PCSI 1 (O.Granier)

Lycée
Clemenceau

Les miroirs sphériques (approximation de Gauss)

Olivier GRANIER

Télescopes, lunettes astronomiques, jumelles, appareils photos, photocopieurs, microscopes, …

Comment réaliser des images avec ces instruments ?

On se place dans le cadre de l'approximation de Gauss

(conditions de Gauss)

Le but de ce chapitre (puis du suivant) :

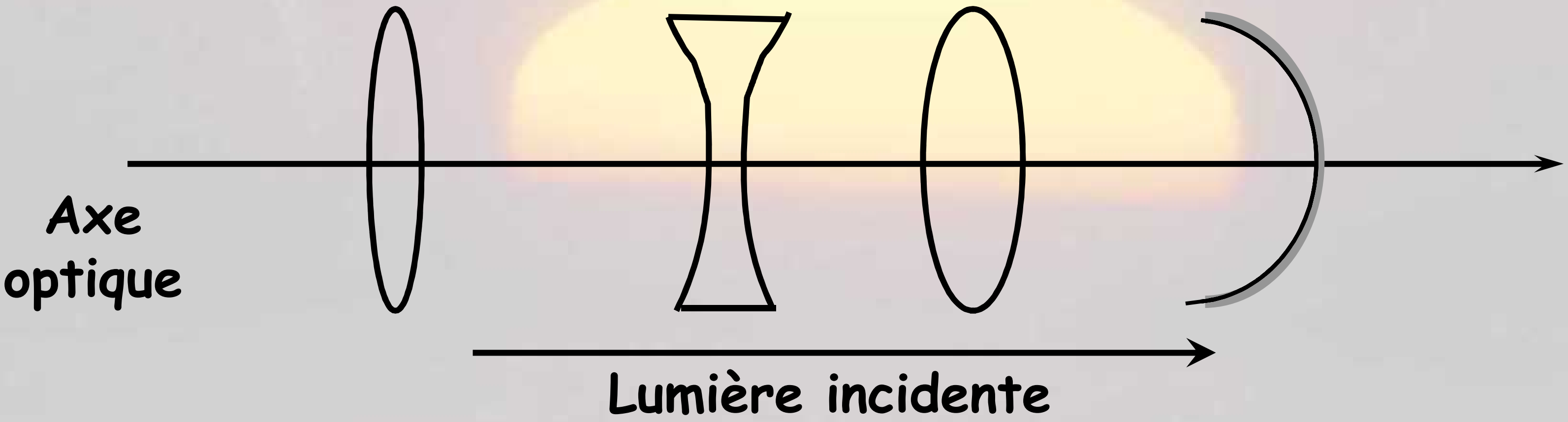
Réaliser des images avec des miroirs sphériques (concaves ou convexes), des miroirs plans, des lentilles minces (convergentes ou divergentes) puis avec des systèmes complexes regroupant divers éléments constitutifs de base, à chaque fois dans les conditions de Gauss.

I – Généralités sur la formation des images dans les conditions de Gauss :

1 – Systèmes centrés :

Un système optique est généralement constitué de dioptres (surfaces de séparation de 2 milieux d'indices différents) et de miroirs.

« Un système est centré s'il admet un axe de symétrie de révolution. Cet axe de symétrie est l'axe optique du système centré ».



2 – Notions de stigmatisme et d'aplanétisme :

Étude des animations (voir transparents suivants)

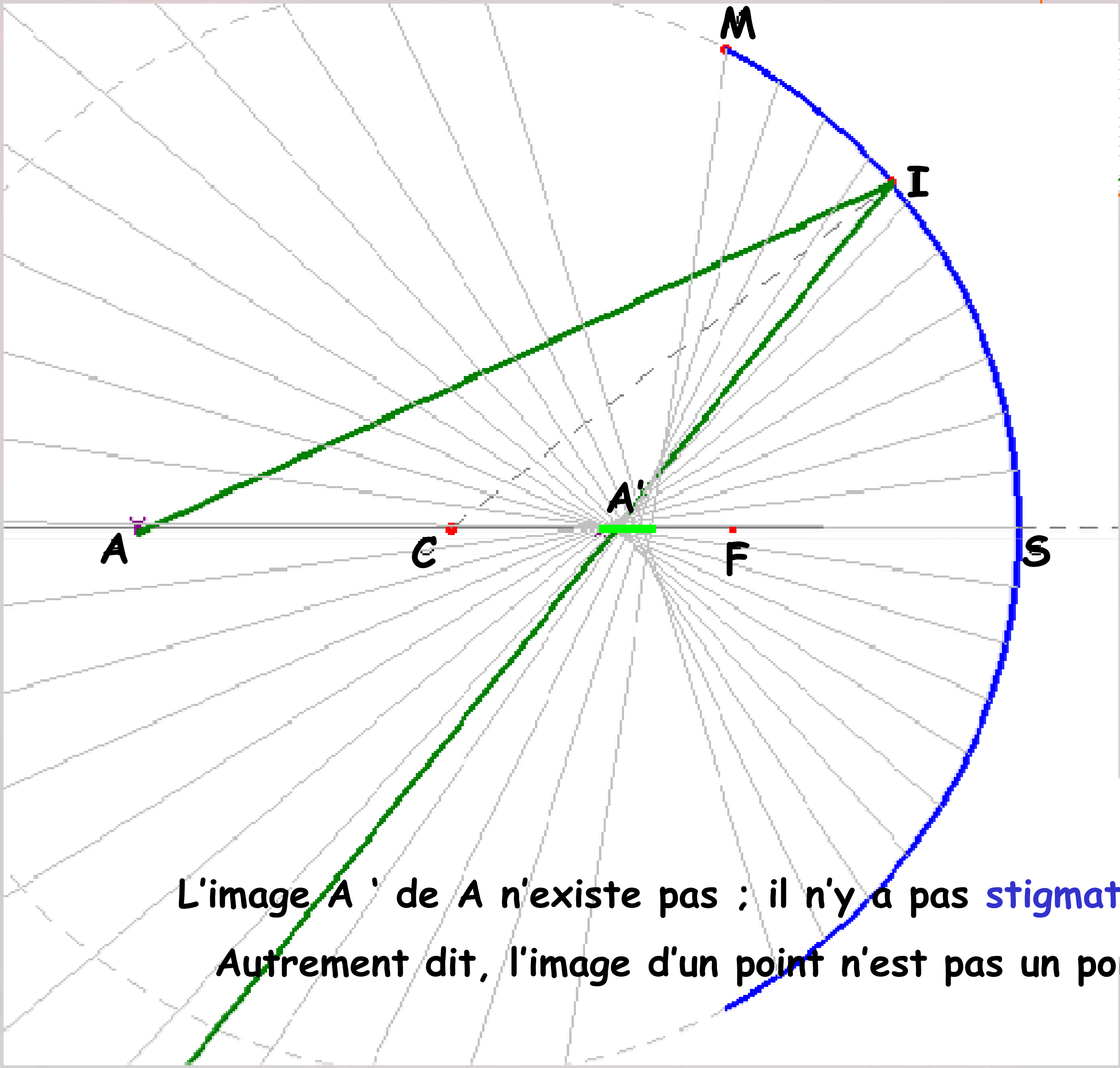
Stigmatisme

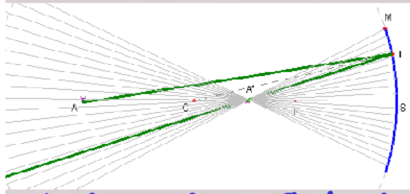
Un système optique possède la propriété de stigmatisme (il est stigmatique) si l'image d'un point à travers ce système est un point.

Aplanétisme

Un système optique possède la propriété d'aplanétisme (il est aplanétique) si l'image d'un objet étendu perpendiculaire à l'axe optique à travers ce système est également perpendiculaire à l'axe optique.

Un appareil photo est aplanétique : en photographiant une personne, les pieds et la tête sont bien nets dans le plan de la pellicule.

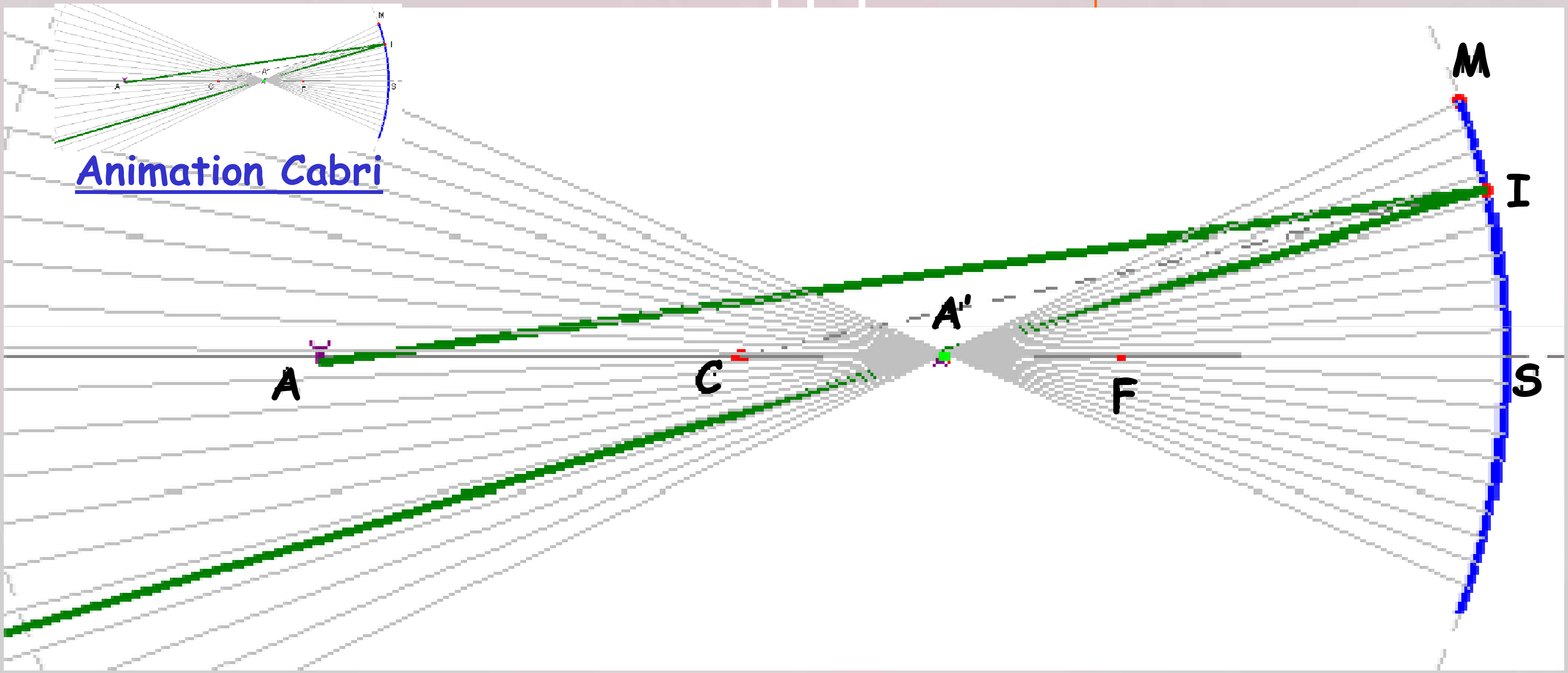




[Animation Cabri]

