentielle est convertie en énergie thermique (« *chaleur* »). La machine humaine n'est pas réversible. Fixons les ordres de grandeur pour une marche de $L = 10 \text{ km}$, une longueur de pas $p = 0,75 \text{ m}$ et un homme de masse $M = 70 \text{ kg}$.

2. Effectuer un schéma montrant la trajectoire du centre de masse en faisant apparaître les longueurs $2a$ et p .
3. Montrer que cette marche est équivalente, pour le travail fourni, à l'escalade d'une montagne d'une hauteur H telle que $H = 2a \frac{L}{p}$. Application numérique.
4. Calculer l'énergie mécanique fournie et comparer cette énergie à l'énergie de la ration alimentaire quotidienne, de l'ordre de grandeur de 10^6 J , d'un homme sédentaire. Que peut-on en conclure ?

Pour marcher l'homme prend appui sur une jambe et laisse « penduler » l'autre jambe autour de l'articulation fémorale. On modélise la jambe par une barre homogène, de masse m , de longueur $\ell = 1 \text{ m}$, de moment d'inertie autour de l'articulation $J = \frac{1}{3} m \ell^2$.

5. Quelle est la valeur de la période des petites oscillations ? En déduire la vitesse moyenne du marcheur en km/h. Quelle conséquence peut-on en tirer ?
6. Sachant que $g_{\text{Lune}} = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, quelle serait la vitesse moyenne du même marcheur sur la Lune ?

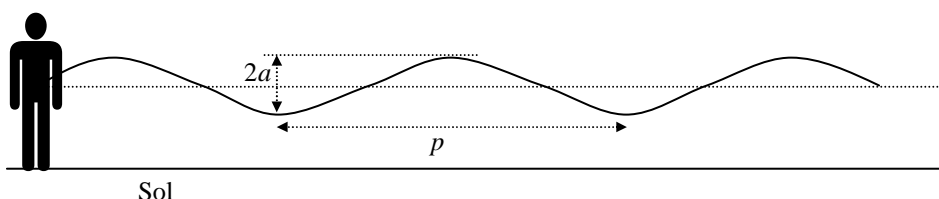
Solution

1. On étudie le système {marcheur} dans le référentiel terrestre galiléen, assimilé à un solide. Il subit :
 - son poids $\vec{P} = M \vec{g}$ qui ne travaille pas car le centre de masse du promeneur conserve une altitude constante pendant la marche ;
 - la réaction de contact du sol sur les pieds \vec{R} qui ne travaille pas car il n'y a pas glissement.

D'autre part, la marche s'effectue à vitesse constante, donc l'énergie cinétique E_c du marcheur est constante et ne varie pas.

En notant W_m le travail mécanique effectué par l'homme au cours de la marche, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit $\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W_m$. Avec $\Delta E_c = W(\vec{P}) = W(\vec{R}) = 0$, on obtient $W_m = 0$: le travail mécanique effectué par l'homme (c'est celui des forces intérieures) au cours de la marche est nul.

2. Schéma :



3. Quand le centre de masse s'élève de $2a$ pendant un pas, l'énergie élastique musculaire est transformée en énergie potentielle et le marcheur fournit le travail $W_p = Mg \cdot 2a$ (c'est le travail du poids).

Pour la marche totale le marcheur fournit le travail $W_t = NW_p$ où N est le nombre de pas.

Or $L = Np$, donc $W_t = Mg \cdot 2a \frac{L}{p}$.

Le travail à fournir pour escalader une montagne d'une hauteur H est $W = Mg \cdot H$.

Par identification on obtient $H = 2a \frac{L}{p}$, soit $H = 533 \text{ m}$.

4. L'énergie fournie $W_t = Mg \cdot 2a \frac{L}{p}$ vaut $W_t = 365 \text{ kJ}$, ce qui représente le tiers de la ration alimentaire

quotidienne d'un homme sédentaire, ce n'est pas excessif.

5. On considère le système {jambe} assimilée à une tige en rotation autour d'un axe fixe passant par une de ses extrémités, le point O, dont on étudie les oscillations dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On suppose la liaison en O étant parfaite.

Soit m la masse de la tige, ℓ sa longueur et G son centre de gravité dont on repère la position de G par la variable angulaire θ .

Le mouvement est une rotation pure : on choisit la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, le

mouvement de G est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\frac{\ell}{2}$.

Repérage de G : $\vec{OG} = \frac{\ell}{2} \vec{u}_r$, $v_G = \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \vec{u}_\theta$.

Le vecteur rotation de la tige est $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{u}_y$ (perpendiculaire au plan de la figure).

Bilan des forces : - poids (qui s'applique en G) : $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta)$;

- la réaction en O : \vec{R} .

Le théorème du moment cinétique appliqué en O s'écrit : $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{R})$.

$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = \frac{\ell}{2} \vec{u}_r \wedge mg(\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta) = -mg \frac{\ell}{2} \sin\theta \vec{u}_y$.

De plus, d'après Koenig $\vec{\sigma}_O = J_O \vec{\Omega} = \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta} \vec{u}_y$.

Le théorème du moment cinétique fournit $\frac{m\ell^2}{3} \ddot{\theta} = -mg \frac{\ell}{2} \sin\theta$, soit $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell} \sin\theta = 0$.

Pour les oscillations de faible amplitude $\sin\theta \approx \theta$ (vrai pour $\theta < 11^\circ$) et $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2\ell} \theta = 0$, ces oscillations sont

alors sinusoidales de la forme $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$, de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$ et de période

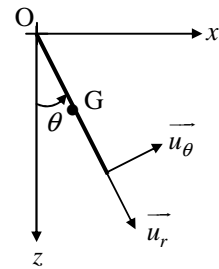
$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$. Application numérique : $T_0 = 1,6 \text{ s}$.

Un pas correspond à une demie période, la vitesse moyenne du marcheur est donc $v_m = \frac{2p}{T}$.

On trouve $v_m = 0,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $v_m = 3,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Ce modèle simplifié est acceptable puisqu'un marcheur moyen va à une vitesse comprise entre 4 et 6 km/h.

6. En remplaçant g par g_{Lune} on obtient $v_{m,Lune} = 1,3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$: le même marcheur va moins vite sur la Lune que sur la Terre.



Problème 2 : Roulement d'un cylindre dans un demi-cylindre (Concours TA 1994)

Le référentiel terrestre (\mathcal{R}) est supposé galiléen.

On considère un demi-cylindre C_0 , de centre O_0 , fixe par rapport à (\mathcal{R}), d'axe Δ et de rayon R .

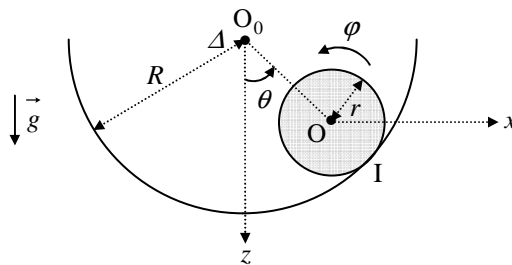
Un cylindre C , de centre O , plein, homogène, de masse m , de rayon r et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mr^2$ par rapport à son axe de rotation, roule sans glisser à l'intérieur de C_0 de manière à ce que la génératrice de contact soit constamment parallèle à Δ .

Dans un plan perpendiculaire à Δ , on repère la position de C par :

- l'angle θ que fait O_0O avec la verticale descendante O_0z ;
- l'angle φ que fait OM avec l'axe horizontal O_x , M étant un point quelconque du cylindre C .

On note $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$ les dérivées par rapport au temps $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$.

Soit \vec{g} le champ de pesanteur terrestre, on prendra $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



1. Ecrire la relation liant $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, R et r traduisant la condition de roulement sans glissement.
2. Calculer l'énergie cinétique E_c du cylindre C dans (\mathcal{R}) en fonction de m , R , r et $\dot{\theta}$.
3. Calculer l'énergie potentielle de pesanteur E_p du cylindre C dans (\mathcal{R}).
4. Justifier le fait que l'énergie mécanique de C dans (\mathcal{R}) est constante. Ecrire la relation correspondante en notant θ_0 et $\dot{\theta}_0$ les valeurs initiales de θ et $\dot{\theta}$.
5. En dérivant par rapport au temps la relation obtenue à la question 4, donner l'équation différentielle du second ordre régissant le mouvement de C .
6. On se place dans l'hypothèse des oscillations de faible amplitude. Montrer que le mouvement de C est sinusoïdal. Donner l'expression de la période T_0 de ce mouvement en fonction de R , r et g .
7. Application numérique : $R = 0,5 \text{ m}$ et $r = 0,2 \text{ m}$. Calculer T_0 .

Solution

On étudie le mouvement du cylindre C_0 sur le support S dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_{\text{galiléen}}$.

Il subit son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ uniforme et vertical (qui s'applique en O) et la réaction \vec{R} du support (qui s'applique en I , point de contact entre C et C_0).

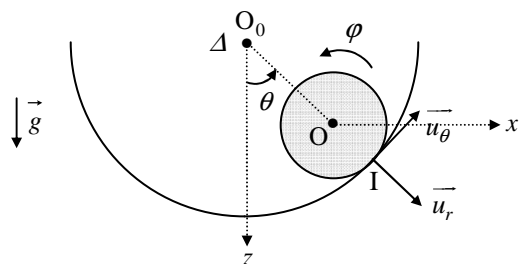
1. La condition de roulement sans glissement s'écrit en annulant la vitesse de glissement : $\overline{v_g(C/C_0)} = \vec{0}$.

La vitesse de glissement du cylindre C sur le support C_0 s'écrit : $\overline{v_g} = \overline{v_{I \in C}} - \overline{v_{I \in C_0}}$.

$\overline{v_{I \in C_0}} = \vec{0}$ car le support est fixe dans le référentiel \mathcal{R} et

$\overline{v_{I \in C}}$ s'obtient par le champ des vitesses du cylindre C .

$\overline{v_{I \in C}} = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \vec{OI}$, et on choisit la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ pour repérer O .



$$\vec{v}_O = \frac{d\vec{OO}_0}{dt} = \frac{d}{dt}((R-r)\vec{u}_r) = (R-r)\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad \vec{\Omega} = \dot{\phi}\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{OI} = r\vec{u}_r, \quad \text{on en déduit} \quad \vec{v}_g = ((R-r)\dot{\theta} + r\dot{\phi})\vec{u}_\theta.$$

La condition de roulement sans glissement $\vec{v}_g = \vec{0}$ s'écrit alors $\boxed{(R-r)\dot{\theta} + r\dot{\phi} = 0}$, ou bien $\dot{\phi} = -\left(\frac{R-r}{r}\right)\dot{\theta}$.

2. L'énergie cinétique E_c du cylindre C dans \mathcal{R} s'exprime en utilisant le théorème de Koenig :

$$E_c = \frac{1}{2}mv_O^2 + E_c^*, \quad \text{avec} \quad \vec{v}_O = (R-r)\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad E_c^* = \frac{1}{2}J\Omega^2 = \frac{1}{4}mr^2\dot{\phi}^2, \quad \text{soit} \quad E_c = \frac{1}{2}m((R-r)\dot{\theta})^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\phi}^2.$$

Avec $\dot{\phi} = -\left(\frac{R-r}{r}\right)\dot{\theta}$, on obtient $\boxed{E_c = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2}$.

3. L'énergie potentielle de pesanteur E_p du cylindre C dans (\mathcal{R}) s'écrit $E_p = -m\vec{g} \cdot \vec{OO}_0 + cte$.

Or $\vec{g} = g\vec{u}_z$ et $\vec{OO}_0 = (R-r)\vec{u}_r$, d'où $\boxed{E_p = -mg(R-r)\cos\theta}$ (on choisit la constante nulle).

4. Le cylindre subit son poids (conservatif) et la réaction du support (qui ne travaille pas en l'absence de glissement), c'est donc un système conservatif et son énergie mécanique se conserve : $\boxed{E_m = E_c + E_p = cte}$.

On peut alors écrire $E_m(t) = E_m(0)$, soit $\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 - mg(R-r)\cos\theta = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}_0^2 - mg(R-r)\cos\theta_0$,

soit, en simplifiant par $m(R-r)$: $\boxed{\frac{3}{4}(R-r)\dot{\theta}^2 - g\cos\theta = \frac{3}{4}(R-r)\dot{\theta}_0^2 - g\cos\theta_0}$.

5. En dérivant par rapport au temps on obtient : $\frac{3}{4}(R-r) \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + g\dot{\theta}\sin\theta = 0$, soit $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\sin\theta = 0}$.

6. Dans le cas d'oscillations de faible amplitude $\sin\theta \approx \theta$ (vrai pour $\theta < 11^\circ$) et $\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0$.

La solution de cette équation différentielle est de la forme $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$.

Ces oscillations sont donc sinusoïdales de période $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}}$.

7. Application numérique : $\boxed{T_0 = 1,3 \text{ s}}$.

Problème 3 : Chute d'une tartine beurrée 1 (Mines-Ponts 1999)

Préoccupé dès le petit-déjeuner par un problème résistant à sa sagacité, un physicien pose distraitemment sa tartine beurrée en déséquilibre au bord de la table, côté beurré vers le haut (figure 1). La tartine tombe et atterrit sur le côté beurré, ce qui ne manque pas d'attirer l'attention du physicien. Répétant l'expérience avec méthode et circonspection, notre héros observe la répétitivité du phénomène et le modélise. Nous allons lui emboîter le pas.

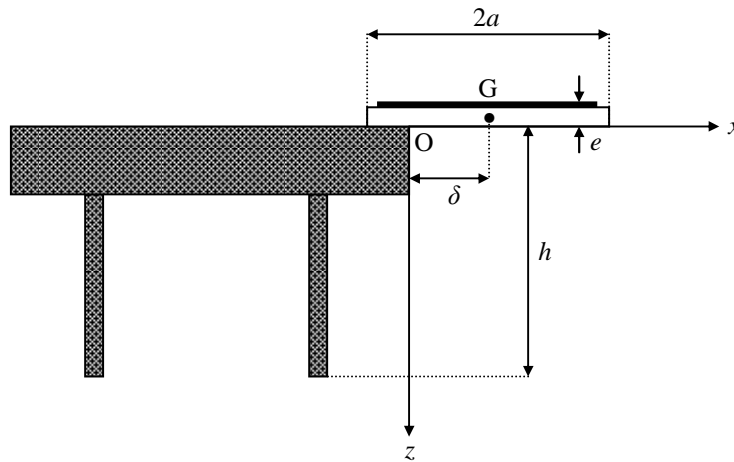


Figure 1 : tartine sur table

Une tartine rectangulaire de longueur $2a$, de largeur $2b$ et d'épaisseur e , de masse m uniformément répartie, est placée au bord d'une table de hauteur h . Le mouvement est décrit dans le repère $R(O, x, y, z)$, direct et supposé galiléen : O est sur le bord de la table, l'axe Ox est horizontal dirigé vers l'extérieur de la table ; l'axe Oy est porté par le rebord de la table et l'axe Oz , vertical, est dirigé vers le bas ; les petits côtés de la tartine sont parallèles à Oy .

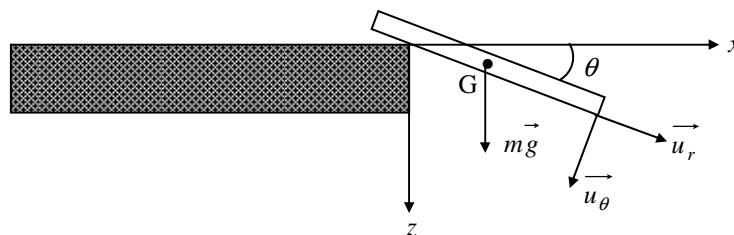


Figure 2 : chute d'une tartine

A l'instant initial, la tartine, supposée d'épaisseur nulle, est horizontale, sa vitesse est nulle. Les coordonnées de son centre de masse G sont $(\delta, 0, 0)$. La tartine amorce une rotation *sans glissement* autour de l'arête Oy du bord de la table. A l'instant t , la tartine est repérée par l'angle θ de la figure 2. La vitesse angulaire est notée

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe Gy , parallèle à Oy et passant par G , est

$$J_{Gy} = \frac{1}{3} ma^2 \text{ et par rapport à l'axe } Oy \text{ il est } J_{Oy} = J_{Gy} + m\delta^2 = \left(\frac{a^2}{3} + \delta^2 \right) m.$$

1. En introduisant les réactions tangentielle et normale de la table en O, notées respectivement T et N dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ représentée sur la figure 2, exprimer le théorème du mouvement du centre de masse, dans le repère galiléen $R(O, x, y, z)$, en projection dans la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$; on notera g l'intensité de l'accélération de la pesanteur.

2. Exprimer le théorème du moment cinétique pour la tartine, en projection sur l'axe Oy . Le coefficient de surplomb étant défini par $\eta = \frac{\delta}{a}$ (la distance δ est appelée *distance de surplomb*), en déduire la relation (qui

définit, au passage, la vitesse angulaire ω_0) :
$$\omega^2 = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1+3\eta^2} \sin \theta = \omega_0^2 \sin \theta \quad (A).$$

3. Retrouver la relation (A) par des considérations énergétiques.

4. La tartine quitte la table à un instant pris comme origine des temps, l'angle θ vaut alors $\frac{\pi}{2}$, la vitesse angulaire initiale est ainsi ω_0 . Quelle est la loi d'évolution ultérieure de l'angle θ ? (on suppose, bien entendu, que le mouvement reste plan et qu'il n'y a pas de contact ultérieur avec la table).

5. On considère que, lorsque la tartine atteint le sol, à l'instant τ , elle ne subit pas de rebond et que toute son énergie cinétique devient négligeable. Quel est l'angle limite θ_1 tel que la tartine atterrisse côté pain, en admettant qu'elle fasse moins d'un tour avant de toucher le sol?

6. On suppose $\eta \ll 1$ ($\delta \ll a$); montrer que la durée de chute libre (cette dernière commençant lorsque le centre de masse G de la tartine est presque en O) est $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Calculer τ pour $h = 75$ cm et $g = 9,8$ m.s⁻².

Quelle est la chance de rattraper la tartine avant qu'elle n'atteigne le sol?

7. Quelle est la valeur η_{\min} de η permettant à la tartine d'atterrir côté pain?

Dans les circonstances courantes, le coefficient de surplomb η ne dépasse guère 0,02. Qu'en déduit-on sur la chute de la tartine?

8. Comment les considérations précédentes seraient-elles modifiées sur la planète Mars, où le champ de pesanteur vaut $g_{Mars} = 3,7$ m.s⁻²?

9. Il est raisonnable de penser que la hauteur d'un éventuel organisme humanoïde marchant sur deux jambes est conditionnée par la valeur du champ de pesanteur de la planète où il vit (par exemple, la hauteur maximale serait celle au-delà de laquelle une chute sur la tête serait certainement mortelle). Sous l'hypothèse que cet humanoïde aurait la même constitution que les Terriens (même résistance de la boîte crânienne, par exemple), quel serait l'ordre de grandeur de sa taille? Un martien vérifierait-il lui aussi, sous les mêmes hypothèses, que sa tartine beurrée tombe presque toujours sur le côté tartiné?

10. L'hypothèse de rotation complète sans glissement jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$ peut certainement être mise en question.

Comment le glissement affecte-t-il le temps de chute? La possibilité de voir atterrir la tartine du bon côté (c'est-à-dire, conventionnellement, le côté non beurré) s'en trouve-t-elle augmentée ou diminuée?

Solution

1. On étudie le mouvement d'une tartine beurrée dans le référentiel terrestre galiléen. Elle subit son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ uniforme et vertical (qui s'applique en G) et la réaction $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ de l'arête de la table (qui s'applique en O, point de contact entre la tartine et l'arête).

Le théorème du centre de masse appliqué à la tartine dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit $m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R}$.

Dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\vec{a}_G = \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (\delta \vec{u}_r) = \delta (-\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ddot{\theta} \vec{u}_\theta), \quad \vec{P} = mg \vec{u}_z = mg (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta) \quad \text{et} \quad \vec{R} = T \vec{u}_r + N \vec{u}_\theta.$$

En projetant sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ on obtient
$$\begin{cases} -m\delta\dot{\theta}^2 = mg \sin \theta - T \\ m\delta\ddot{\theta} = mg \cos \theta - N \end{cases}.$$

2. Le théorème du moment cinétique par rapport au point fixe O s'écrit $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{R})$.

La tartine effectue un mouvement de rotation autour de l'arête Oy fixe donc $\vec{\sigma}_O = J_{Oy} \vec{\omega}$ avec $\vec{\omega} = (-\dot{\theta}) \vec{u}_y$.

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = \delta \vec{u}_r \wedge mg (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta) = -\delta mg \cos \theta \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{0} \quad \text{car} \quad \vec{R} \text{ s'applique en O.}$$

On en déduit $-J_{Oy} \ddot{\theta} \vec{u}_y = -\delta mg \cos \theta \vec{u}_y$, soit $\ddot{\theta} = \frac{\delta mg \cos \theta}{J_{Oy}}$.

Or $J_{Oy} = \left(\frac{a^2 + 3\delta^2}{3} \right) m$, d'où $\ddot{\theta} = \frac{3\delta g}{a^2 + 3\delta^2} \cos \theta = \frac{g}{a} \frac{3 \frac{\delta}{a}}{1 + 3 \frac{\delta^2}{a^2}} \cos \theta$.

En posant $\eta = \frac{\delta}{a}$ on obtient $\ddot{\theta} = \frac{g}{a} \frac{3\eta}{1 + 3\eta^2} \cos \theta$.

On multiplie par $\dot{\theta}$: $\dot{\theta} \ddot{\theta} = \frac{g}{a} \frac{3\eta}{1 + 3\eta^2} \dot{\theta} \cos \theta$ et on intègre avec $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, soit

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{a} \frac{3\eta}{1 + 3\eta^2} \sin \theta.$$

En notant $\omega = \dot{\theta}$, on obtient
$$\omega^2 = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1 + 3\eta^2} \sin \theta, \quad \text{ou bien} \quad \omega^2 = \omega_0^2 \sin \theta \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1 + 3\eta^2}.$$

3. Etudions la question précédente à l'aide de considérations énergétiques : en effet puisqu'il n'y a pas de glissement, \vec{R} ne travaille pas et le poids est conservatif, donc l'énergie mécanique E_m de la tartine se conserve. Elle s'écrit $E_m = E_c + E_p$, avec l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} J_{Oy} \dot{\theta}^2$ (la tartine est en rotation autour d'un axe fixe), et E_p comprend seulement le terme d'énergie potentielle de pesanteur (\vec{R} ne travaille pas), soit

$$E_p = -mgz_G = -mg\delta \sin \theta, \quad \text{soit} \quad E_m = \frac{1}{2} J_{Oy} \dot{\theta}^2 - mg\delta \sin \theta.$$

Puisque E_m se conserve $E_m = E_m(0) = 0$ car $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, soit $\frac{1}{2} J_{Oy} \dot{\theta}^2 - mg\delta \sin \theta = 0$ et

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mg\delta \sin \theta}{J_{Oy}}. \text{ Avec } J_{Oy} = \left(\frac{a^2 + 3\delta^2}{3} \right) m, \text{ on obtient } \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1+3\eta^2} \sin \theta} \text{ (même relation qu'en 2).}$$

4. Prenons une nouvelle origine des temps : la tartine quitte la table en $t = 0$, et les conditions initiales de la chute sont alors $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\dot{\theta}(0) = \omega(0) = \omega_0 \sqrt{\sin \theta(0)} = \omega_0$.

La tartine n'est alors soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$ (qui s'applique en G).

Le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique s'écrit $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$.

On en déduit $\vec{\sigma}_G = cte$. Or $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}^* = J_{Gy} \vec{\omega} = -\frac{1}{3} ma^2 \omega \vec{u}_y$, d'où $\omega = \dot{\theta} = cte = \omega_0$ et $\theta = \omega_0 t + \theta(0)$, et

finalement $\boxed{\theta(t) = \omega_0 t + \frac{\pi}{2}}$.

5. Pour que la tartine atterrisse côté pain il faut $\theta > \frac{3\pi}{2}$, soit $\boxed{\theta_1 = \frac{3\pi}{2}}$.

6. Lorsque le centre de masse G de la tartine est en O la chute libre de hauteur h commence.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la tartine s'écrit $m\vec{a}_G = \vec{P}$, soit $\vec{a}_G = \vec{g} = g\vec{u}_z$.

On déduit en intégrant par rapport au temps sa vitesse $\vec{v}_G = gt\vec{u}_z$ et sa position $z_G(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Le temps de chute τ de la tartine est tel que $z(\tau) = h$, soit $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $\boxed{\tau = 0,39 \text{ s}}$.

Il faut être très rapide pour rattraper la tartine avant qu'elle n'atteigne le sol.