L'image A ' de A n'existe pas ; il n'y a pas **stigmatisme.**

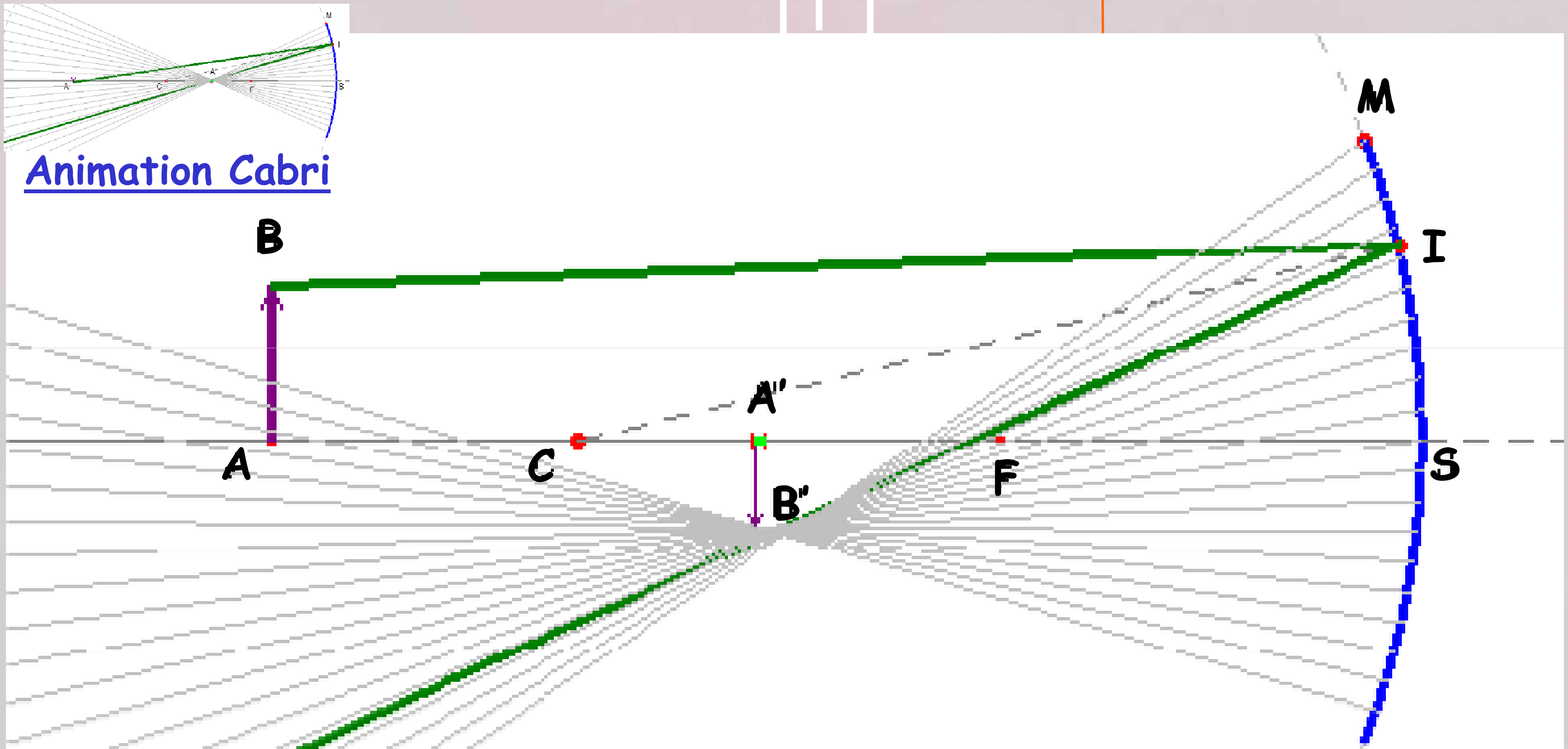
Autrement dit, l'image d'un point n'est pas un point.



Il y a stigmatisme approché : A ' est l'image de A (les rayons lumineux sont peu inclinés et peu écartés de l'axe optique)

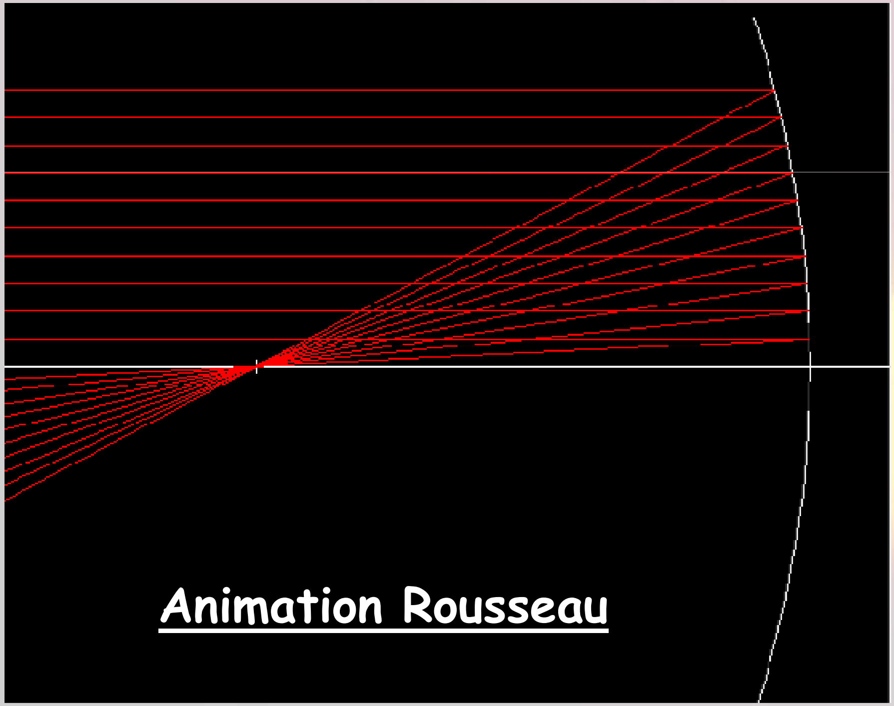
L'image d'un point est un point.

Animation Cabri

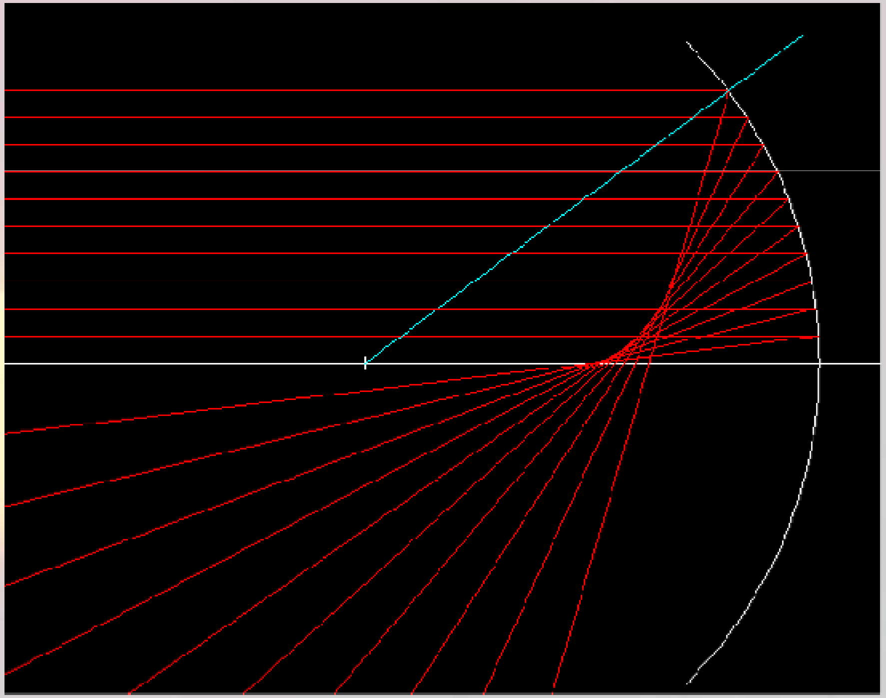


Dans les conditions de stigmatisme approché, le système optique est aplanétique : l'image A'B' d'un objet AB perpendiculaire à l'axe optique est également perpendiculaire à cet axe.

Un faisceau de lumière parallèle converge en un point image, appelé foyer image (de manière exacte pour un miroir parabolique et de manière approchée pour le miroir sphérique concave).



Miroir parabolique



Miroir sphérique

3 – Énoncé des conditions de Gauss :

Conditions de Gauss

Les rayons lumineux doivent être peu inclinés par rapport à l'axe optique et peu écartés de cet axe.

Stigmatisme et aplanétisme

Dans les conditions de Gauss, un système optique centré est stigmatique et aplanétique.

Dans la suite (étude des miroirs et des lentilles), on se placera toujours dans les conditions de Gauss.

Un stigmatisme approché des instruments d'optique est la plupart du temps suffisant.

En effet, tous les récepteurs de lumière possèdent une structure granulaire (ils sont constitués de grains accolés sur lesquels se forment les images).

Il suffit donc, en pratique, que l'image A' d'un point A soit une petite tâche ne recouvrant qu'un seul grain du récepteur (ce dernier ne fera pas alors la différence avec une image réellement ponctuelle).

Dans le cas de l'œil, il suffit que l'image A' soit une tache de dimension inférieure à la taille d'une cellule de la rétine (= 4 μm).

Une pellicule photographique est formée de petits grains dont la taille dépend de la sensibilité du film (un faible indice ISO correspond à des grains fins, l'image est nette et peut être agrandie).

Une cellule CCD est constituée de petites cellules photoconductrices identiques de faible dimension.

II – Étude des miroirs sphériques dans le cadre de l'approximation de Gauss :

1 – Définitions et notations :

Rétroviseurs de voitures

Miroirs de surveillance

Télescopes

Miroirs ludiques dans les fêtes foraines

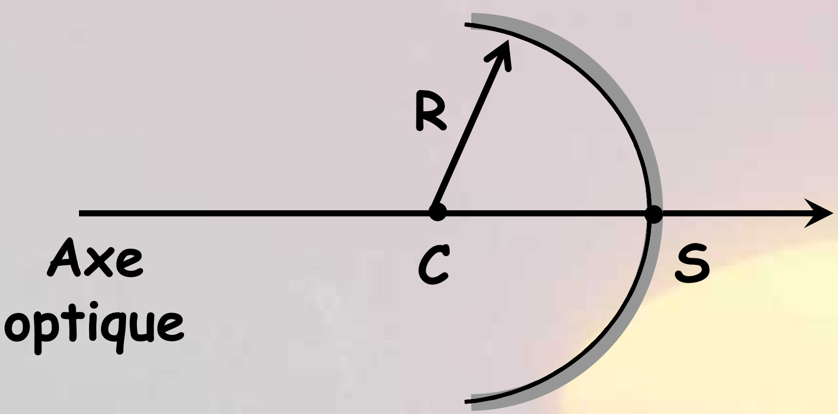
Exemples d'utilisation de miroirs sphériques

Les miroirs sphériques peuvent être concaves ou convexes (voir transparent suivant). C est le centre du miroir, S son sommet. On définit le rayon R (algébrique !) par :

$$R = \overline{SC}$$

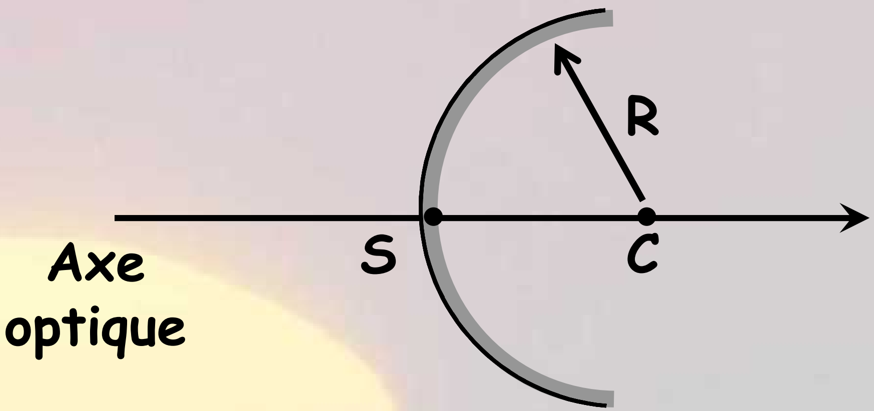
R < 0 pour un miroir concave et R > 0 pour un miroir convexe.