7. La valeur η_{\min} de η correspond à la valeur θ_1 de θ , et il faut $\theta(\tau) = \theta_1$, soit $\omega_0 \tau + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$, d'où $\omega_0 \tau = \pi$.

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a} \frac{6\eta}{1+3\eta^2}}$ et $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, on obtient $\sqrt{\frac{g}{a} \frac{6\eta_{\min}}{1+3\eta_{\min}^2}} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \pi$.

Or $\eta \ll 1$ donc $1+3\eta^2 \approx 1$ et $\sqrt{\frac{g}{a} \cdot 6\eta_{\min}} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \pi$ donne $\boxed{\eta_{\min} = \frac{\pi^2 a}{12h}}$, $\boxed{\eta_{\min} = 0,05}$.

En pratique $\eta \leq 0,02$, on en déduit que $\boxed{\text{la tartine atterrit du côté beurré}}$.

8. L'expression de η_{\min} est indépendante de g donc sur Mars la tartine atterrit aussi du côté beurré.

Sur Mars le temps de chute s'écrit $\tau_{Mars} = \sqrt{\frac{2h}{g_{Mars}}}$, soit $\tau_{Mars} = 0,63 \text{ s}$, on a plus de chance de rattraper la

tartine avant qu'elle n'atteigne le sol.

9. Sur Mars l'énergie se conserve de la même manière que sur Terre, de sorte que lors d'une chute sur la tête l'énergie potentielle est convertie en énergie cinétique. L'énergie potentielle d'un point de la tête est de la forme

$$E_p = mgz, \text{ la masse } m \text{ à la même valeur sur Terre et sur Mars, donc } (gz)_{Terre} = (gz)_{Mars}.$$

On en déduit, en appelant h_t la hauteur d'un terrien et h_m la hauteur d'un martien, que $h_t g = h_m g_{Mars}$.

Avec $h_t \approx 1,8$ m, on obtient la hauteur d'un martien : $h_m \approx 4,8$ m.

De même, la hauteur H de la table d'un martien serait de l'ordre de $H = h \cdot \frac{g}{g_{Mars}} \approx 2$ m, de sorte que le temps

de chute serait $\tau' = \sqrt{\frac{2H}{g_{Mars}}} = 1$ s : la martien a une chance de rattraper la tartine avant qu'elle n'atteigne le sol.

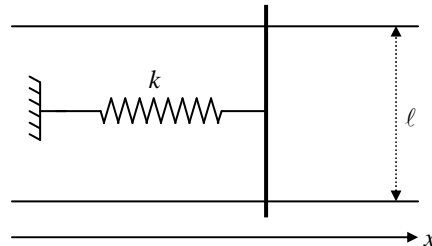
L'expression de η_{\min} étant indépendante de g , sur Mars la tartine atterrit aussi du côté beurré.

10. Le glissement de la tartine au début s'effectue sur un temps très court donc ne modifie pas le temps de chute de la tartine. En revanche, s'il y a frottement, ceci diminue l'énergie totale de la tartine, ce qui diminue ω , donc η_{\min} augmente : la tartine aura encore plus de chance de retomber du côté beurré.

Problème 4 : Oscillations d'une barre sur des rails (ATS 2006)

A- Une barre de masse m peut glisser sans frottement sur deux rails parallèles. Les deux rails et la barre forment un plan horizontal. Les seuls mouvements possibles de la barre sont des translations rectilignes parallèlement à la direction des rails notée Ox (l'axe Oz est vertical vers le haut). La barre est liée à un ressort de raideur k . L'origine des abscisses est choisie lorsque le ressort est au repos.

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A l'instant initial on lâche la barre sans vitesse initiale à l'abscisse $x(0) = a$ avec $a > 0$.



1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement par l'application de théorème de la résultante dynamique.
2. Déterminer l'expression de l'abscisse x de la barre en fonction du temps t .
3. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique de la barre en fonction du temps.
4. Montrer, qu'en moyenne sur une période, l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle élastique.

B- On reprend le problème précédent mais, cette fois, on suppose que la barre subit une force de frottement visqueux $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où \vec{v} est le vecteur vitesse de la barre et α un coefficient positif.

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$.

5. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
6. On suppose $\lambda \ll \omega_0$. Déterminer l'expression de l'abscisse x de la barre en fonction du temps t .
7. Représenter l'allure du graphe de x en fonction de t .
8. Montrer que l'énergie mécanique de la barre peut se mettre, avec la condition $\lambda \ll \omega_0$, sous la forme

approchée : $E_m = \frac{1}{2}ka^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$. On donnera l'expression de τ .

Solution

1. On étudie le système {barre} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Elle subit : - son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ vertical ;

- les réactions \vec{R}_1 et \vec{R}_2 des rails (à chaque extrémités de la barre) verticales ;

- la force de rappel \vec{F}_r du ressort, puisque l'origine des abscisses est choisie lorsque le ressort est au repos, son allongement est x et $\vec{F}_r = -kxu_x$.

On repère le centre de gravité G de la barre via son abscisse x : $\vec{OG} = xu_x$, d'où $\vec{v}_G = \dot{x}u_x$ et $\vec{a}_G = \ddot{x}u_x$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la barre s'écrit : $m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{F}_r$.

En projetant sur l'axe Ox on obtient : $m\ddot{x} = -kx$, soit, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

2. La solution générale de cette équation différentielle se met sous la forme : $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

On en déduit $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$.

Les conditions initiales $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = 0$ donnent $A = a$ et $B = 0$, d'où $x(t) = a \cos(\omega_0 t)$.

Le mouvement de la barre est oscillatoire sinusoïdal de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

3. L'énergie mécanique de la barre E_m est la somme de son énergie cinétique E_c et de la somme des énergie potentielles E_p dont dérive les forces conservatives, soit $E_m = E_c + E_p$.

L'énergie cinétique E_c de la barre s'écrit, d'après le théorème de Koenig : $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + E_c^*$. L'énergie

cinétique barycentrique E_c^* est nulle car la barre glisse sur les rails, elle ne roule pas, d'où $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

Le mouvement de la barre étant horizontal \vec{P} ne travaille pas, et comme il n'y a pas de frottement \vec{R}_1 et \vec{R}_2 ne travaillent pas non plus, on peut donc associer à ces trois forces une énergie potentielle constante (que l'on choisi nulle).

La force de rappel du ressort travaille et on lui associe l'énergie potentielle élastique $\frac{1}{2}kx^2$.

Finalement : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$.

Remarque : avec $x(t) = a \cos(\omega_0 t)$ et $\dot{x}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t)$, on obtient en utilisant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: $E_m = \frac{1}{2}ka^2$.

On retrouve le fait que le système soit conservatif, ce qui est normal car on ne considère pas les frottements.

4. La valeur moyenne de l'énergie cinétique sur une période s'écrit : $\langle E_c \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E_c(t) dt$.

Avec $\dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t)$, on déduit $E_c = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 \sin^2(\omega_0 t)$, soit $\langle E_c \rangle = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t) dt$.

Or $\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{2}$, d'où $\langle E_c \rangle = \frac{1}{4}m\omega_0^2 a^2$.

De même $\langle E_p \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E_p(t) dt = \frac{1}{2}ka^2 \cdot \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{4}ka^2$.

Puisque $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ alors $k = m\omega_0^2$ et finalement $\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle$.

5. Au bilan des forces précédent il faut rajouter la force de frottement visqueux $\vec{F} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{u}_x$ et la projection du théorème de la résultante dynamique appliqué à la barre sur l'axe Ox s'écrit : $m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$.

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ on obtient : $\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$.

6. On cherche une solution exponentielle de la forme $x = Ae^{rt}$, en injectant dans l'équation différentielle on obtient l'équation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ de discriminant $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$.

Avec $\lambda \ll \omega_0$ ce discriminant s'écrit $\Delta = -4\omega_0^2 = (2j\omega_0)^2$ avec $j^2 = -1$.

Les solutions de l'équation caractéristique sont alors $r_1 = -\lambda - j\omega_0$ et $r_2 = -\lambda + j\omega_0$.

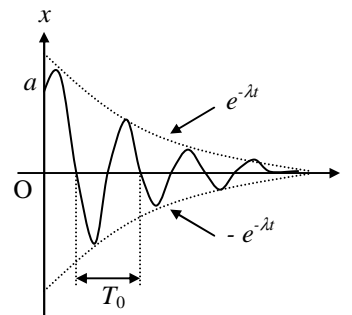
On en déduit $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\lambda t} (Ae^{-j\omega_0 t} + Be^{j\omega_0 t})$, ou bien $x(t) = e^{-\lambda t} (A' \cos(\omega_0 t) + B' \sin(\omega_0 t))$.

On en déduit $\dot{x}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} (A' \cos(\omega_0 t) + B' \sin(\omega_0 t)) + e^{-\lambda t} (-A' \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B' \omega_0 \cos(\omega_0 t))$.

Les conditions initiales $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = 0$ donnent $A' = a$ et $B' = \frac{\lambda a}{\omega_0}$.

Finalement $x(t) = ae^{-\lambda t} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{\lambda}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)$. Avec la condition $\lambda \ll \omega_0$, on obtient $\boxed{x(t) = ae^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t)}$.

7. L'allure du graphe de x en fonction de t est la suivante :
 On parle de régime transitoire pseudo-périodique.



8. De x on déduit $\dot{x} = a(-\lambda e^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t) - e^{-\lambda t} \omega_0 \sin(\omega_0 t)) = -a\omega_0 e^{-\lambda t} \left(\frac{\lambda}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) \right)$.

Avec la condition $\lambda \ll \omega_0$, on obtient : $\dot{x}(t) = -\omega_0 a e^{-\lambda t} \sin(\omega_0 t)$.

La force supplémentaire de frottement est non conservative et ne dérive donc pas d'une énergie potentielle,

l'énergie mécanique de la barre garde la forme : $E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$.

On en déduit $E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 e^{-2\lambda t} \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} ka^2 e^{-2\lambda t} \cos^2(\omega_0 t)$.

Or $k = m\omega_0^2$, donc $E_m = \frac{1}{2} ka^2 e^{-2\lambda t} (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t))$, soit $\boxed{E_m = \frac{1}{2} ka^2 e^{-2\lambda t}}$.

On obtient une expression de la forme $E_m = \frac{1}{2} ka^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\boxed{\tau = \frac{1}{2\lambda}}$.

A cause des frottements visqueux, l'énergie mécanique de la barre diminue exponentiellement au cours du temps.

Problème 5 : Quelques oscillations (Mines-Ponts 2008)

Lorsqu'une bille sphérique roule sur une piste de forme circulaire suspendue en un point, le couplage entre la bille et la piste engendre un mouvement spectaculaire, objet de ce problème.

Une sphère homogène, de centre C, de rayon r et de masse m , est mobile dans un plan vertical en restant en contact avec un rail PP', de masse M , que l'on modélise par une portion de cercle de centre O et de rayon R , dont l'axe de symétrie est vertical.

Le moment d'inertie de la sphère par rapport à un axe passant par C est $J = \frac{2}{5}mr^2$. Le référentiel fixe orthonormé direct $R_g = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ où \vec{u}_x est vertical dirigé vers le bas est supposé galiléen (voir figure 1). On pourra également utiliser les vecteurs mobiles polaires unitaires \vec{u}_r et \vec{u}_α représentés sur la figure 1.

Le mouvement de la sphère est repéré par deux paramètres : l'angle α que fait \vec{OC} avec \vec{u}_x et l'angle de rotation θ autour de l'axe horizontal qui porte \vec{u}_z .

A chaque instant t , on appelle I le point de contact de la sphère avec le rail. On note A le point du rail situé sur son axe de symétrie. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = g\vec{u}_x$.

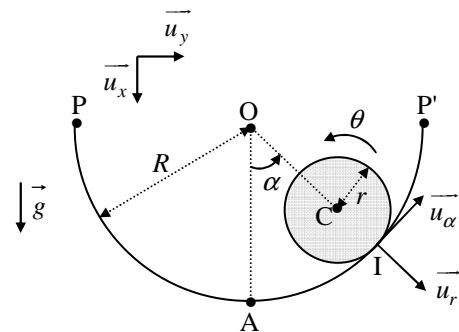


Figure 1 : sphère mobile sur un rail fixe

I – Rail fixe

La sphère roule sans glisser sur le rail fixe. Initialement, elle est au repos et \vec{OC} fait un angle α_0 avec \vec{u}_x . Le système comprend deux degrés de liberté cinématiques, α et θ .

1. Ecrire la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le rail sous la forme d'une relation linéaire liant r , R , $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$. Contrôler la pertinence de la relation obtenue, d'une part en comparant les signes respectifs de $\dot{\theta}$ et de $\dot{\alpha}$, et d'autre part en analysant la situation lorsque $r = R$.
2. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique totale E_t du système. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\alpha(t)$.
3. Déterminer la période T_{po} des petites oscillations.

On considère deux rails circulaires de même rayon R . Sur chaque rail, on place à l'instant initial une sphère de rayon r , de masse m en des points repérés par le même angle α_0 (situation déjà représentée sur la figure 1). Les sphères sont lâchées au même instant, avec une vitesse initiale nulle. Les deux rails sont de nature différente, de sorte que la première sphère roule sans glisser et que la seconde glisse sans rouler.

4. En utilisant des arguments énergétiques qualitatifs, déterminer quelle est la sphère qui arrive la première au point le plus bas A. Le résultat est-il modifié si les masses des sphères sont différentes ?
5. Etablir une expression intégrale du temps τ mis par la sphère la plus rapide pour atteindre le point A. Comment peut-on, sans calcul supplémentaire, obtenir le temps τ' mis par la sphère la plus lente pour atteindre ce point ? Déterminer le rapport $\frac{\tau'}{\tau}$.

II – Rail suspendu

Les points P et P' sont attachés en O par des fils inextensibles de masse négligeable, ce qui permet au rail d'osciller autour de l'axe horizontal passant par O. La position du milieu A du rail est repérée par l'angle β représenté sur la figure 2. Le centre de masse G du rail se trouve à chaque instant sur la droite OA à une distance ℓ de O. On note $J' = MR^2$ le moment d'inertie du rail par rapport à son axe de rotation. On appelle respectivement N et T les composantes de la force de réaction du rail sur la sphère au point I selon \vec{u}_r et \vec{u}_α . La sphère roule sans glisser sur le rail, qui est maintenant en forme de quart de cercle, les grandeurs α et θ sont les mêmes que celles utilisées dans la partie I.

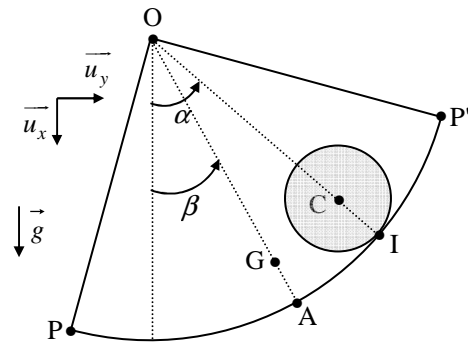


Figure 2 : sphère mobile sur un rail suspendu. Les angles α et β sont mesurés par rapport à la verticale et l'on note $|\overline{OG}| = \ell$.

II.A. – Description du mouvement

6. Ecrire la condition de roulement sans glissement reliant de $\dot{\theta}$, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.
7. Exprimer dans R_g le moment cinétique $\overline{\sigma_{IC}}$ de la sphère en C et en déduire l'expression du moment cinétique $\overline{\sigma_{IO}}$ de la sphère en O.
8. Exprimer dans R_g le moment cinétique $\overline{\sigma_{2O}}$ du rail en O.
9. Exprimer dans R_g , l'énergie cinétique E_{cS} de la sphère, l'énergie cinétique E_{cR} du rail et enfin l'énergie cinétique E_{cT} de l'ensemble rail-sphère.
10. Appliquer le théorème du moment cinétique en O à l'ensemble rail-sphère et en déduire une équation différentielle liant les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.
11. Appliquer le théorème du moment cinétique en C à la sphère seule et en déduire l'expression de T en fonction de $\dot{\theta}$, puis, en utilisant le résultat de la question 6, en fonction de $\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\beta}$.
12. Appliquer le théorème du moment cinétique en O au rail seul et en déduire la relation différentielle :

$$A\ddot{\beta} - B\ddot{\alpha} = -Mg\ell \sin \beta \quad (1)$$

On exprimera la constante A en fonction de M , m et R et la constante B en fonction de m , r et R .

13. Déduire des résultats précédents la relation :

$$A'\ddot{\alpha} - B'\ddot{\beta} = -mg(R-r)\sin \alpha \quad (2)$$

On exprimera la constante A' en fonction de m , r et R . Vérifier que l'équation (2) est en accord avec le résultat de la question 2.

14. Retrouvez les équations (1) et (2) à partir de considérations énergétiques. Démontrer que $AA' > B^2$.

15. Que traduit l'absence de termes en $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ dans les équations (1) et (2) ?

II.A. – Modes d'oscillation

On considère dans cette sous-partie que les angles α et β sont l'un et l'autre voisins de zéro, ce qui permet de linéariser les équations (1) et (2). On pose $D = Mg\ell$ et $D' = mg(R-r)$. On cherche les solutions du système linéarisé sous la forme

$$\alpha(t) = \text{Re}(\underline{\alpha}_0 e^{j\omega t}) \quad \text{et} \quad \beta(t) = \text{Re}(\underline{\beta}_0 e^{j\omega t}) \quad (3)$$

où $\underline{\alpha}_0$ et $\underline{\beta}_0$ sont deux nombres complexes, $j^2 = -1$.

On appelle pulsation propre du système tout réel positif ω qui permet d'obtenir des solutions *non nulles* du système linéarisé sous la forme (3).

16. Déterminer les pulsations propres ω_1 et ω_2 du système ($\omega_1 > \omega_2$) en fonction de A , A' , B , D et D' .

On considère dorénavant que les conditions initiales du système sont :

$$\alpha(t=0) = \alpha_0, \quad \beta(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\alpha}(t=0) = \dot{\beta}(t=0) = 0 \quad (4)$$

17. Montrer que si $\alpha_0 \neq 0$, la solution β du système linéarisé est une fonction de la forme :
 $\beta(t) = \eta [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]$. On ne cherchera pas forcément à déterminer la constante η en fonction des paramètres du système.

On réalise le montage expérimental de la figure 2 avec les paramètres physiques suivants : $r = 1,27 \cdot 10^{-2}$ m ,
 $R = 19 \cdot 10^{-2}$ m , $M = 90 \cdot 10^{-3}$ kg , $m = 67 \cdot 10^{-3}$ kg ,
 $\ell = 17,7 \cdot 10^{-2}$ m et $g = 9,81$ m · s⁻². On dispose d'un système de mesure qui permet d'enregistrer la valeur de l'angle β en fonction du temps. Pour des conditions initiales du type (4), avec α_0 suffisamment faible, on obtient l'enregistrement représenté sur la figure 3.

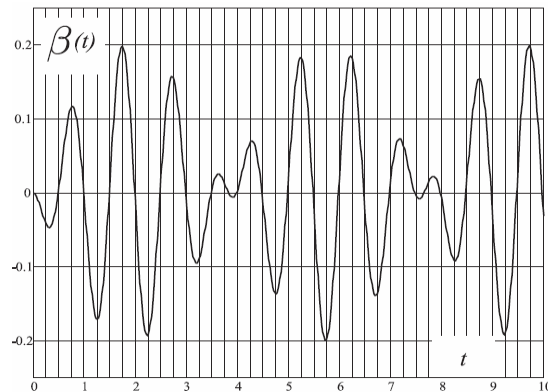


Figure 3 : enregistrement de β en radians en fonction de t en secondes

18. Déterminer à partir de la figure 3, une valeur approximative des pulsations propres du système expérimental. Cette estimation est-elle compatible avec les valeurs théoriques ?

Solution

I – Rail fixe

On étudie le mouvement de la sphère dans le référentiel R_g galiléen. Elle subit :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_x$;
- la réaction \vec{R} du rail.

1. La vitesse de glissement de la sphère sur le rail s'écrit $\vec{v}_g = \vec{v}_{I \in \text{sphère}} - \vec{v}_{I \in \text{rail}} = \vec{0}$ car il y a non glissement.

Or $\vec{v}_{I \in \text{rail}} = \vec{0}$ car le rail est fixe. La relation de Varignon donne $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} = \vec{v}_C + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI}$ avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ le

vecteur rotation de la sphère et $\vec{CI} = r\vec{u}_r$. De plus $\vec{v}_C = \frac{d\vec{OC}}{dt} = \frac{d}{dt}((R-r)\vec{u}_r) = (R-r)\dot{\alpha}\vec{u}_\alpha$.

Finalement la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le rail s'écrit $(R-r)\dot{\alpha} = -r\dot{\theta}$.

Puisque $R-r > 0$ alors $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$ sont de signe opposé, ce qui est cohérent puisque si la sphère roule vers la gauche en descendant alors $\dot{\theta} > 0$ et $\dot{\alpha} < 0$.

Si $r = R$ la sphère est de même taille que le rail et elle ne peut pas rouler sans glisser et $\dot{\theta} = 0$.

2. L'énergie mécanique totale de la sphère est $E_t = E_c + E_p$.

L'énergie cinétique s'écrit via le théorème de Koenig : $E_c = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J\Omega^2 = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5}mr^2\dot{\theta}^2$.

La condition de roulement sans glissement $r^2\dot{\theta}^2 = (R-r)^2\dot{\alpha}^2$ donne et finalement $E_c = \frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2$.

La réaction \vec{R} ne travaille pas puisqu'il y a roulement sans glissement, on peut lui affecter une énergie potentielle constante.

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_p = -mgx_C + cte$ puisque \vec{u}_x est descendant.

Finalement $E_p = -mg(R-r)\cos\alpha + cte$ et $E_t = \frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 - mg(R-r)\cos\alpha + cte$.

\vec{R} ne travaillant pas et \vec{P} étant conservatif, l'énergie mécanique totale de la sphère est stationnaire et $\frac{dE_t}{dt} = 0$.

Or $\frac{dE_t}{dt} = \frac{7}{10}m(R-r)^2 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mg(R-r)\dot{\alpha}\sin\alpha$ et on déduit l'équation différentielle vérifiée par la fonction

$\alpha(t)$:

$$\ddot{\alpha} + \frac{5g}{7(R-r)} \sin \alpha = 0.$$

3. Pour les oscillations de faible amplitude $\alpha \ll 1$ rad et $\sin \alpha \approx \alpha$ on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique $\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$ dont la solution générale est de la forme

$$\alpha(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t), \text{ ce mouvement est sinusoïdal de période } T_{po} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \text{ soit } T_{po} = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}.$$

4. Pour la sphère qui roule sans glisser : $\Delta E_t = 0 = \frac{7}{10} m(R-r)^2 \dot{\alpha}^2 - mg(R-r)(\cos \alpha - 1)$, d'où $\dot{\alpha}^2 = \frac{10g}{7(R-r)}(1 - \cos \alpha)$.

Pour la sphère qui glisse sans rouler : $\Delta E_t' = 0 = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \dot{\alpha}^2 - mg(R-r)(\cos \alpha - 1)$, d'où $\dot{\alpha}^2 = \frac{2g}{(R-r)}(1 - \cos \alpha)$.

Or $2 > \frac{10}{7}$ donc la sphère qui glisse va le plus vite et arrive la première au point le plus bas A.

On peut expliquer cela de la manière suivante : pour les deux sphères la variation d'énergie potentielle de pesanteur est la même.

Pour la sphère qui roule sans glisser la réaction ne travaille pas, l'énergie potentielle de pesanteur est convertie en énergie cinétique de translation et en énergie cinétique de rotation.

Pour la sphère qui glisse sans rouler la réaction ne travaille pas non plus sinon sa composante tangentielle la ferait rouler, l'énergie potentielle de pesanteur est convertie uniquement en énergie cinétique de translation, c'est donc elle qui va le plus vite et qui arrive la première au point le plus bas A.

Dans les deux cas $\dot{\alpha}^2(\alpha)$ ne dépend pas de la masse donc le résultat n'est pas modifié si les masses des sphères sont différentes.

5. Pour la sphère qui glisse sans rouler : $\dot{\alpha}^2 = \frac{2g}{(R-r)}(1 - \cos \alpha)$ et $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{(R-r)}(1 - \cos \alpha)}$ (car $\dot{\alpha} < 0$).

On en déduit $dt = -\sqrt{\frac{(R-r)}{2g(1 - \cos \alpha)}} d\alpha$ et en intégrant $\tau = -\int_{\alpha_0}^0 \sqrt{\frac{(R-r)}{2g(1 - \cos \alpha)}} d\alpha$ ou bien

$$\tau = \int_0^{\alpha_0} \sqrt{\frac{(R-r)}{2g(1 - \cos \alpha)}} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} f(\alpha_0).$$

De même pour la sphère qui roule sans glisser : $\tau' = \int_0^{\alpha_0} \sqrt{\frac{7(R-r)}{10g(1 - \cos \alpha)}} d\alpha = \sqrt{\frac{7}{10}} f(\alpha_0)$.