Miroir sphérique concave



$$R = \overline{SC} < 0$$

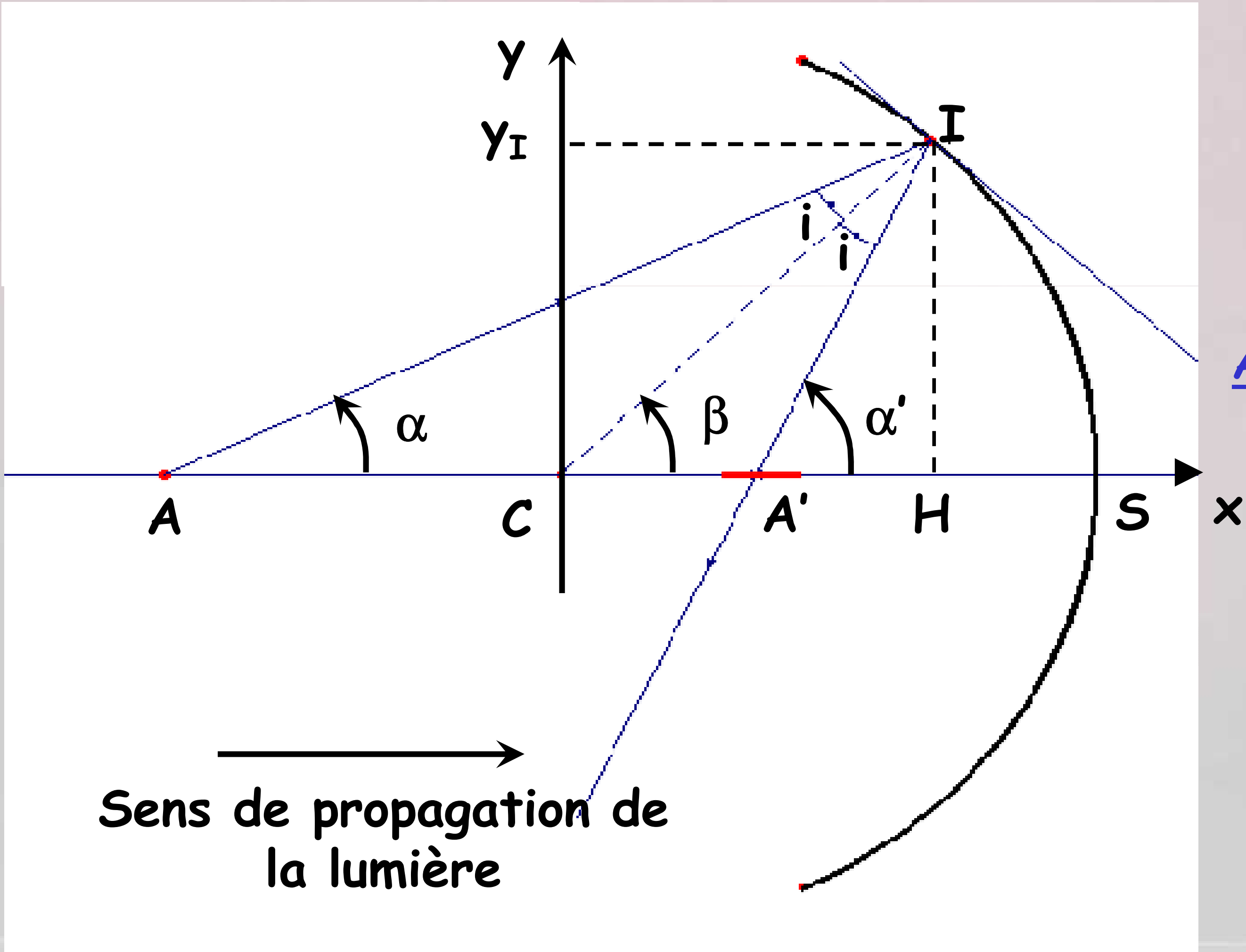
Miroir sphérique convexe



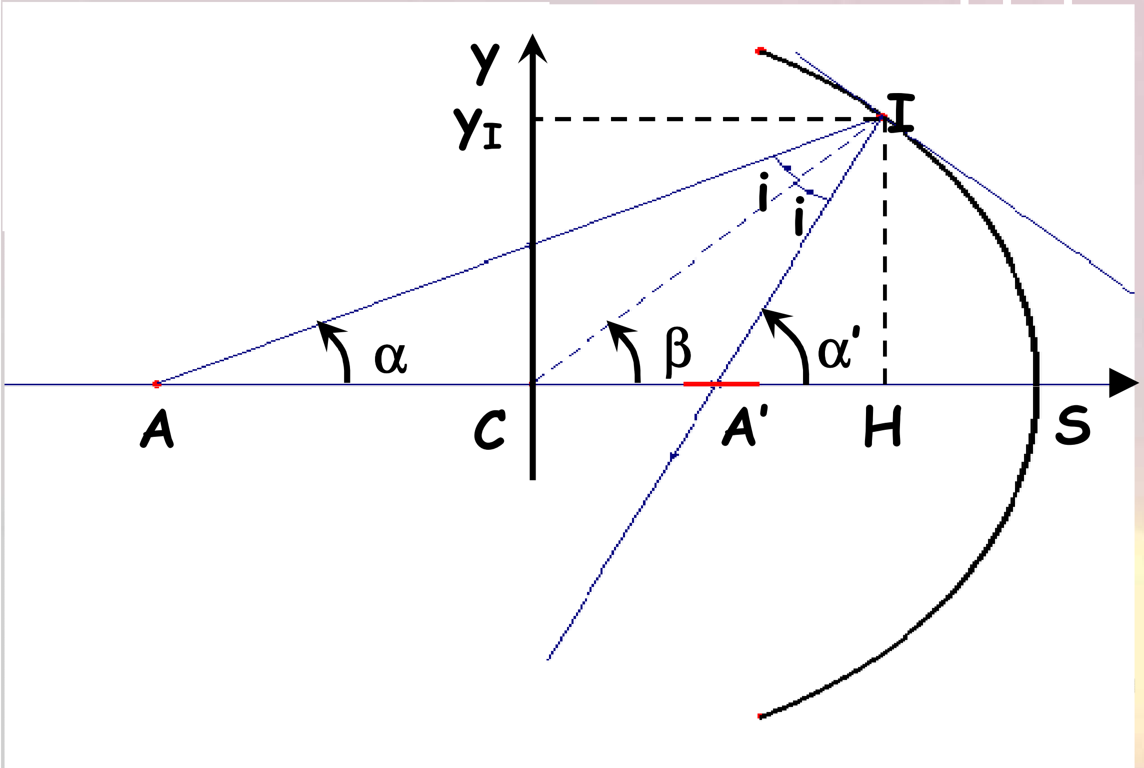
$$R = \overline{SC} > 0$$

Lumière incidente

2 – Stigmatisme approché sur l'axe, formule de conjugaison :



Animation Cabri



On se place dans les conditions de Gauss. Les angles α, α' et β sont « petits » :

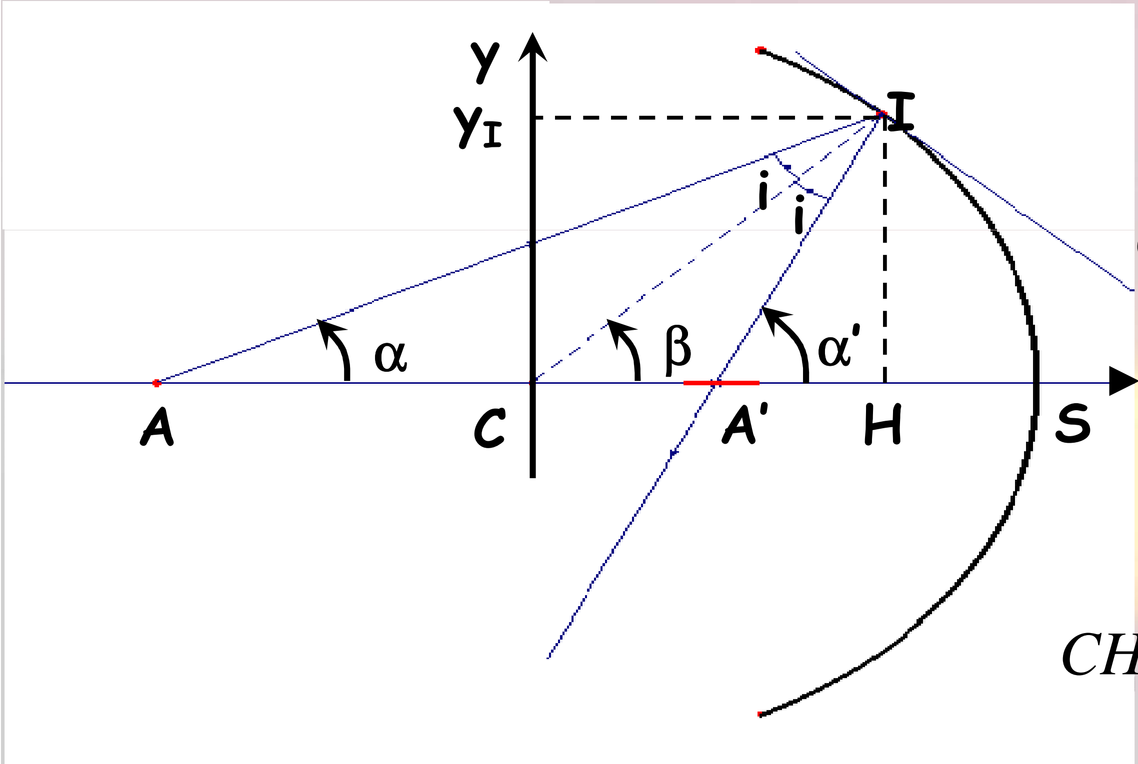
$$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$$

Idem pour α' et β.

Dans ces mêmes conditions, les points H et S sont confondus (voir transparent suivant).

On appelle « relation de conjugaison » une relation entre la position d'un objet A et celle de son image A' sur l'axe optique. L'expression de cette relation dépend du choix de l'origine des positions.

Les points H (projeté orthogonal de I sur l'axe optique) et le sommet S sont, dans les conditions de Gauss, confondus). En effet :



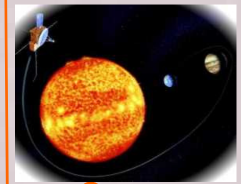
$$CI^2 = CH^2 + IH^2$$

$$CH^2 = R^2 - y_I^2 = R^2\left(1 - \frac{y_I^2}{R^2}\right)$$

$$CH = R\left(1 - \frac{y_I^2}{R^2}\right)^{1/2}$$

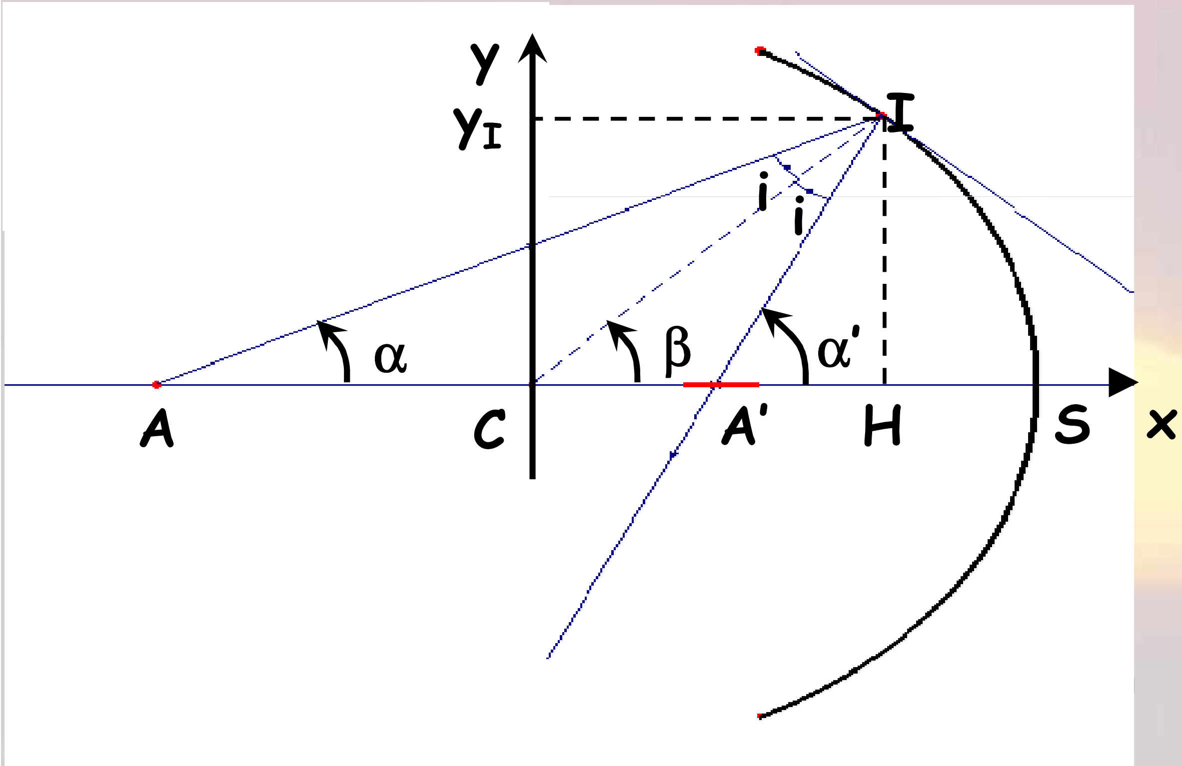
$$CH \approx R\left(1 - \frac{1}{2}\frac{y_I^2}{R^2}\right) = R\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

Ainsi, au 1er ordre en α, $CH \approx R$: les points H et S sont confondus.

Relation de conjugaison (avec origine au sommet) pour un miroir concave :

On veut déterminer une relation entre $\overline{SA}$ et $\overline{SA'}$.