On en déduit : $\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{7}{5}}.$

II – Rail suspendu

II.A. – Description du mouvement

6. La vitesse de glissement de la sphère sur le rail s'écrit $\vec{v}_g = \vec{v}_{I \in \text{sphère}} - \vec{v}_{I \in \text{rail}} = \vec{0}$ car il y a non glissement.

La relation de Varignon donne $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} = \vec{v}_C + \vec{\Omega} \wedge \vec{CI}$ avec $\vec{v}_C = (R-r)\dot{\alpha} \vec{u}_\alpha$, $\vec{\Omega}_{\text{sphère}} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ le vecteur rotation de la sphère et $\vec{CI} = r \vec{u}_r$, soit $\vec{v}_{I \in \text{sphère}} = [(R-r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta}] \vec{u}_\alpha$.

Attention ici $\vec{v}_{I \in \text{rail}} \neq \vec{0}$ car le rail est mobile.

La relation de Varignon donne $\overline{v_{I \in \text{rail}}} = \overline{v_O} + \overline{\Omega_{\text{rail}}} \wedge \overline{OI}$ avec $\overline{v_O} = \vec{0}$ (O est fixe), $\overline{\Omega_{\text{rail}}} = \beta \overline{u_z}$ le vecteur rotation du rail et $\overline{OI} = R \overline{u_r}$, $\overline{v_{I \in \text{rail}}} = R \dot{\beta} \overline{u_\alpha}$.

Finalement la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le rail s'écrit $(R-r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta} = R\dot{\beta}$.

7. Le moment cinétique de la sphère en C est son moment cinétique barycentrique $\overline{\sigma_{1C}} = J \overline{\Omega_{\text{sphère}}}$, soit

$$\overline{\sigma_{1C}} = \frac{2}{5} m r^2 \dot{\theta} \overline{u_z}.$$

$\overline{\sigma_{1O}}$ s'écrit via le théorème de Koenig $\overline{\sigma_{1O}} = \overline{OC} \wedge m \overline{v_C} + \overline{\sigma_{1C}}$. Or $\overline{OC} = (R-r) \overline{u_r}$ et $\overline{v_C} = (R-r) \dot{\alpha} \overline{u_\alpha}$, d'où :

$$\overline{\sigma_{1O}} = \left[m(R-r)^2 \dot{\alpha} + \frac{2}{5} m r^2 \dot{\theta} \right] \overline{u_z}.$$

8. Le moment cinétique du rail en O est son moment cinétique barycentrique $\overline{\sigma_{2O}} = J' \overline{\Omega_{\text{rail}}}$, soit

$$\overline{\sigma_{2O}} = M R^2 \dot{\beta} \overline{u_z}.$$

9. L'énergie cinétique de la sphère s'écrit via le théorème de Koenig $E_{cS} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J \Omega_{\text{sphère}}^2$, soit :

$$E_{cS} = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{5} m r^2 \dot{\theta}^2.$$

L'énergie cinétique du rail est son énergie cinétique barycentrique $E_{cR} = \frac{1}{2} J' \Omega_{\text{rail}}^2$, soit : $E_{cR} = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\beta}^2$.

Finalement l'énergie cinétique de l'ensemble rail-sphère est $E_{cT} = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{5} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\beta}^2$.

10. L'ensemble rail-sphère subit son poids $\overline{P} = m g \overline{u_x} + M g \overline{u_x}$, les tensions des deux fils (dont le moment en O est nul) et les deux réactions en I qui s'annulent (forces intérieures).

Le moment en O du poids s'écrit (attention au point d'application de chaque poids) :

$$\begin{aligned} \overline{M_O}(\overline{P}) &= \overline{OC} \wedge m \overline{g} + \overline{OG} \wedge M \overline{g} \\ &= (R-r) (\cos \alpha \overline{u_x} + \sin \alpha \overline{u_y}) \wedge m g \overline{u_x} + \ell (\cos \beta \overline{u_x} + \sin \beta \overline{u_y}) \wedge M g \overline{u_x} \\ &= -(m g (R-r) \sin \alpha + M g \ell \sin \beta) \overline{u_z} \end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit $\frac{d\overline{\sigma_{1O}}}{dt} + \frac{d\overline{\sigma_{2O}}}{dt} = \overline{M_O}(\overline{P})$, on obtient alors :

$$m(R-r)^2 \ddot{\alpha} + \frac{2}{5} m r^2 \ddot{\theta} + M R^2 \ddot{\beta} = -m g (R-r) \sin \alpha - M g \ell \sin \beta$$

Or $(R-r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta} = R\dot{\beta}$, donc $\ddot{\theta} = \frac{R}{r} \ddot{\beta} - \left(\frac{R-r}{r}\right) \ddot{\alpha}$, et on obtient :

$$m(R-r) \left(R - \frac{7}{5} r \right) \ddot{\alpha} + \left(M R^2 + \frac{2}{5} m r R \right) \ddot{\beta} = -m g (R-r) \sin \alpha - M g \ell \sin \beta$$

11. Appliquons le théorème du cinétique en C à la sphère seule : $\frac{d\overline{\sigma_{1C}}}{dt} = \overline{M_C}(\overline{P}) + \overline{M_C}(\overline{R})$.

Or $\overline{\sigma_{1C}} = \frac{2}{5} m r^2 \dot{\theta} \overline{u_z}$, $\overline{M_C}(\overline{P}) = \overline{CC} \wedge m \overline{g} = \vec{0}$ et $\overline{M_C}(\overline{R}) = \overline{CI} \wedge \overline{R} = r \overline{u_r} \wedge (N \overline{u_r} + T \overline{u_\alpha}) = r T \overline{u_z}$, d'où $T = \frac{2}{5} m r \ddot{\theta}$.

Or $(R-r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta} = R\dot{\beta}$, d'où $\ddot{\theta} = \frac{R}{r} \ddot{\beta} - \left(\frac{R-r}{r}\right) \ddot{\alpha}$ et $T = \frac{2}{5} m \left[R \ddot{\beta} - (R-r) \ddot{\alpha} \right]$.

12. Le rail subit son poids $\overline{P} = M \overline{g}$, la réaction de la sphère $-\overline{R}$ et les tensions des deux fils. Appliquons le théorème du moment cinétique en O au rail seul :

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\sigma}_{20}}{dt} &= \overline{M}_O(\overline{P}) + \overline{M}_O(-\overline{R}) \\ &= \overline{OG} \wedge M\overline{g} + \overline{OI} \wedge (-\overline{R}) \\ &= \ell(\cos\beta\overline{u}_x + \sin\beta\overline{u}_y) \wedge Mg\overline{u}_x + R\overline{u}_r \wedge (-N\overline{u}_r - T\overline{u}_\alpha) \\ &= -Mg\ell \sin\beta\overline{u}_z - RT\overline{u}_z \end{aligned}$$

Avec $\overline{\sigma}_{20} = MR^2\dot{\beta}\overline{u}_z$ on obtient $MR^2\ddot{\beta} = -Mg\ell \sin\beta - RT$.

Or $T = \frac{2}{5}mr \left[\frac{R}{r}\dot{\beta} - \left(\frac{R}{r}-1\right)\dot{\alpha} \right]$, donc $MR^2\ddot{\beta} = -Mg\ell \sin\beta - R\frac{2}{5}mr \left[\frac{R}{r}\dot{\beta} - \left(\frac{R}{r}-1\right)\dot{\alpha} \right]$;

On obtient $\left(M + \frac{2}{5}m \right) R^2\ddot{\beta} - \frac{2}{5}mR(R-r)\dot{\alpha} = -Mg\ell \sin\beta$. Par identification : $A = \left(M + \frac{2}{5}m \right) R^2$ et

$$B = \frac{2}{5}mR(R-r).$$

13. On élimine $Mg\ell \sin\beta$ dans le résultat de la question 10 :

$$m(R-r) \left(R - \frac{7}{5}r \right) \dot{\alpha} + \left(MR^2 + \frac{2}{5}mrR \right) \dot{\beta} = -mg(R-r) \sin\alpha - Mg\ell \sin\beta$$

et celui de la question précédente $\left(M + \frac{2}{5}m \right) R^2\dot{\beta} - \frac{2}{5}mR(R-r)\dot{\alpha} = -Mg\ell \sin\beta$,

on déduit: $m(R-r) \left(R - \frac{7}{5}r \right) \dot{\alpha} + \left(MR^2 + \frac{2}{5}mrR \right) \dot{\beta} = -mg(R-r) \sin\alpha + \left(M + \frac{2}{5}m \right) R^2\dot{\beta} - \frac{2}{5}mR(R-r)\dot{\alpha}$,

soit $\frac{7}{5}m(R-r)^2\dot{\alpha} - \frac{2}{5}mR(R-r)\dot{\beta} = -mg(R-r) \sin\alpha$. Par identification : $A' = \frac{7}{5}m(R-r)^2$ et

$$B' = \frac{2}{5}mR(R-r).$$

Si le rail est fixe $\dot{\beta} = 0$ et on retrouve le résultat de la question 2.

14. Appliquons le théorème de l'énergie mécanique qui dit que la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique est égale à la puissance des forces non conservatives.

Au rail : $\frac{dE_{rR}}{dt} = P(-\overline{T})$. Or $E_{rR} = E_{cR} + E_{pR} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\beta}^2 - Mg\ell \cos\beta + cte$ et

$$P(-\overline{T}) = -\overline{T} \cdot \overline{v}_{1 \in \text{rail}} = -T\overline{u}_\alpha \cdot R\dot{\beta}\overline{u}_\alpha = -TR\dot{\beta}.$$

Or $T = \frac{2}{5}m \left[R\dot{\beta} - (R-r)\dot{\alpha} \right]$ et $P(-\overline{T}) = -\frac{2}{5}mR \left[R\dot{\beta}\dot{\beta} - (R-r)\dot{\beta}\dot{\alpha} \right]$.

$$\frac{dE_{rR}}{dt} = MR^2\dot{\beta}\ddot{\beta} + Mg\ell\dot{\beta} \sin\beta. \text{ On obtient bien, en simplifiant par } \dot{\beta}, \text{ le résultat de la question 12.}$$

De même pour la sphère : $\frac{dE_{tS}}{dt} = P(\overline{T}) = -\frac{2}{5}mR \left[R\dot{\beta}\dot{\beta} - (R-r)\dot{\beta}\dot{\alpha} \right]$.

Or $E_{tS} = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{5}mr^2\dot{\theta}^2 - mg(R-r) \cos\alpha + cte$ et

$$\frac{dE_{tS}}{dt} = m(R-r)^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{2}{5}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg(R-r)\dot{\alpha} \sin\alpha.$$

Avec $\dot{\theta} = \frac{R}{r}\dot{\beta} - \left(\frac{R-r}{r}\right)\dot{\alpha}$ et $\ddot{\theta} = \frac{R}{r}\ddot{\beta} - \left(\frac{R-r}{r}\right)\ddot{\alpha}$ et en simplifiant par $\dot{\alpha}$, on obtient bien le résultat de la question 13.

En reportant les expressions de A , A' et B : $AA' - B^2 = \left(M + \frac{2}{5}m \right) R^2 \cdot \frac{7}{5}m(R-r)^2 - \left(\frac{2}{5}mR(R-r) \right)^2$ on obtient :

$$AA' - B^2 = \frac{7}{5} MmR^2(R-r)^2 + \frac{2}{5} (mR(R-r))^2 = \frac{1}{5} mR^2(R-r)^2 (7M + 2m) \text{ et donc } \boxed{AA' > B^2}.$$

15. Les équations (1) et (2) ne contiennent pas de termes en $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ car on ne considère pas les frottements fluide.

II.A. – Modes d'oscillation

16. Puisque les angles α et β sont l'un et l'autre voisins de zéro on peut écrire $\sin \alpha = \alpha$ et $\sin \beta = \beta$.

En posant $D = Mg\ell$ et $D' = mg(R-r)$ on obtient le système :

$$\begin{cases} A\ddot{\beta} - B\ddot{\alpha} = -D\beta \\ A'\ddot{\alpha} - B'\ddot{\beta} = -D'\alpha \end{cases}$$

En utilisant les grandeurs complexes $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{\beta} = \underline{\beta}_0 e^{j\omega t}$ on obtient le système :

$$\begin{cases} (D - A\omega^2)\underline{\beta}_0 + B\omega^2\underline{\alpha}_0 = 0 \\ B\omega^2\underline{\beta}_0 + (D' - A'\omega^2)\underline{\alpha}_0 = 0 \end{cases}$$

On cherche des solutions non nulles pour ω , il faut que le déterminant du système soit nul, soit :

$$(D - A\omega^2)(D' - A'\omega^2) - B^2\omega^4 = 0, \text{ ou bien : } (AA' - B^2)\omega^4 - (A'D + AD')\omega^2 + DD' = 0.$$

Le discriminant de cette équation du 2nd degré en ω^2 est $\Delta = (A'D + D'A)^2 - 4(AA' - B^2)DD'$.