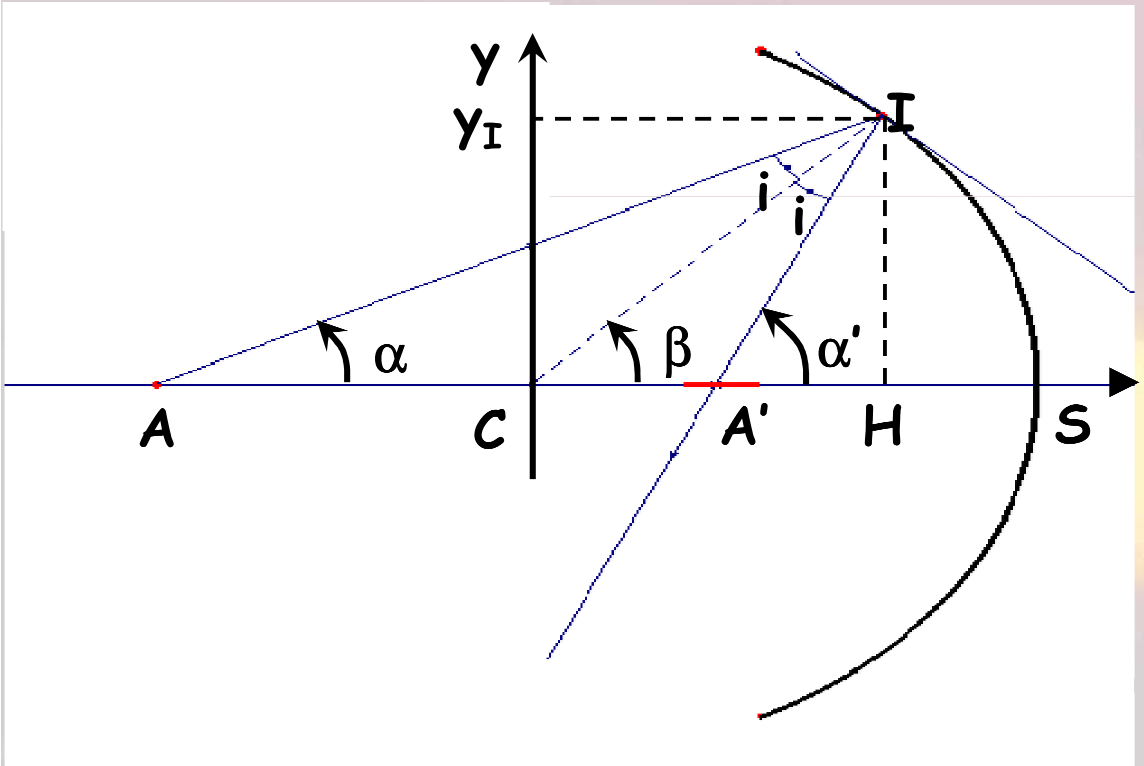
$$\alpha \approx \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}} \approx \frac{\overline{SI}}{(-\overline{SA})}$$

$$\alpha' \approx \frac{\overline{HI}}{\overline{A'H}} \approx \frac{\overline{SI}}{(-\overline{SA'})}$$

$$\beta \approx \frac{\overline{HI}}{\overline{CH}} \approx \frac{\overline{SI}}{(-\overline{SC})}$$

Dans le triangle (AIC) : $\alpha + i + \pi - \beta = \pi$ soit $i = \beta - \alpha$

Dans le triangle (A'IC) : $\pi - \alpha' + i + \beta = \pi$ soit $i = -\beta + \alpha'$



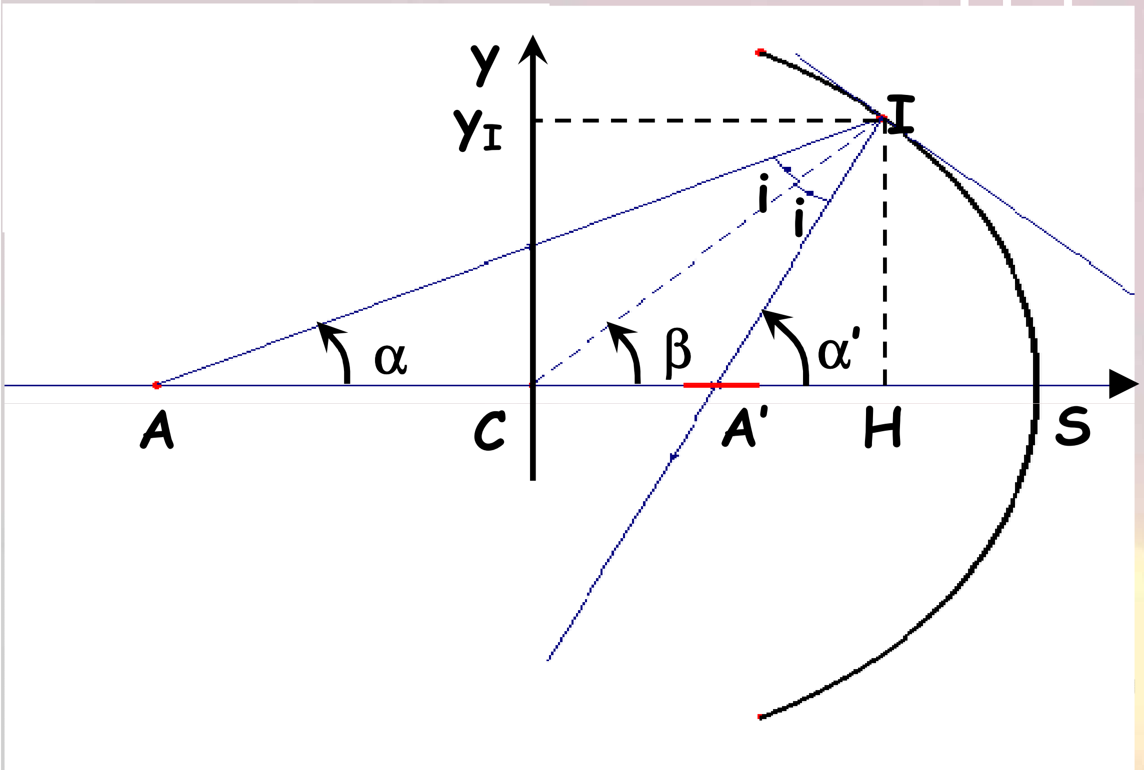
Par conséquent :

$$i = \beta - \alpha = -\beta + \alpha'$$

$$\boxed{\alpha + \alpha' = 2\beta}$$

D'où : $$\frac{\overline{SI}}{\overline{SA}} + \frac{\overline{SI}}{\overline{SA'}} = 2\frac{\overline{SI}}{\overline{SC}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{2}{R}}$$



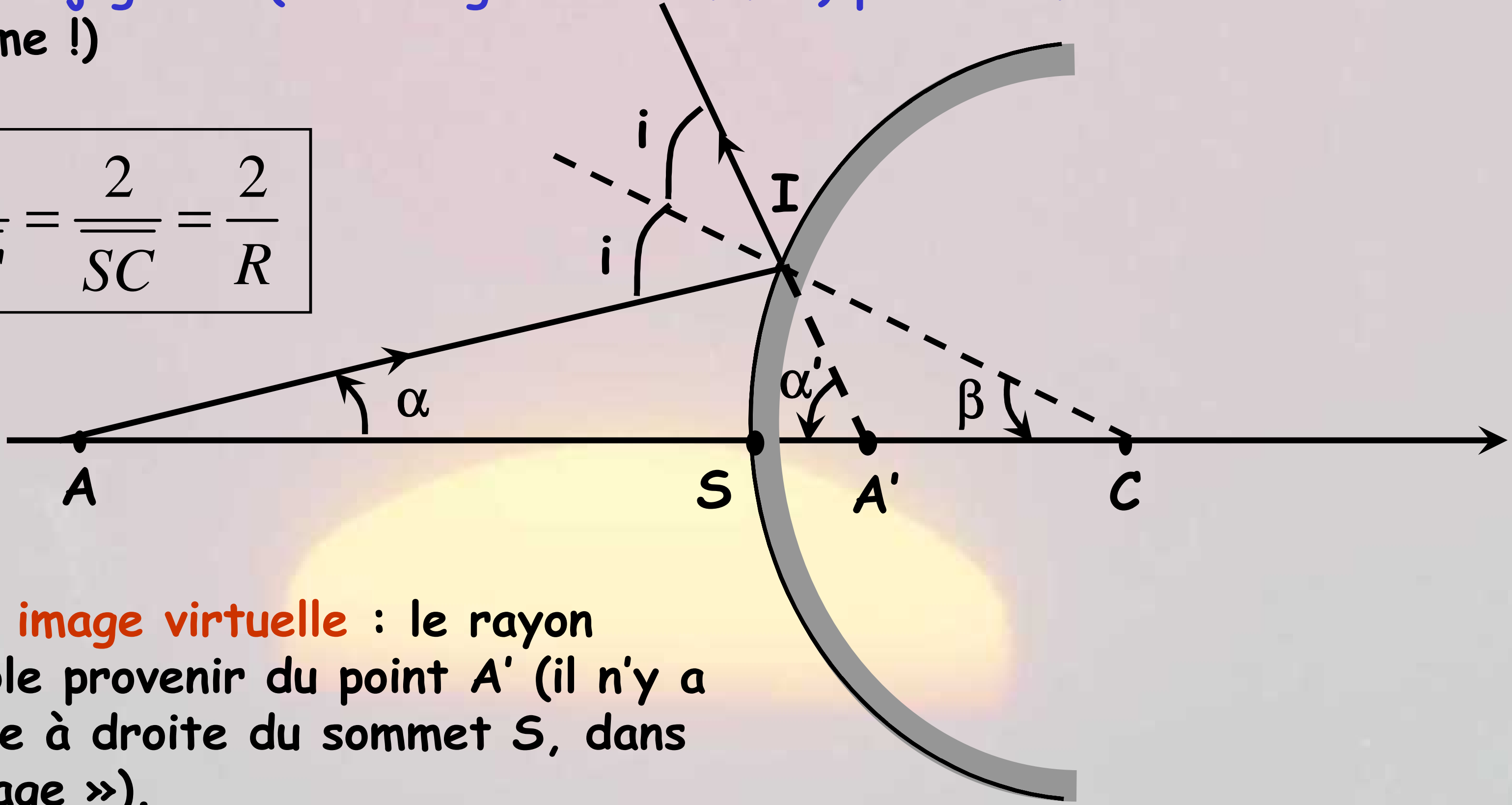
Relation de conjugaison (origine au sommet S)

$$\boxed{\frac{1}{\overline{SA}}+\frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{SC}}=\frac{2}{R}}$$

Cette relation montre que, pour A donné, la position A' est indépendante du rayon AI : il y a stigmatisme approché pour tout point A de l'axe optique.

Relation de conjugaison (avec origine au sommet) pour un miroir convexe :
(c'est la même !)

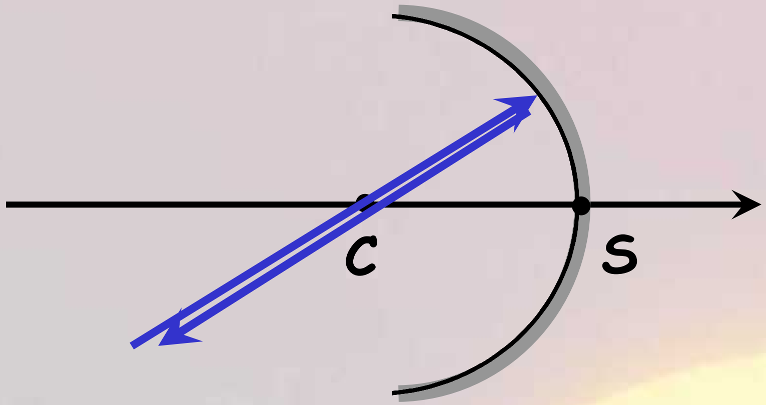
$$\frac{1}{\overline{SA}}+\frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{SC}}=\frac{2}{R}$$

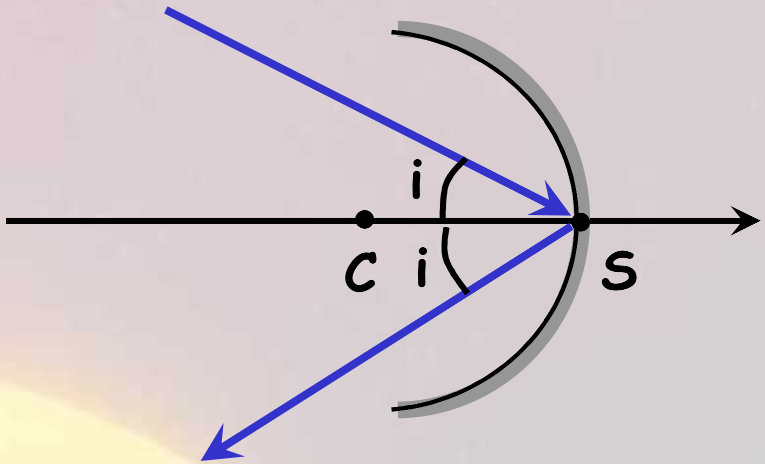


A' est ici une image virtuelle : le rayon réfléchi semble provenir du point A' (il n'y a pas de lumière à droite du sommet S, dans l'espace « image »).