En développant et en refactorisant on peut écrire $\Delta = (A'D - D'A)^2 + 4B^2DD'$, d'où $\Delta > 0$.

On en déduit les deux solutions positives :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A'D + DA' + \sqrt{\Delta}}{2(AA' - B^2)}} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{A'D + DA' - \sqrt{\Delta}}{2(AA' - B^2)}} \text{ telles que}$$

$$\omega_1 > \omega_2.$$

17. Les solutions α et β sont des combinaisons linéaires des modes propres et on a donc :
 $\alpha = a \cos(\omega_1 t) + b \cos(\omega_2 t)$ et $\beta = a' \cos(\omega_1 t) + b' \cos(\omega_2 t)$.

Puisque $\beta(t=0) = 0$ alors $a' = -b' = \eta$ et $\boxed{\beta(t) = \eta [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]}$.

18. On peut aussi écrire $\beta(t) = 2\eta \sin\left(\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right) \sin\left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right)$ et on observe bien sur le graphe de la figure 3 un sinus modulant un autre sinus.

La plus petite période T_p correspond à la plus grande pulsation $T_p = 2\pi \frac{2}{\omega_1 + \omega_2}$ et on en compte 11 en 10 s,

d'où $T_p = 0,91 \text{ s}$ et $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 6,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

La plus grande période T_g correspond à la plus petite pulsation $T_g = 2\pi \frac{2}{\omega_1 - \omega_2}$ et on en compte 1 en 7,6 s,

d'où $T_g = 7,6 \text{ s}$ et $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = 0,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On obtient $\boxed{\omega_1^{\text{exp}} = 7,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$ et $\boxed{\omega_2^{\text{exp}} = 6,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$.

Avec les valeurs numériques données on obtient $\omega_1^{\text{th}} = 7,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_2^{\text{th}} = 5,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les estimations expérimentales sont compatibles avec les valeurs théoriques, l'écart doit sans doute provenir, d'une part de la linéarisation (il faut que $\theta < 11^\circ$ pour que $\sin \theta \approx \theta$) et des frottements visqueux qui ont été négligés.

Problème 6 : Etude d'un accélérographe mécanique (CCP 2008)

Le but du problème est d'étudier un accélérographe construit à l'aide d'un oscillateur mécanique. Les trois parties sont largement indépendantes.

Dans tout le problème on prendra pour l'intensité du champ de pesanteur terrestre $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

I. Etude sommaire

Dans un référentiel R galiléen muni du repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on considère un corps solide (S) de masse $m = 0,1 \text{ kg}$ et de centre d'inertie G pouvant se déplacer sans frottement solide le long de l'axe horizontal Ox (figure 1) ; G est relié au point E par un ressort de raideur k ; (S) est en outre soumis à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta \vec{v}_G$ où \vec{v}_G est la vitesse de G par rapport à E.

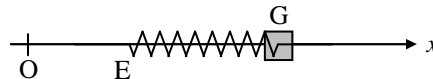


Figure 1

On repère la position de G par l'écart à la position d'équilibre ℓ_0 par la relation $x = EG - \ell_0$.

1. Détermination des caractéristiques de l'oscillateur

Dans un premier temps, E est fixe en O.

On écarte G de sa position d'équilibre vers la droite, d'une distance $x_0 = 10 \text{ cm}$ et on le lâche sans vitesse initiale.

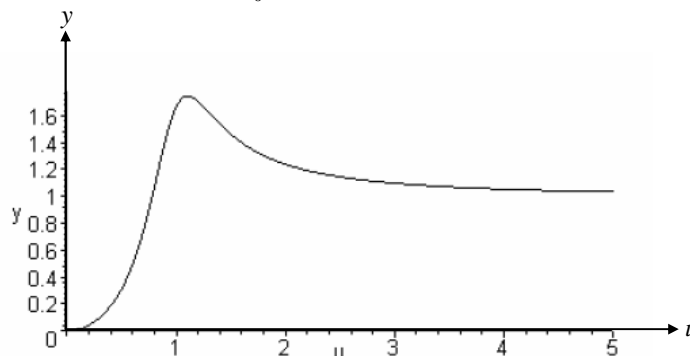
1. Déterminer l'équation du mouvement ; on posera $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\lambda = \frac{\beta}{m}$.
2. Déterminer $x(t)$ dans le cas d'un régime pseudo-périodique.
3. La durée séparant 10 passages de G par la position d'équilibre, de droite à gauche, est $\Delta t = 12 \text{ s}$. Par ailleurs, l'amplitude de la dixième oscillation est $x_1 = 7,5 \text{ cm}$.
 En déduire les valeurs de la pseudo-pulsation, de β et de k .

2. Mesure d'une accélération

Dans cette question le point E est solidaire d'un solide en vibration dans R. Sa position est donnée par $\vec{OE} = a \cos(\omega t) \vec{u}_x$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
2. Déterminer $x(t)$ en régime forcé (ou permanent).
3. Le tracé de l'amplitude X_0 des oscillations en fonction de la pulsation à l'allure suivante en coordonnées

réduites $y = \frac{X_0}{a}$ en fonction de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$:



Que représente le maximum de cette courbe ? Cette situation se présente-t-elle pour toute valeur du coefficient d'amortissement ?

Déduire graphiquement l'amplitude a dans le cas où, pour $\omega = 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, on mesure $X_0 = 0,2 \text{ cm}$.

4. Exprimer puis calculer la puissance moyenne dissipée par les frottements.

II. Amélioration du dispositif

Afin de se prémunir des inévitables frottements de glissement, le solide précédent est remplacé par une roue de rayon $a = 20 \text{ cm}$ qui peut rouler sur le plan horizontal (cf. figure 2). Le coefficient de frottement entre le plan et la roue est $f = 0,2$ supposé identique en régime statique et dynamique. On néglige le frottement visqueux. Le ressort de raideur $k = 22,2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur à vide ℓ_0 est relié au centre G de la roue, l'autre extrémité E étant fixe de sorte que EG est horizontal. La roue est libre de tourner autour de son axe Gy. Le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe est $J = \frac{1}{2}ma^2$. On note x l'abscisse de G, l'origine étant prise à la position d'équilibre: $x = EG - \ell_0$; la rotation de la roue dans R est repérée par un angle θ .

On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

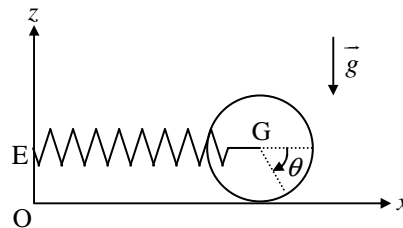


Figure 2

Initialement $x(0) = x_0$. L'ensemble est lâché sans vitesse initiale.

1. On suppose que le mouvement a lieu sans glissement

- Établir une relation entre les dérivées de x et de θ .
- Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de la roue dans R en fonction de $\frac{dx}{dt}$.
- Établir l'équation du mouvement vérifiée par $x(t)$ et la résoudre. On notera ω la pulsation des oscillations.
- Montrer que le mouvement s'effectue sans glissement si $x_0 < x_1$, x_1 étant à déterminer en fonction de f , g et ω_0 . Calculer la valeur de x_1 .

2. On se place dans le cas où $x_0 > x_1$ et on étudie la première phase de glissement

- Rappeler les lois de Coulomb pour le frottement solide, dans le cas du glissement.
- Déterminer l'équation du mouvement vérifiée par $x(t)$ et la résoudre. On exprimera $x(t)$ en fonction de x_1 , x_0 et ω_0 .
- Déterminer la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$.
- Déterminer la vitesse de glissement v_g en fonction de x_1 , x_0 et ω_0 .
- Pour des temps proches de zéro, donner une expression très simple de v_g . Commenter le signe de v_g .
- Donner l'équation que vérifie l'instant t_1 pour lequel le glissement se termine.

III. Accélération radiale d'un satellite

Un satellite, de masse m_s , de centre d'inertie S, est en orbite circulaire autour de la terre de centre O, sa période est $T_0 = 12$ h. Dans ce satellite un point matériel M de masse $m = 100$ g peut se déplacer sans frottements sur un axe Sx , fixe dans le satellite (cf. figure 3). En outre M est soumis à une force élastique qui dérive d'une énergie potentielle $E_p(x) = \frac{1}{2} m \omega_1^2 x^2$ avec $\omega_1 = 0,03 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\overline{SM} = x \overline{u}_x$.

Rayon de la terre $R = 6400$ km.

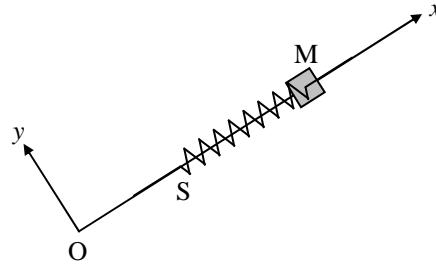


Figure 3

On pose $r_0 = OS$ et on désigne par R_s le référentiel lié au satellite muni du repère cartésien $(S, \overline{u}_x, \overline{u}_y, \overline{u}_z)$.

Le référentiel R_g géocentrique est supposé galiléen.

1.

- Déterminer la vitesse v_0 du satellite en fonction de r_0 , g et R .
- En déduire l'expression de T_0 en fonction de r_0 , g et R . Calculer numériquement r_0 , v_0 et la vitesse angulaire ω_0 du satellite dans R_g .

2. On étudie le mouvement de M dans le référentiel R_s

- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
- Donner une équation du mouvement approchée en considérant que $x \ll r_0$ en ne faisant intervenir que ω_0 , ω_1 , x et ses dérivées temporelles.
- Montrer que M oscille et que sa période d'oscillation n'est quasiment pas affectée par la révolution du satellite.
- Pourquoi ce dispositif est-il pertinent pour mesurer, s'il y a lieu, l'accélération radiale du satellite?

Solution

I. Etude sommaire

1. Détermination des caractéristiques de l'oscillateur

1. On étudie le système {S} dans le référentiel R supposé galiléen.

- Il subit :
- son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ vertical ;
 - la réaction \vec{R} de l'axe perpendiculaire à l'axe puisqu'il n'y a pas de frottement solide ;
 - la force de rappel \vec{F}_r du ressort dont l'allongement est x et $\vec{F}_r = -kx\vec{u}_x$;
 - la force de frottement visqueux $\vec{F}_f = -\beta\vec{v}_G$.

On repère le centre de gravité G du système via son abscisse x : $\overline{OG} = (OE + x + \ell_0)\vec{u}_x$, d'où $\vec{v}_G = \dot{x}\vec{u}_x$ et $\vec{a}_G = \ddot{x}\vec{u}_x$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système s'écrit : $m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_f + \vec{F}_r$.

En projetant sur l'axe Ox on obtient : $m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx$.

En posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\lambda = \frac{\beta}{m}$, il vient : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

2. On cherche une solution exponentielle de la forme $x(t) = Ae^{rt}$, en injectant dans l'équation différentielle on obtient l'équation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ de discriminant $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$.

Dans le cas d'un régime pseudo-périodique $\Delta < 0$ et on note $\Delta = -4\omega^2$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

Les solutions de l'équation caractéristique sont alors $r_1 = -\lambda - j\omega$ et $r_2 = -\lambda + j\omega$.

On en déduit $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\lambda t} (Ae^{-j\omega t} + Be^{j\omega t})$, ou bien $x(t) = e^{-\lambda t} (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t))$.

On en déduit $\dot{x}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)) + e^{-\lambda t} (-A' \omega \sin(\omega t) + B' \omega \cos(\omega t))$.

Les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ donnent $A' = x_0$ et $B' = \frac{\lambda x_0}{\omega}$.

Finalement $x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right)$.

3. Dix passages de G par la position d'équilibre, de droite à gauche, correspondent à 9 pseudo-périodes, soit $T = \frac{\Delta t}{9} = 1,33$ s. Puisque $\omega = \frac{2\pi}{T}$ on déduit $\omega = 4,71$ rad · s⁻¹.