Dans le cas du miroir concave, l'image A' est réelle : le rayon réfléchi se dirige effectivement vers l'image A'.On peut projeter l'image sur un écran.

Deux points particuliers, le centre C et le sommet S :

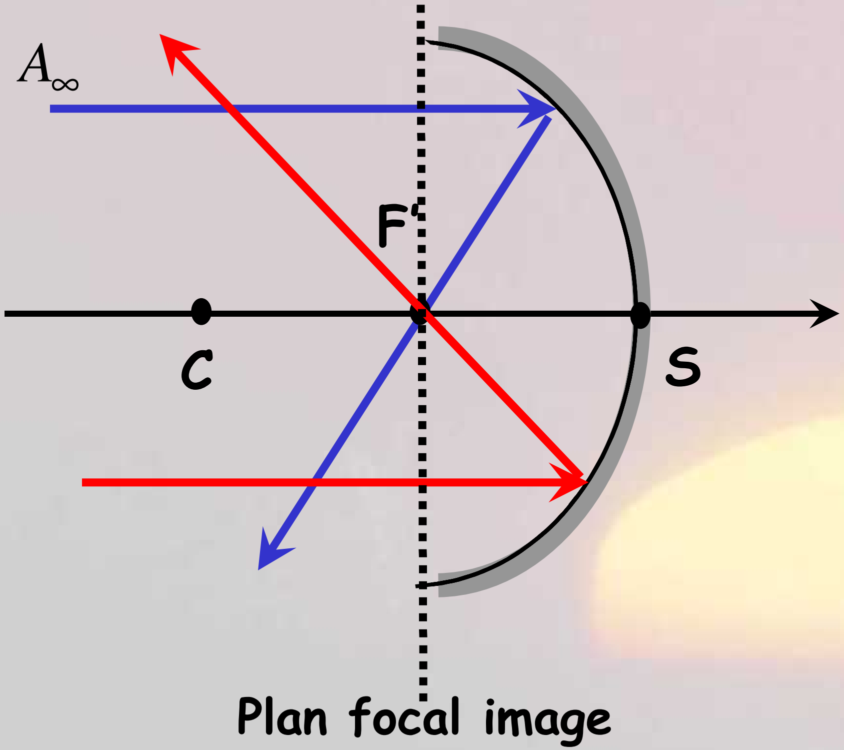




Tout rayon passant par C arrive sous incidence normale sur le miroir et revient sur lui-même après réflexion sur le miroir en repassant par C.

Tout rayon arrivant en S sur le miroir est réfléchi symétriquement en provenant de S.

3 – Foyer image, foyer objet, distance focale, vergence :



Foyer image F' : le foyer image F' est l'image (le conjugué) d'un objet A_∞ situé à l'infini sur l'axe optique.

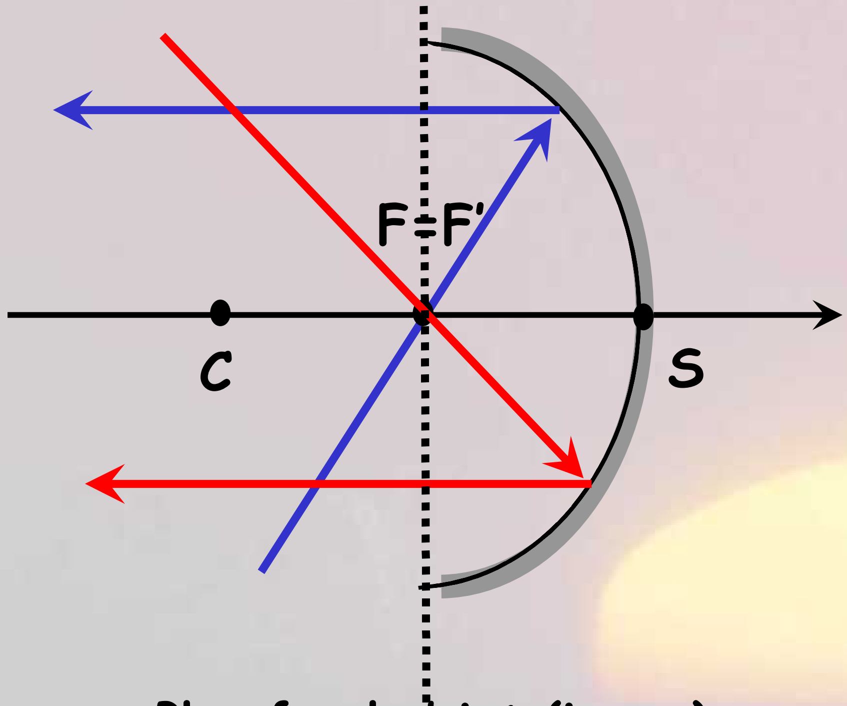
Avec $\dfrac{1}{\overline{SA}} = 0$, on obtient :

$$\frac{1}{\overline{SF'}} = \frac{2}{R} \quad soit \quad \boxed{\overline{SF'} = \frac{R}{2}}$$

Le foyer image F' est situé au milieu du segment CS.

$f' = \overline{SF'} = \dfrac{R}{2}$: distance focale image

$V' = \dfrac{1}{f'}$: vergence image (en dioptries, $\delta = m^{-1}$)



Plan focal objet (image)

Foyer objet F : tout rayon qui passe par le foyer objet F ressort parallèle à l'axe optique (l'image de F est rejeté à l'infini).

Avec $\frac{1}{\overline{SA'}} = 0$, on obtient :

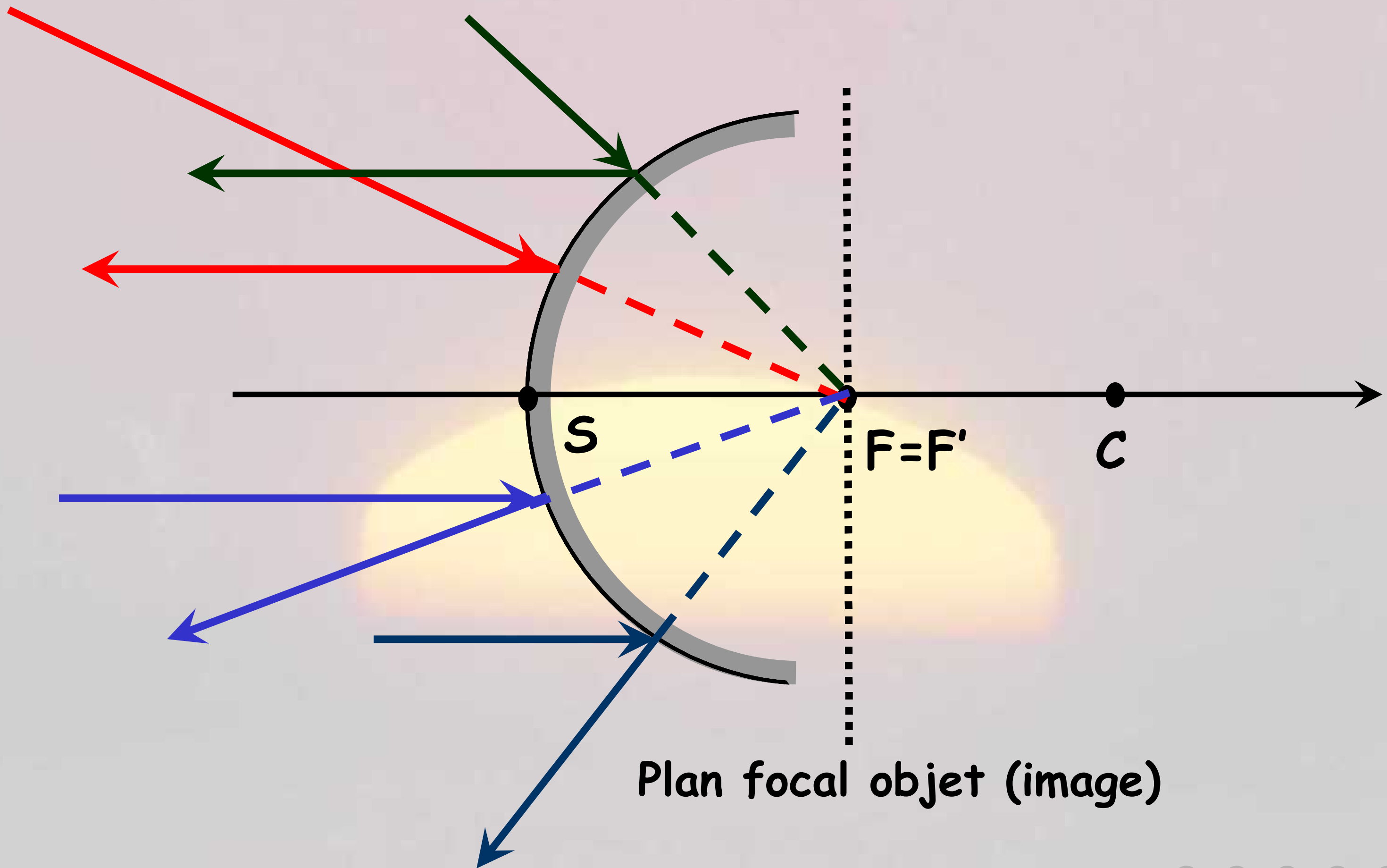
$$\frac{1}{\overline{SF}} = \frac{2}{R} \quad soit \quad \boxed{\overline{SF} = \frac{R}{2}} \quad (F = F')$$

Les foyers objet et image F et F' sont confondus.

$f = \overline{SF} = \frac{R}{2}$: **distance focale objet**

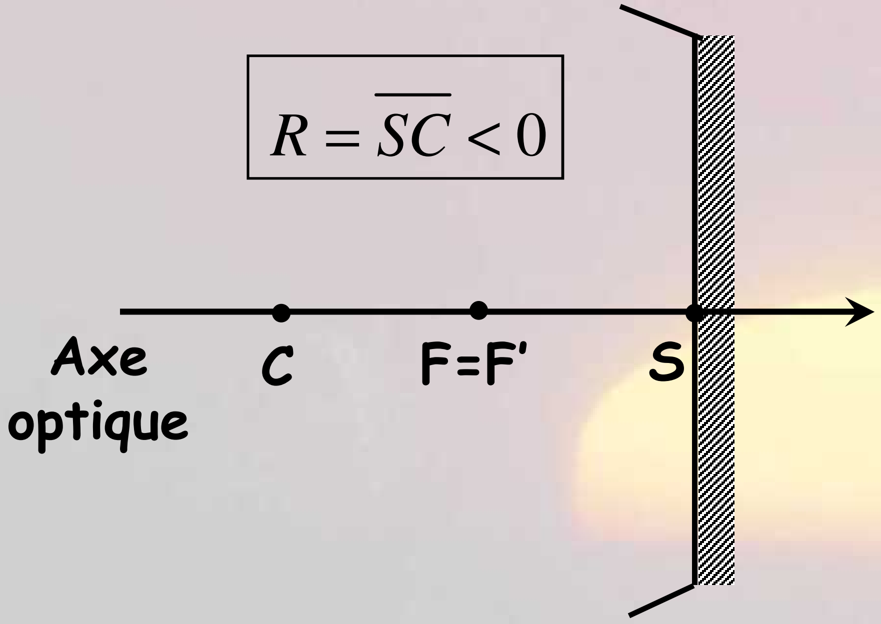
$V = \frac{1}{f}$: **vergence objet (en dioptries, $\delta = m^{-1}$)**

Cas du miroir convexe :

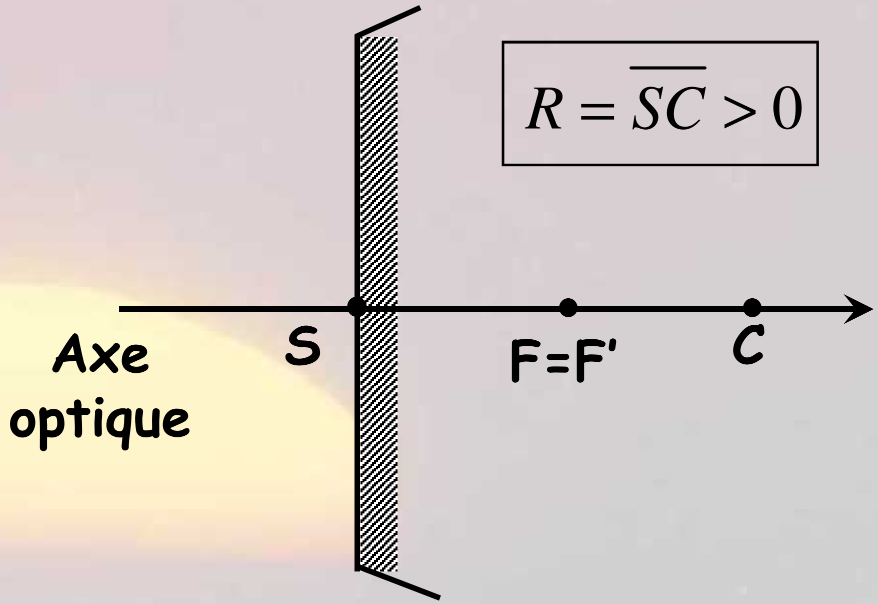


4 – Modélisation du miroir sphérique :

On assimile le miroir sphérique à son plan tangent en S :



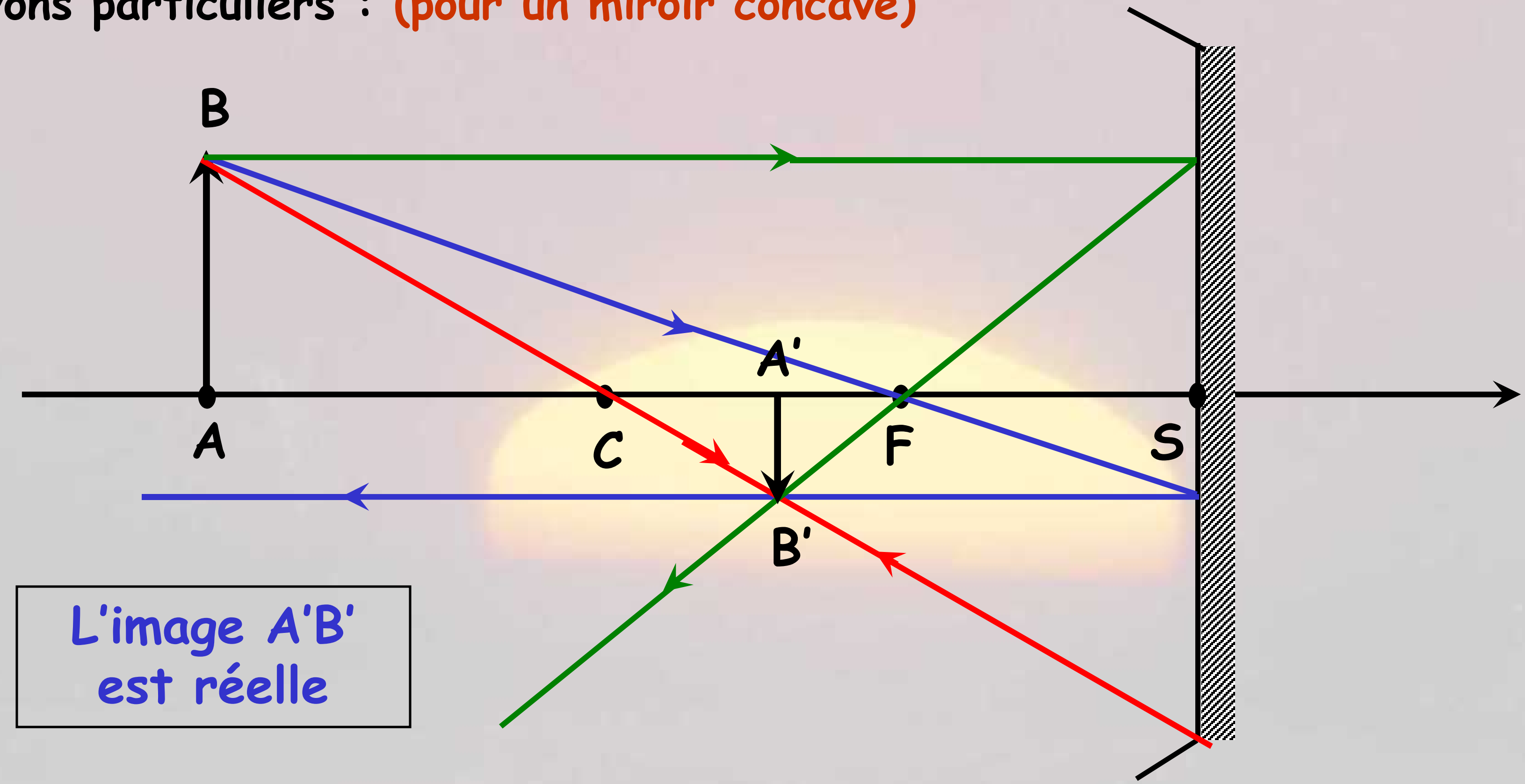
Miroir sphérique concave



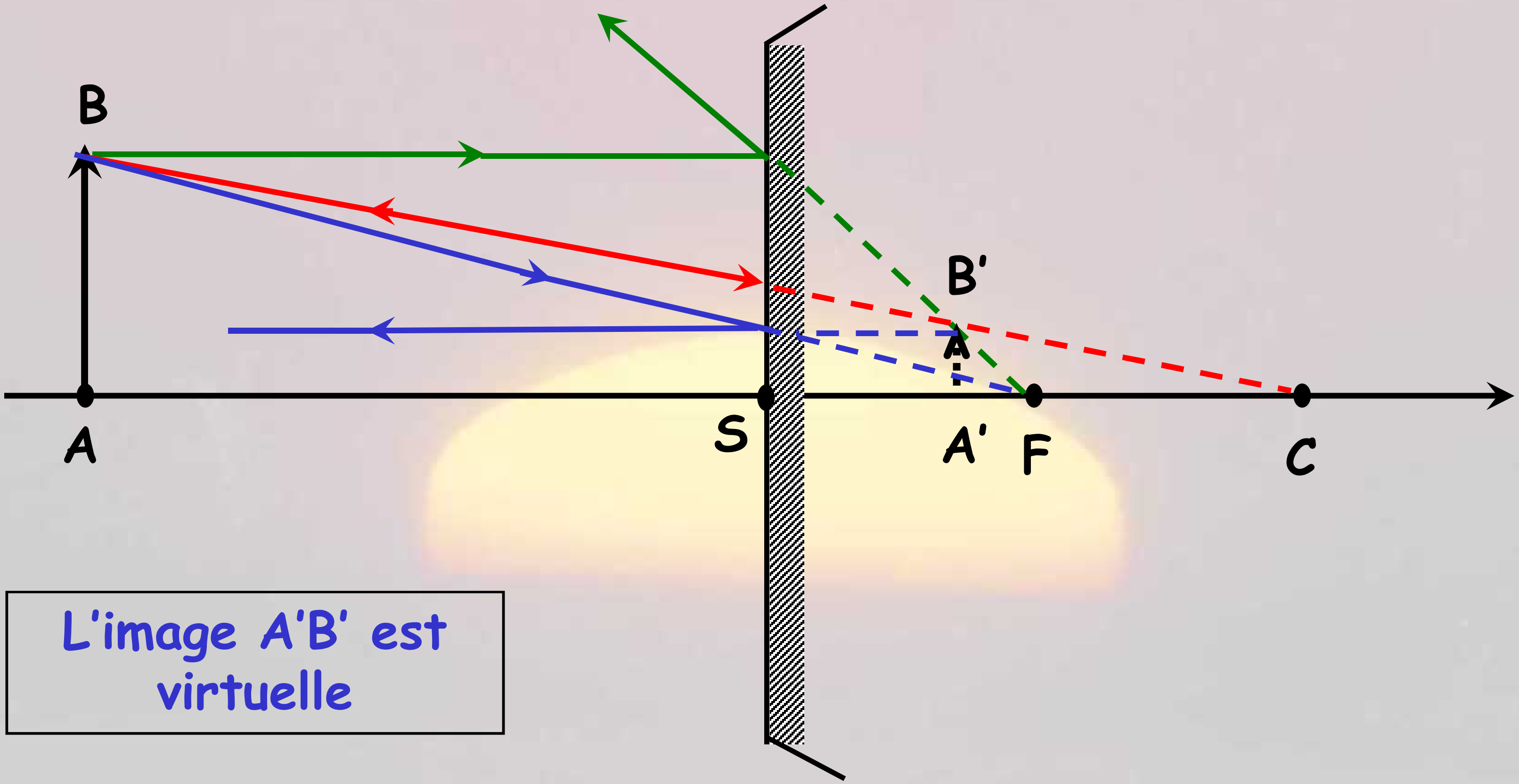
Miroir sphérique convexe

5 – Construction d'une image :

La figure suivante donne le principe de construction d'une image à l'aide de rayons particuliers : (pour un miroir concave)

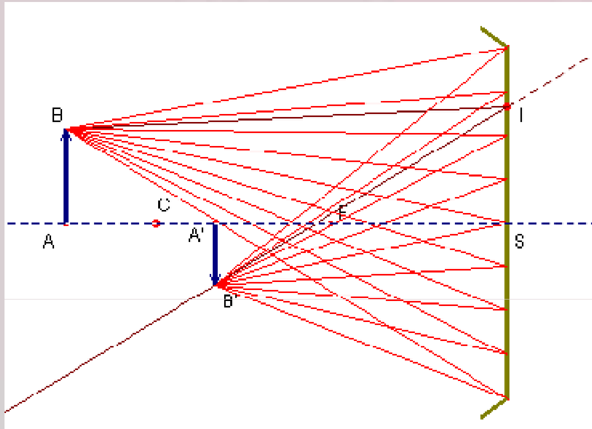


La figure suivante donne le principe de construction d'une image à l'aide de rayons particuliers : (pour un miroir convexe)

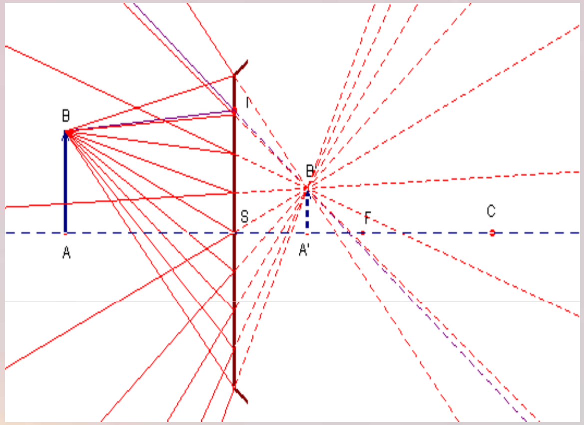


L'image A'B' est virtuelle

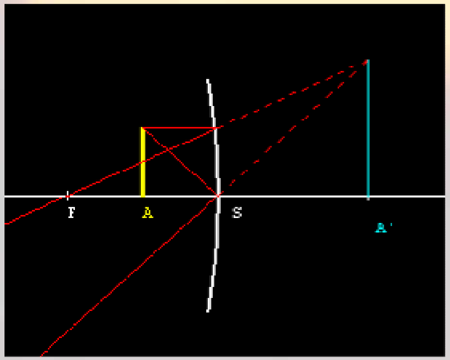
Constructions d'images



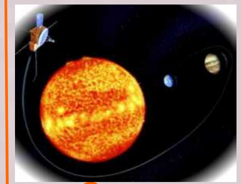
Animation Cabri (miroirs concaves)



Animation Cabri (miroirs convexes)



Animation Rousseau (miroirs concaves et convexes)



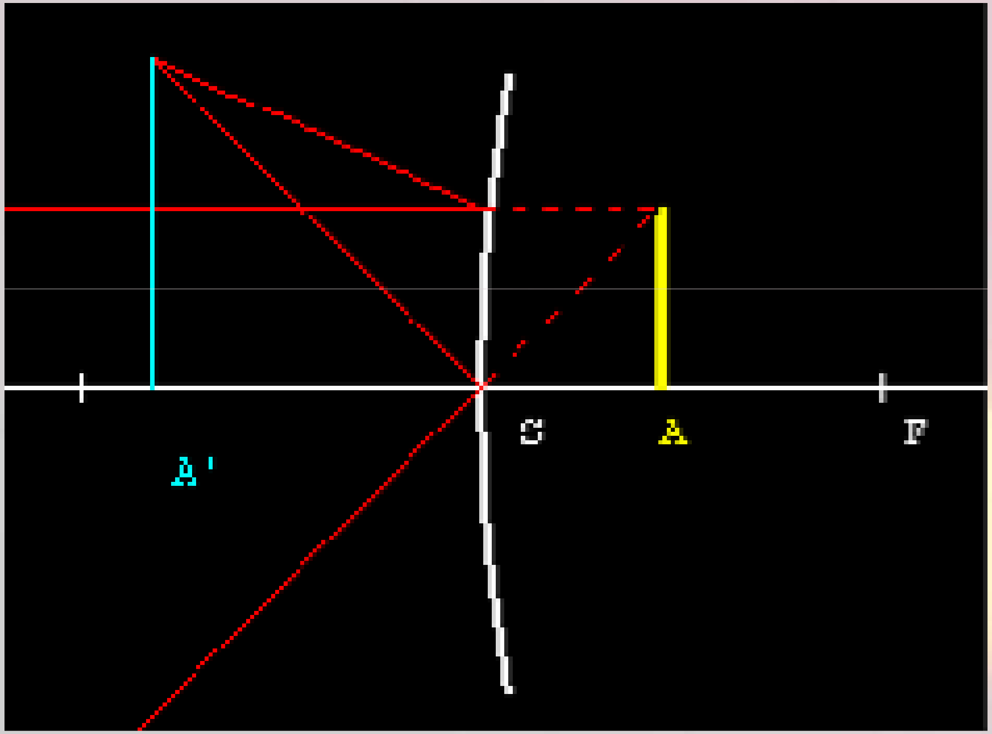
Objet réel : les rayons issus de l'objet se dirigent vers le système optique.