De plus $x_1 = x(9T) = x_0 e^{-9\lambda T}$, soit $\lambda = \frac{1}{9T} \ln \left(\frac{x_0}{x_1} \right)$, d'où $\lambda = 0,024$ s⁻¹.

Or $\beta = 2\lambda m$ d'où $\beta = 4,79 \cdot 10^{-3}$ kg · s⁻¹. De plus $k = m\omega_0^2 = m\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}$, soit $k = 2,22$ N · m⁻¹.

2. Mesure d'une accélération

1. Dans cette question le point E est mobile et $\overline{OG} = (OE + x + \ell_0) \overline{u_x} = (a \cos(\omega t) + x + \ell_0) \overline{u_x}$, d'où $\overline{v_G} = (-a\omega \sin(\omega t) + \dot{x}) \overline{u_x}$ et $\overline{a_G} = (-a\omega^2 \cos(\omega t) + \ddot{x}) \overline{u_x}$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système en projection sur l'axe Ox s'écrit alors :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = a\omega^2 \cos(\omega t)$$

2. Pour déterminer $x(t)$ en régime forcé on utilise la méthode des amplitudes complexes et on cherche une solution de la forme $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ à laquelle on associe la quantité complexe $\underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ qui vérifie $\ddot{\underline{x}} + 2\lambda\dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = a\omega^2 e^{j\omega t}$. En remplaçant on obtient : $-\omega^2 \underline{x} + 2\lambda j\omega \underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = a\omega^2 e^{j\omega t}$, ou bien

$$X_0 e^{j\varphi} = \frac{a\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\lambda\omega} . \text{ On en déduit } X_0 = \frac{a\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}} \text{ et } \varphi = \arctan \left(\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right).$$

Finalement : $x(t) = \frac{a\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}} \cos \left(\omega t + \arctan \left(\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right)$.

3. La fonction tracée est $y(u) = \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)^2 + Q^2 u^2}}$ avec $Q = \frac{2\lambda}{\omega_0}$.

Le maximum de cette courbe représente le phénomène de résonance en élongation de l'oscillateur.

Un calcul un peu long donne : $\frac{dy}{du} = \frac{2u \left(1 + u^2 \left(\frac{Q^2}{2} - 1 \right) \right)}{\left[(1-u^2)^2 + Q^2 u^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$, cette dérivée s'annule en changeant de signe, c'est-à-

dire passe par un maximum si $Q < \sqrt{2}$.

Or $Q = \frac{2\lambda}{\omega_0}$, le phénomène de résonance n'a lieu que si $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

$\omega = 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $X_0 = 0,2 \text{ cm}$ correspondent sur la courbe à $u = 1,485$ et $y = 1,45$, on en déduit $a = 0,14 \text{ cm}$.

4. La puissance de la force de frottement est :

$$P_f = \vec{F}_f \cdot \vec{v}_G = -\beta v_G^2 = -\beta(-a\omega \sin(\omega t) + \dot{x})^2 = -\beta(-a\omega \sin(\omega t) - X_0\omega \sin(\omega t + \varphi))^2$$

La puissance moyenne dissipée par les frottements s'écrit donc en développant :

$$P_{\text{moy}} = -\beta\omega^2 \left(a^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle + 2aX_0 \langle \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) \rangle + X_0^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle \right).$$

Or $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$ et $\langle \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{\cos \varphi}{2}$.

Finalement $P_{\text{moy}} = -\frac{1}{2} \beta \omega^2 (a^2 + 2aX_0 \cos(\varphi) + X_0^2)$ et $P_{\text{moy}} = 5,3 \text{ mW}$.

II. Amélioration du dispositif

1. On suppose que le mouvement a lieu sans glissement

1. 1. On étudie le système {roue} dans le référentiel R supposé galiléen.

Il subit : - son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ vertical ;

- la réaction \vec{R} du plan ;

- la force de rappel \vec{F}_r du ressort dont l'allongement est x et $\vec{F}_r = -kx\vec{u}_x$;

Puisque le mouvement a lieu sans glissement la vitesse de glissement est nulle.

La vitesse de glissement s'écrit $\vec{v}_g = \vec{v}(I \in \text{roue}) - \vec{v}(I \in \text{plan})$ où I est le point de contact entre la roue et le plan.

Or $\vec{v}(I \in \text{plan}) = \vec{0}$ car le plan est fixe. D'après la relation de Varignon : $\vec{v}_1 = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI}$, avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_y$ et

$\vec{GI} = -a\vec{u}_z$. De plus $\vec{OG} = (x + \ell_0)\vec{u}_x + a\vec{u}_y$ et $\vec{v}_G = \dot{x}\vec{u}_x$.

D'où $\vec{v}_1 = \dot{x}\vec{u}_x + (\dot{\theta}\vec{u}_y) \wedge (-a\vec{u}_z) = (\dot{x} - a\dot{\theta})\vec{u}_x$. On obtient alors $\dot{x} = a\dot{\theta}$.

2. L'énergie cinétique de la roue s'écrit, d'après le théorème de Koenig, $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + E_c^*$ avec $E_c^* = \frac{1}{2}J\Omega^2$.

D'où $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$. Avec $J = \frac{1}{2}ma^2$ et $\dot{x} = a\dot{\theta}$ on obtient : $E_c = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$.

3. La réaction du plan \vec{R} ne travaille pas car il y a roulement sans glissement. Le poids et la force de rappel du ressort sont des forces conservatives donc le système est conservatif, son énergie mécanique se conserve au cours du temps. L'énergie potentielle de pesanteur est constante puisque G évolue à altitude constante, l'énergie

potentielle élastique emmagasinée par le ressort s'écrit $E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2$.

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit donc $E_c + E_{p_e} = cte$, soit $\frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte$.

En dérivant par rapport au temps on obtient $\frac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$ et l'équation différentielle du mouvement est de la

forme $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ avec $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$ ou bien $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0$.

La solution de cette équation différentielle est de la forme $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$.

$x(0) = x_0 \Rightarrow A = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, d'où $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$.

4. Soit $\vec{R} = T\vec{u}_x + N\vec{u}_z$ la réaction du plan.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système s'écrit : $m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_r$.

En projetant sur les axes Ox et Oz on obtient : $\begin{cases} m\ddot{x} = T - kx \\ 0 = N - mg \end{cases}$.

On déduit alors, puisque $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $T = (k - m\omega^2)x = \frac{1}{3}kx$ et $N = mg$.

Tant qu'il y a non glissement la loi de Coulomb indique $|T| < fN$, soit $\frac{1}{3}kx < fmg$, soit $x < \frac{3fmg}{k} = \frac{3fg}{\omega_0^2}$.

On en déduit que le mouvement s'effectue sans glissement si $x_0 < x_1$, avec $x_1 = \frac{3fg}{\omega_0^2}$, soit $x_1 = 1,2 \cdot 10^{-4}$ m.

2. On se place dans le cas où $x_0 > x_1$ et on étudie la première phase de glissement

1. Les lois de Coulomb pour le frottement solide, dans le cas du glissement, s'écrivent :

On décompose la réaction \vec{R} en deux composantes, tangentielle \vec{T} et normale \vec{N} , telles que $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$.

On a alors : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$, $\vec{T} \cdot \vec{v}_g \leq 0$ et $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0}$.

2. D'après la question 1.4. on a toujours :
$$\begin{cases} m\ddot{x} = T - kx \\ 0 = N - mg \end{cases}$$

Puisqu'il y a glissement $|T| = fN = fmg$.

Or $\vec{v}_g = (\dot{x} - a\dot{\theta})\vec{u}_x$ et $\dot{x}(0) = 0$, donc initialement \vec{v}_g est suivant $-\vec{u}_x$ et par conséquent \vec{T} est suivant $+\vec{u}_x$, on peut alors écrire $T = fmg > 0$.

L'équation différentielle du mouvement est donc $m\ddot{x} + kx = fmg$.

Avec $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ et $fmg = \frac{\omega_0^2}{3}x_1$, on obtient $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\omega_0^2}{3}x_1$.

La solution de cette équation différentielle est de la forme $x(t) = \frac{x_1}{3} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

$x(0) = x_0 \Rightarrow A = x_0 - \frac{x_1}{3}$ et $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, d'où $x(t) = \frac{x_1}{3} + \left(x_0 - \frac{x_1}{3}\right) \cos(\omega_0 t)$.

3. Appliquons le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique : $\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \sum \overline{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}})$ dans le référentiel barycentrique.

Puisque \vec{P} et \vec{F}_r s'appliquent en G alors $\overline{M}_G(\vec{P}) = \overline{M}_G(\vec{F}_r) = \vec{0}$.

Puisque \vec{R} s'applique en I : $\overline{M}_G(\vec{R}) = \overline{GI} \wedge \vec{R} = -a\vec{u}_z \wedge (T\vec{u}_x + N\vec{u}_z) = -aT\vec{u}_y$.

Le moment cinétique barycentrique du solide s'écrit $\vec{\sigma}^* = J\vec{\Omega} = J\dot{\theta}\vec{u}_y$.

On en déduit $J\ddot{\theta} = -aT$. Or $J = \frac{1}{2}ma^2$ et $T = fmg = m\frac{\omega_0^2}{3}x_1$, soit $\ddot{\theta} = -\frac{2\omega_0^2 x_1}{3a}$.

En intégrant par rapport au temps on obtient $\dot{\theta} = -\frac{2\omega_0^2 x_1}{3a}t$ (pas de constante puisque l'ensemble est lâché sans vitesse initiale).

4. La vitesse de glissement est $\vec{v}_g = v_g \vec{u}_x = (\dot{x} - a\dot{\theta})\vec{u}_x$.

Or $\dot{x} = -\omega_0 \left(x_0 - \frac{x_1}{3}\right) \sin(\omega_0 t)$ et $\dot{\theta} = -\frac{2\omega_0^2 x_1}{3a}t$, d'où $v_g = -\omega_0 \left(x_0 - \frac{x_1}{3}\right) \sin(\omega_0 t) + \frac{2\omega_0^2 x_1}{3}t$.

5. Pour des temps proches de zéro $\sin(\omega_0 t) \approx \omega_0 t$ et $v_g \approx (x_1 - x_0)\omega_0^2 t$.

On a alors $v_g < 0$, et donc $T > 0$, la roue tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et se déplace vers la gauche.

6. Le glissement se termine à l'instant t_1 tel que $v_g(t_1) = 0$ et t_1 vérifie l'équation :

$$\left(x_0 - \frac{x_1}{3}\right) \sin(\omega_0 t_1) = \frac{2\omega_0 x_1}{3} t_1$$

III. Accélération radiale d'un satellite

1.

1. On étudie le satellite dans référentiel R_g géocentrique galiléen, il subit seulement la force gravitationnelle de la Terre :

$$\vec{F}_g = -\frac{mM_T G}{r_0^2} \vec{u}_r \text{ avec } M_T \text{ la masse de la Terre et } G \text{ la constante de gravitation universelle.}$$

Son mouvement étant circulaire son accélération s'écrit $\vec{a} = -m \frac{v_0^2}{r_0} \vec{u}_r$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au satellite s'écrit, en projection sur \vec{u}_r , $-m \frac{v_0^2}{r_0} = -\frac{mM_T G}{r_0^2}$,

d'où $v_0 = \sqrt{\frac{M_T G}{r_0}}$. La force gravitationnelle de la Terre s'écrit au niveau de la surface terrestre

$$\vec{F}_g = -\frac{mM_T G}{R^2} \vec{u}_r = -mg \vec{u}_r, \text{ d'où } M_T G = gR^2. \text{ Finalement : } v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}.$$

$$2. \text{ La période de révolution du satellite est } T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0}, \text{ soit } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{gR^2}}.$$

$$\text{On en déduit } r_0 = \left(\frac{gR^2 T_0^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ soit } r_0 = 26672 \text{ km}, \text{ on en déduit } v_0 = 3879 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{La vitesse angulaire } \omega_0 \text{ du satellite dans } R_g \text{ est } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \text{ soit } \omega_0 = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. On étudie le mouvement de M dans le référentiel R_s

1. Le référentiel R_s est non galiléen et le point M est soumis à :

- la force gravitationnelle de la Terre $\vec{P} = -\frac{mgR^2}{(r_0+x)^2} \vec{u}_x$;

- la force élastique $\vec{F}_e = -m\omega_1^2 x \vec{u}_x$ (car elle dérive de $E_p(x) = \frac{1}{2} m\omega_1^2 x^2$) ;

- la réaction \vec{R} de l'axe Ox ;

- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega_0^2 \vec{OM} = m\omega_0^2 (r_0+x) \vec{u}_x$;

- la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega}_0 \wedge \vec{v} = -2m\omega_0 \vec{u}_z \wedge \dot{x} \vec{u}_x = -2m\omega_0 \dot{x} \vec{u}_y$.