Objet virtuel : les rayons arrivent sur le système optique avant de pouvoir éclairer l'objet situé à droite du système.

Image réelle : les rayons sortant du système optique se dirigent tous vers l'image. L'image peut être observée avec un écran.

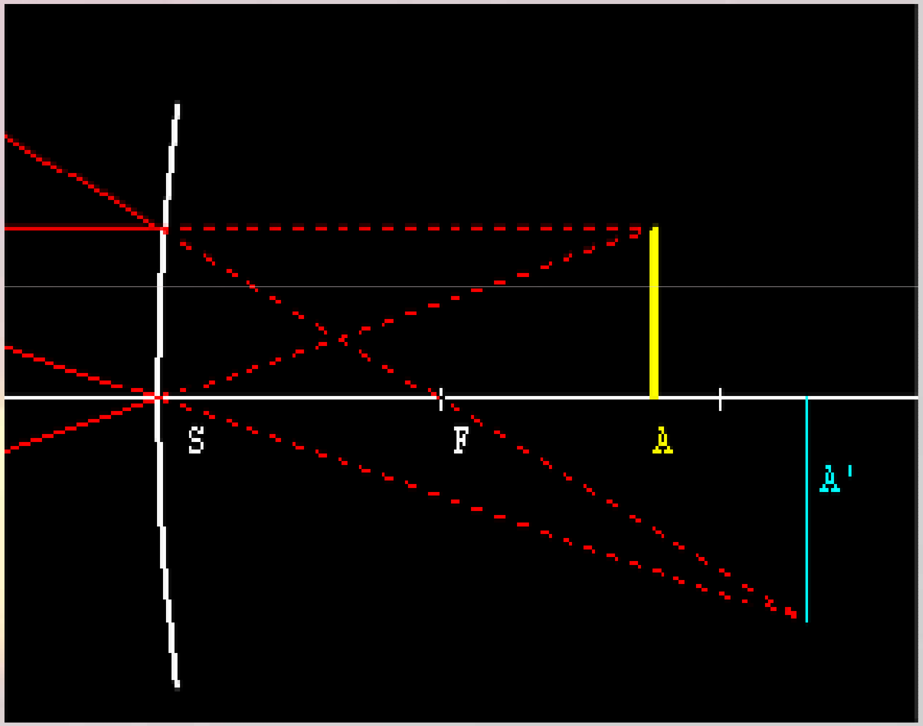
Image virtuelle : les rayons sortant du système optique semble tous provenir de l'image. On ne peut pas observer l'image virtuelle avec un écran.

Animation Rousseau (miroirs concaves et convexes)



Objet virtuel

Image réelle



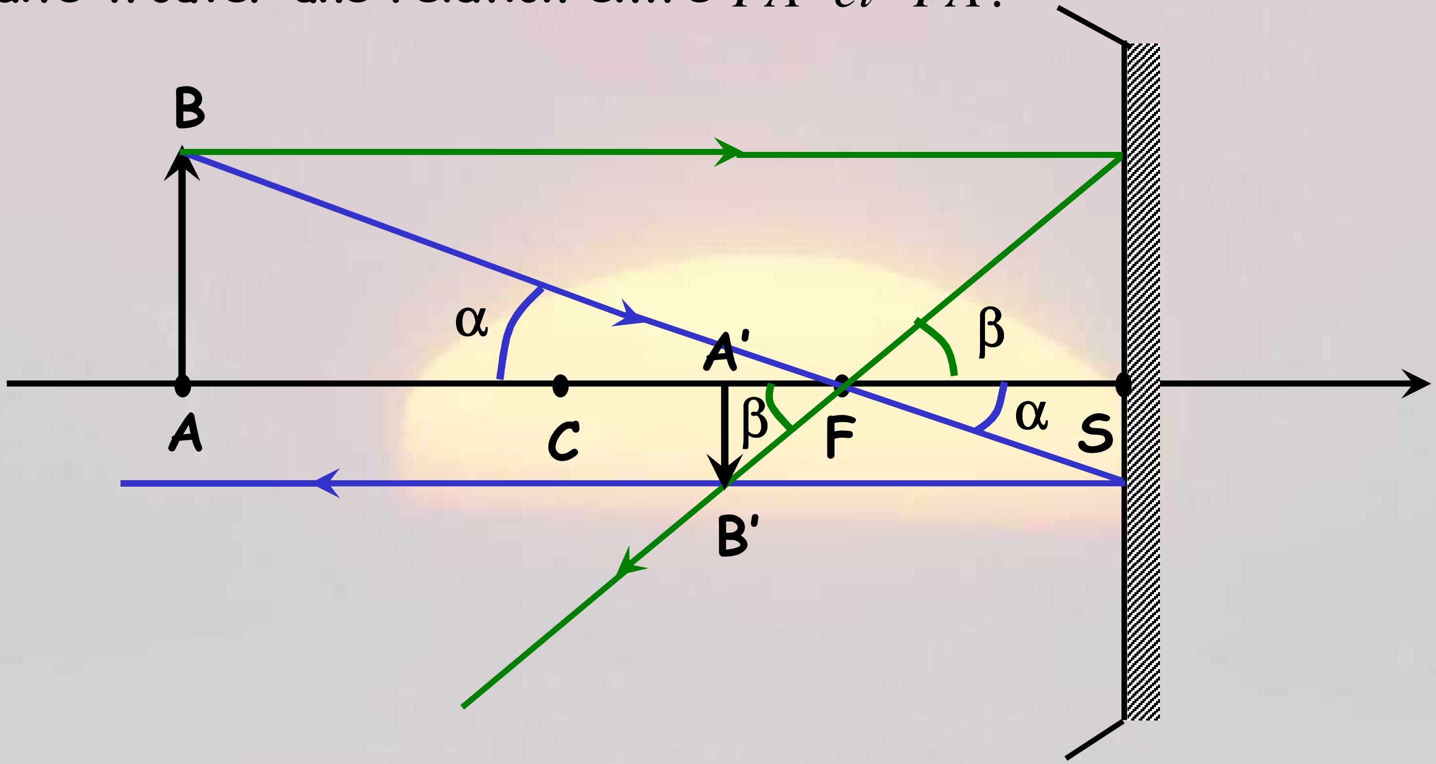
Objet virtuel

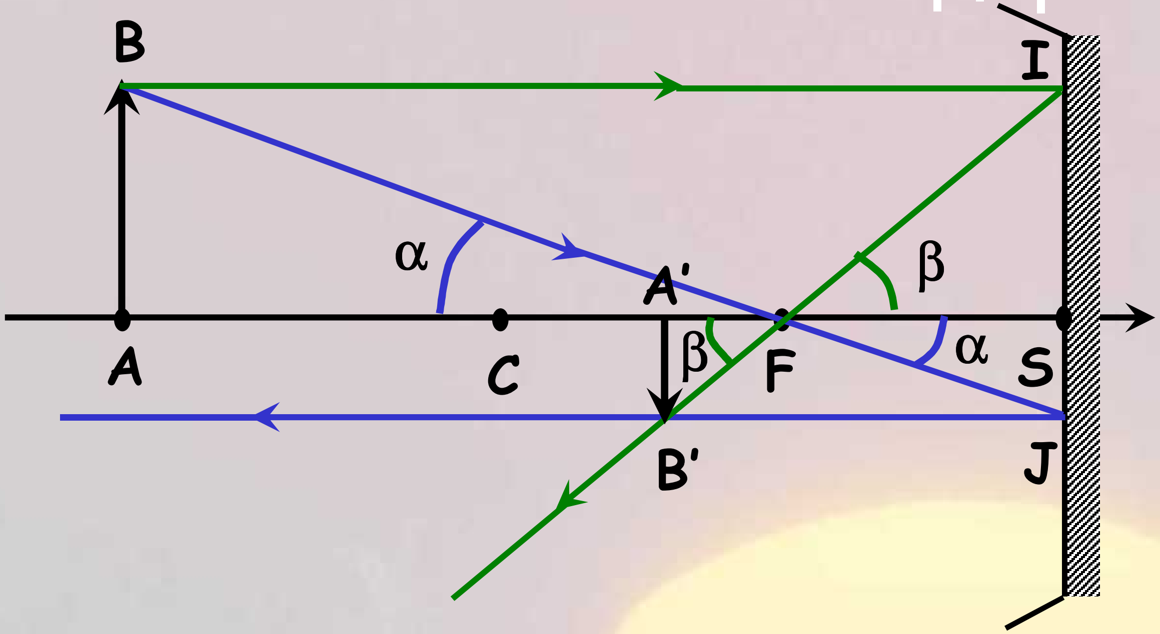
Image virtuelle

6 – Conjugaison et grandissement avec origine aux foyers (formules de Newton) :

(La démonstration est faite dans le cas d'un miroir concave)

On souhaite trouver une relation entre $\overline{FA}$ et $\overline{FA'}$.





On exprime de deux manières différentes les angles α et β :

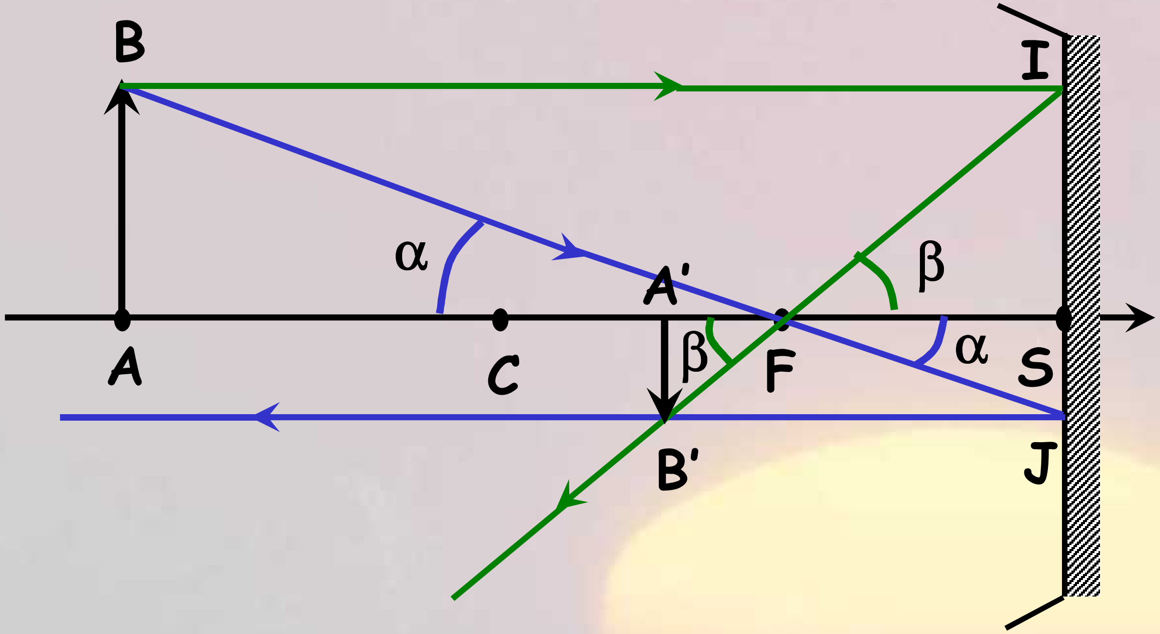
$$\alpha = -\frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{SJ}}{\overline{FS}}$$

$$\beta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{FA'}} = \frac{\overline{SI}}{\overline{FS}}$$

Or : $\overline{SJ} = \overline{A'B'}$ *et* $\overline{SI} = \overline{AB}$

D'où la relation de conjugaison avec l'origine en F : (formule de Newton)

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} \quad soit \quad \boxed{\overline{FA}.\overline{FA'} = \overline{FS}^2 = f^2 = \frac{R^2}{4}}$$



Grandissement γ :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$

Avec : $f = \overline{SF} = -\overline{FS}$

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{FA'}}{f}}$$

Si γ > 0 : l'image est droite (même sens que l'objet)