Le vecteur accélération de M est $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au point M donne, en projection sur \vec{u}_x et en simplifiant par

$$m, \text{ l'équation différentielle du mouvement : } \ddot{x} = -\frac{gR^2}{(r_0+x)^2} - \omega_1^2 x + \omega_0^2 (r_0+x).$$

$$2. \text{ Avec } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0^3}}, \text{ le terme gravitationnel s'écrit } \frac{gR^2}{(r_0+x)^2} = \frac{\omega_0^2 r_0}{\left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^2} \approx \omega_0^2 r_0 \left(1 - 2\frac{x}{r_0}\right) = \omega_0^2 r_0 - 2\omega_0^2 x,$$

$$\text{et l'équation différentielle se simplifie : } \ddot{x} + (\omega_1^2 - 3\omega_0^2)x = 0.$$

$$3. \omega_1 = 0,03 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } \omega_0 = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ de sorte que } \omega_1^2 - 3\omega_0^2 = 8,94 \cdot 10^{-4} \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2} \approx \omega_1^2. \\ \omega_1^2 - 3\omega_0^2 > 0 \Rightarrow M \text{ oscille.}$$

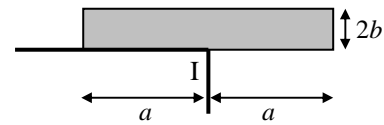
$\omega_1^2 - 3\omega_0^2 \approx \omega_1^2 \Rightarrow$ sa période d'oscillation n'est quasiment pas affectée par la révolution du satellite.

4. Si le satellite possède une accélération radiale a_r , l'équation différentielle précédente devient $\ddot{x} + (\omega_1^2 - 3\omega_0^2)x = -a_r$. Dans les cas où a_r est constant ou sinusoïdal la solution particulière de l'équation différentielle permet d'accéder à la mesure de a_r .

Problème 7 : Chute d'une tartine beurrée 2 (ESIM 1999)

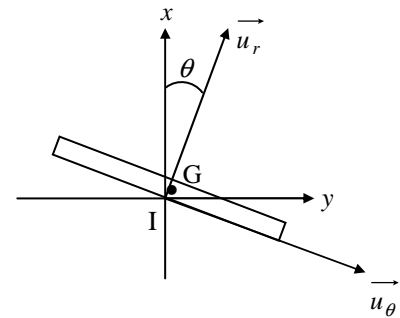
Ce problème propose une étude simplifiée de la chute d'une tartine beurrée posée sur le bord d'une table afin de déterminer la face qui rencontre le sol. Pourquoi est-ce toujours la face beurrée ?

I/ Une tartine modélisée par un parallélépipède rectangle droit, homogène, de dimensions $2a$, $2b$ et $2c$, de centre d'inertie G , de masse m , est posée sur le bord d'une table dans la position du schéma (G à la verticale de I).



Dans cette position instable, elle subit une action très faible qui provoque son basculement autour de I , sans lui donner de vitesse initiale. On n'admettra qu'au début du mouvement il n'y a pas de glissement en I .

L'action de la table sera représentée par une force $\vec{R} = T\vec{u}_\theta + N\vec{u}_r$, orthogonale à l'arête du coin, dans le plan contenant G .



Soit (Δ) l'axe parallèle au coin de la table passant par I , le moment

d'inertie de la tartine par rapport à cet axe est $I_{(\Delta)} = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$.

1. La tartine est-elle un système conservatif ?
2. Déterminer $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de θ . En déduire $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ en fonction de θ .
3. Ecrire le théorème de la résultante dynamique. En déduire T et N en fonction de θ .

Application numérique : $a = 4$ cm et $b = 0,4$ cm . Représenter $-\frac{T}{mg}$ et $\frac{N}{mg}$ en fonction de θ .

4. La tartine peut-elle quitter le coin de la table sans glisser ?
5. La tartine commence à glisser pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. Evaluer le coefficient de frottement f .

On s'intéresse maintenant à la chute de la tartine. A partir du moment où elle commence à glisser, la tartine quitte très rapidement la table et se trouve en chute libre à partir de $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

6. Déterminer $\frac{d\theta}{dt}(\theta_0)$.

On néglige les frottements de l'air.

7. Montrer que la vitesse de rotation reste constante.
8. Déterminer l'équation du mouvement de G en fonction du temps. En déduire le temps de chute si la hauteur de la table est h .
9. Quel est l'angle dont a tourné la tartine lorsqu'elle heurte le sol ?

Application numérique : $h = 70$ cm . Conclusion ?

10. Pour quelle hauteur de la table la tartine ne tombe-t-elle plus sur le côté beurré ? Quelle serait la taille du géant qui utiliserait cette table ?

Solution

On étudie le mouvement d'une tartine beurrée dans le référentiel terrestre galiléen. Elle subit son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ uniforme et vertical (qui s'applique en G) et la réaction $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ de l'arête de la table (qui s'applique en I, point de contact entre la tartine et le coin de la table).

1. Le poids \vec{P} est une force conservative. Puisqu'il y a non glissement la puissance des actions de contact est nulle, \vec{R} ne travaille pas. On en déduit que l'énergie mécanique totale de la tartine se conserve.

2. L'énergie mécanique de la tartine s'écrit : $E_m = E_c + E_p$.

Le mouvement de la tartine est une rotation autour d'un axe fixe passant par G donc $E_c = E_c^* = \frac{1}{2} I \Omega^2$ où $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de la tartine : $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ (\vec{u}_z le vecteur de base perpendiculaire au plan de la figure), soit $E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$.

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_p = -m\vec{g} \cdot \vec{IG} + cte$, soit :

$$E_p = -m(-g\vec{u}_x) \cdot (b \cos \theta \vec{u}_x + b \sin \theta \vec{u}_y) + cte = mgb \cos \theta + cte.$$

Finalement $E_m = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + mgb \cos \theta + cte$.

Puisque E_m se conserve : $E_m(\theta) = E_m(\theta = 0)$, soit $\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + mgb \cos \theta + cte = mgb + cte$.

On en déduit $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2mgb(1 - \cos \theta)}{I}}$.

Dérivons la relation $\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + mgb \cos \theta = mgb$ par rapport au temps : $\frac{1}{2} I \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgb\dot{\theta} \sin \theta = 0$.

On obtient alors $\ddot{\theta} = \frac{mgb \sin \theta}{I}$.

3. Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la tartine dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit $m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R}$. Dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\vec{a}_G = \frac{d^2 \vec{IG}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (b\vec{u}_r) = b(-\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ddot{\theta} \vec{u}_\theta), \vec{P} = -mg\vec{u}_x = mg(-\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \text{ et } \vec{R} = N\vec{u}_r + T\vec{u}_\theta.$$

En projetant sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ on obtient $\begin{cases} -mb\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N \\ mb\ddot{\theta} = mg \sin \theta + T \end{cases}$.

Avec $\dot{\theta}^2 = \frac{2mgb(1 - \cos \theta)}{I}$, $\ddot{\theta} = \frac{mgb \sin \theta}{I}$ et $I = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$, on obtient :

$$T = mg \left(\frac{2b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \right) \sin \theta \text{ et } N = mg \left[\left(\frac{a^2 + 7b^2}{a^2 + b^2} \right) \cos \theta - \frac{6b^2}{a^2 + b^2} \right].$$

Application numérique : $a = 4 \text{ cm}$ et $b = 0,4 \text{ cm}$. On a alors $a^2 = 100b^2$.

On a alors $\frac{T}{mg} = -\frac{98}{101} \sin \theta \approx -\sin \theta$ et $\frac{N}{mg} = \frac{107 \cos \theta - 6}{101} \approx \cos \theta$.

On représente les normes des composantes en fonction de θ :

4. La tartine quitte la table en θ_d appelé angle de décrochage, tel que

$$N(\theta_d) = 0, \text{ soit } \theta_d = \text{Arc cos} \frac{6}{107} = 86,8^\circ.$$

La tartine commence à glisser en θ_g quand $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$, ou bien

$$-T = fN \text{ c'est-à-dire } \frac{98}{101} \sin \theta_g = f \left(\frac{107}{101} \cos \theta_g - \frac{6}{101} \right).$$

Graphiquement on observe $\theta_g < \theta_d$, le glissement apparaît avant le décrochage, donc la tartine ne peut pas quitter le coin de la table sans glisser.

5. On remarque que $\frac{98}{101} \sin \theta_g \approx f \left(\frac{107}{101} \cos \theta_g - \frac{6}{101} \right)$ s'écrit $\sin \theta_g \approx f \cos \theta_g$, ou bien $f \approx \tan \theta_g$.

Puisque $\theta_g = \frac{\pi}{4}$, on en déduit $f \approx 1$.

6. Avec $\dot{\theta}^2 = \frac{2mgb(1-\cos \theta)}{I}$ et $I = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$, on obtient : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{6bg}{a^2 + b^2}(1-\cos \theta)}$.

En $\theta = \theta_0$: $\dot{\theta}(\theta_0) = \sqrt{\frac{6bg}{a^2 + b^2}(1-\cos \theta_0)}$.

Avec $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ et $a^2 = 100b^2$, $\dot{\theta}(\theta_0) = \sqrt{\frac{6g}{101b} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = 6,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

7. Lors de sa chute la tartine n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_x$ (qui s'applique en G).

Le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique s'écrit $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$.

On en déduit $\vec{\sigma}_G = cte$. Or $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}^* = I\vec{\omega}$, d'où $\omega = \dot{\theta} = cte = \dot{\theta}(\theta_0)$, la vitesse de rotation de la tartine reste constante.

8. On considère la chute libre de la tartine et on repère son centre de gravité G.

L'altitude initiale de G est $x_0 = b - b \sin \theta_0 = 0,12 \text{ cm}$. Son vecteur vitesse initial : $\vec{v}_0 = b\dot{\theta}_0\vec{u}_\theta$, soit $v_0 = b\dot{\theta}_0 = 0,026 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. z_0 est négligeable devant la hauteur de chute $h = 70 \text{ cm}$ et v_0 est négligeable devant la vitesse en fin de chute de l'ordre de $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

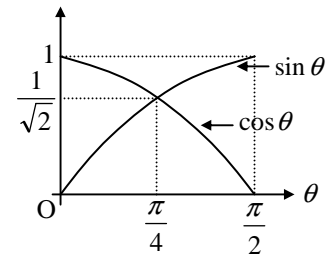
On en déduit que l'on peut considérer la chute libre verticale avec, pour G, position initiale nulle et vitesse initiale nulle.

La tartine n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_x$.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la tartine dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit

$$m\vec{a}_G = \vec{P}.$$

Avec $\vec{a}_G = \ddot{x}\vec{u}_x$ on obtient $\ddot{x} = -g$. En intégrant $\dot{x} = -gt$ et $x = -\frac{gt^2}{2}$.



Le temps de chute τ de la tartine est tel que $x(\tau) = -h$, soit $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $\tau = 0,37$ s.

9. Puisque $\omega = \dot{\theta} = cte = \dot{\theta}_0$, on en déduit en intégrant : $\theta = \dot{\theta}_0 t + \theta_0$.

A la fin du mouvement $\theta_f = \dot{\theta}_0 \tau + \theta_0$.

Lorsque la tartine heurte le sol elle a tourné d'un angle $\theta_f = 3,25$ rad = 186°23'33''.

Cet angle est légèrement supérieur à π , la tartine fait plus d'un demi-tour mais moins d'un tour.

On en déduit qu'elle tombe sur le côté beurré.

10. Pour que la tartine arrive côté non-beurré il faut qu'elle tourne de $\theta'_f = 2\pi - \theta_0$, ce qui correspond à un

temps de chute τ' tel que $\dot{\theta}_0 \tau' + \theta_0 = 2\pi - \theta_0$, soit $\tau' = \frac{2(\pi - \theta_0)}{\dot{\theta}_0} = 0,71$ s.

Ce temps de chute correspond à une hauteur de chute $h' = \frac{g}{2} \tau'^2 = 2,55$ m.

Si une personne de 1,80 m utilise une table de 0,7 m, une règle de 3 nous permet de déduire qu'une table de 2,55

m est utilisée par une personne de $\frac{1,8 \times 2,55}{0,7} = 6,56$ m.

Le géant qui utiliserait la table suffisamment haute pour que la tartine tombe sur le côté non-beurré mesure plus de $\boxed{6 \text{ m } 50}$!!