Si γ < 0 : l'image est renversée

7 – Conjugaison et grandissement avec origine au centre (formules de Descartes) :

On utilise la relation de conjugaison avec origine au foyer : $\overline{FA}.\overline{FA'} = f^2$

$$\overline{FA} = \overline{CA} - \overline{CF} \qquad et \qquad \overline{FA'} = \overline{CA'} - \overline{CF}$$

$$(\overline{CA} - \overline{CF}).(\overline{CA'} - \overline{CF}) = f^2$$

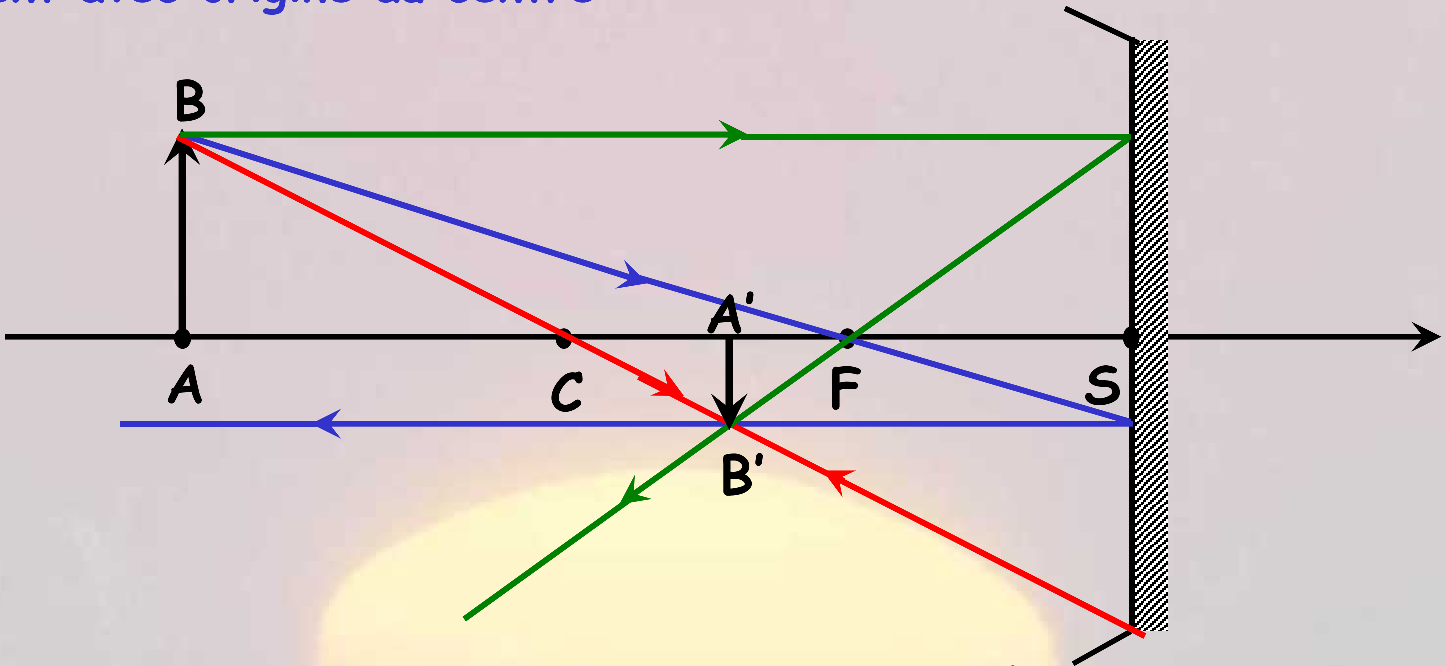
$$\overline{CA}.\overline{CA'} - \overline{CA}.\overline{CF} - \overline{CA'}.\overline{CF} + \overline{CF}^2 = f^2$$

Or, $CF^2 = f^2$, d'où, en divisant par $\overline{CA}.\overline{CA'}.\overline{CF}$:

$$\boxed{\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CF}} = -\frac{1}{f}}$$

(Relation de Descartes)

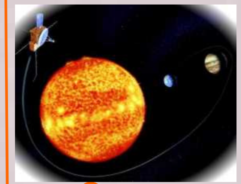
Grandissement avec origine au centre :



$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

Montrer que le grandissement avec origine au sommet est (utiliser le rayon qui passe par S) :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

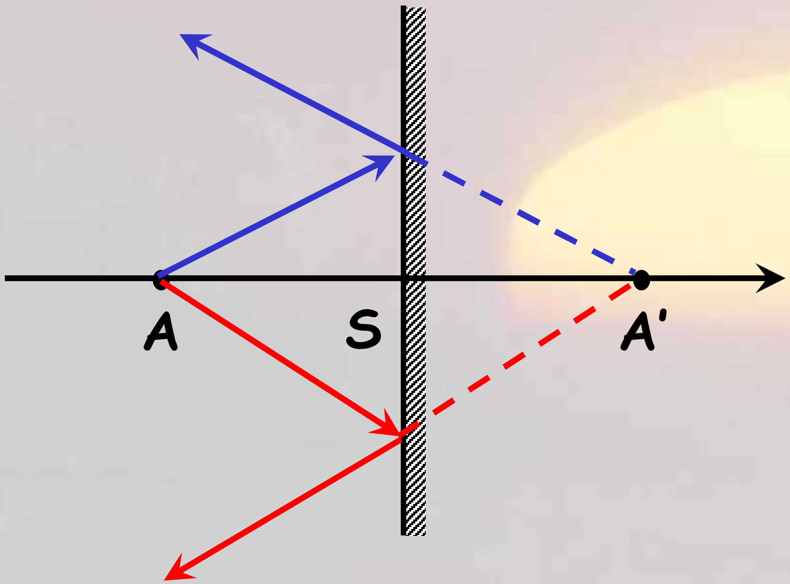


8 – Cas particulier du miroir plan :

Un miroir plan est un miroir sphérique de rayon infini : le centre et les foyers sont rejetés à l'infini.

On dit que le miroir plan est « afocal » (foyers rejetés à l'infini)

La formule de conjugaison avec origine au sommet donne immédiatement :



$$\overline{SA'} = -\overline{SA'}$$

L'image A' de A est le symétrique de A par rapport au plan du miroir.

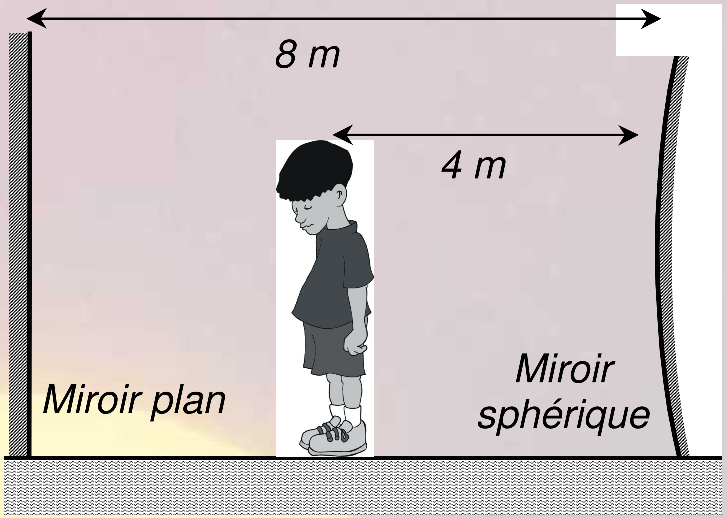
A' est une image virtuelle.

Le grandissement vaut 1.

Le miroir plan est rigoureusement stigmatique et aplanétique.

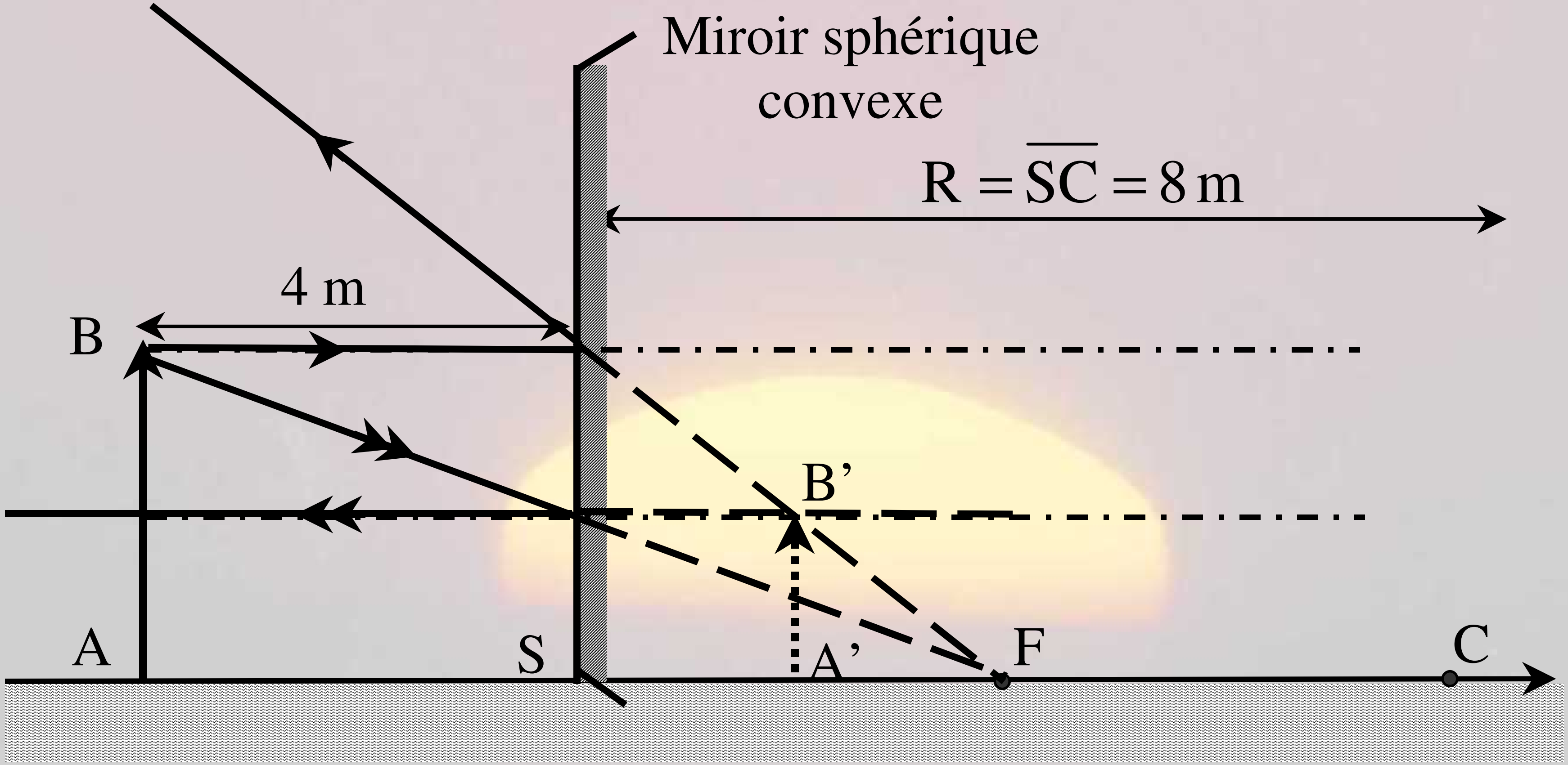
Exercice d'application :

A l'occasion d'une fête foraine, un jeune enfant (de taille 1,20 m) se place à mi-chemin d'un miroir plan et d'un miroir sphérique convexe, distants l'un de l'autre de 8 m.



L'enfant, amusé, constate qu'il se voit deux fois plus grand à travers le miroir plan qu'à travers le miroir sphérique.

Déterminer le rayon R du miroir sphérique.



Olivier GRANIER

L'enfant se voit, à travers le miroir plan, à sa taille normale ; par conséquent, le grandissement γ donné par le miroir sphérique vaut $\gamma = 1/2$. (la figure, dans laquelle l'enfant est schématisé par le segment AB, précise les notations utilisées).

La formule du grandissement, avec l'origine au foyer F, s'écrit :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{FA'}}{f}$$

où la distance focale f est reliée au rayon (algébrique) $R = \overline{SC}$ du miroir sphérique par f = R/2. Comme $\gamma = 1/2$, on déduit $\overline{FA} = -2f = -R$.

Or : $\overline{FA} = \overline{FS} + \overline{SA}$

Soit $-R = -\frac{R}{2} + \overline{SA} \quad d'où \quad R = -2\overline{SA}$

Finalement, avec $\overline{SA} = -4\ m$:

$$R = -2\overline{SA} = 8\ m$$