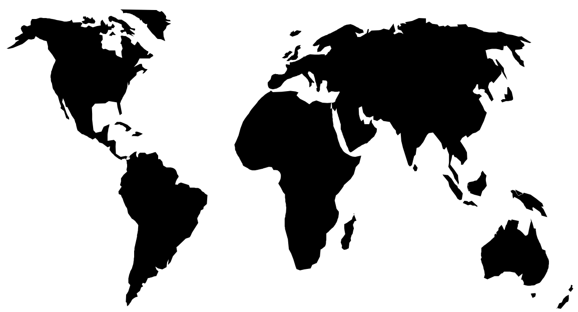
Ondes dans les plasmas
(MP)



Chapitre 2

Ondes dans les plasmas

I – Propagation d’une onde électromagnétique dans un plasma :

1 – Définition d’un plasma :

La matière telle qu’on la connaît sur Terre peut exister essentiellement sous trois formes bien familières : l’état solide, l’état liquide et l’état gazeux. Il existe cependant un quatrième état de la matière, appelé *plasma*, obtenu lorsque la matière est portée par exemple à très haute température.

Un plasma est un milieu composé d’atomes ou de molécules partiellement ou complètement ionisés mais qui reste globalement électriquement neutre ; ainsi, un plasma d’hydrogène est composé d’atomes d’hydrogène, de protons (les noyaux d’hydrogène) et d’électrons libres, en proportions différentes selon la nature du plasma (plasma peu ou au contraire complètement ionisé).

Les exemples de plasmas dans la nature sont nombreux ; on peut citer :

- La magnétosphère et l'ionosphère terrestres.
- Le cœur des étoiles, exemple de plasma chaud et très dense.
- Les tubes à néon et le phénomène de la foudre (décharges électriques).

Les applications de la physique des plasmas sont très diverses et en plein développement, dans des domaines aussi variés que :

- La fusion thermonucléaire : en réalisant un plasma de très forte densité et à très haute température, les physiciens espèrent amorcer des réactions de fusion nucléaire et créer ainsi un générateur d'énergie considérable.
- L'électronique : l'utilisation de plasmas froids permet de réaliser des circuits électroniques intégrés. La télévision de l'avenir possédera certainement un écran à plasma.
- Traitement des matériaux : les plasmas permettent de détruire, transformer, analyser, souder, créer…la matière. Par exemple, des fibres plastiques peuvent être traitées par plasma pour devenir imperméables.

Dans la suite, on choisit un modèle de plasma constitué de n ions (de masse M et charge + e) et de n électrons (de masse m et de charge – e) par unité de volume.

On néglige toutes interactions entre les ions : ni attraction ou répulsion électrostatique, ni chocs. Cette hypothèse est satisfaisante pour un plasma peu dense.

On note $\vec{V}$ et $\vec{v}$ les vitesses mésoscopiques d'un ion et d'un électron. Si un champ électrique extérieur $\vec{E}$ est appliqué au plasma :

$$M\frac{d\vec{V}}{dt} = e\vec{E} \qquad et \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

Par conséquent :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{m}{M}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Soit, à une constante près :

$$\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}$$

Par conséquent, comme m / M << 1, la vitesse des ions positifs est très faible vis-à-vis de celle des électrons.

On ne prendra en compte que le mouvement des électrons.

La densité volumique du plasma est :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} + ne\vec{V} = -ne\left(1 + \frac{m}{M}\right)\vec{v} \approx -ne\vec{v}$$

Elle est pratiquement égale à celle des électrons.

2 – Equations de Maxwell dans le plasma :

L'ionosphère est la partie de la haute atmosphère (75 à 250 km d'altitude en plusieurs couches) où les gaz sont ionisés par le rayonnement cosmique et par le vent solaire : c'est un exemple de plasma.

Dans un plasma, beaucoup d'ondes de nature différentes peuvent se propager.

Du fait qu'un plasma combine les effets électromagnétiques aux mouvement des particules (effets fluides ou cinétiques), en général, tout interagit, et la nature des ondes est en général plus compliquée que dans le vide ou dans les gaz neutres.

Les ondes du lumière existent dans les plasmas, mais pour ne pas interagir avec celui-ci, leur fréquence doit être supérieure à l'inverse du temps que mettent les électrons à réagir sous l'influence d'un champ électrique. Cette fréquence correspond précisément à la fréquence de plasma mentionnée ci-dessus. Pour des ondes de fréquence plus basse, des ondes électromagnétiques se propagent sur des modes différents et variés.

On s'intéresse à la propagation d'une onde EM plane progressive monochromatique dans un plasma. On note $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ les champs électrique et magnétique associés à cette onde.

Ces champs agissent sur les électrons du plasma et les mettent en mouvement.

L'équation du mouvement d'un électron est :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\,\vec{E} - e\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

En admettant que (comme pour une onde dans le vide) $\dfrac{B}{E} \approx \dfrac{1}{c}$, on voit que, tant que les ions ne sont pas relativistes :

$$\left\| e\,\vec{v} \wedge \vec{B} \right\| << eE$$

On pourra ainsi négliger la force magnétique vis-à-vis de la force électrique pour étudier le mouvement des électrons :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\ \vec{E}$$

Les équations de Maxwell s'écrivent, en notant que la densité volumique de charges est nulle :

$$div\ \vec{E} = 0$$

$$div\ \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -ne\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$$

3 – Relation de dispersion des ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques :

On cherche une solution complexe des équations de Maxwell sous la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \qquad et \qquad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

On en déduit alors :

$$i\vec{k}.\underline{\vec{E}} = i\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 \quad ; \quad -i\,\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \quad ; \quad -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \vec{j} + i\omega\varepsilon_0\mu_0 \underline{\vec{E}}$$

Avec :

$$i\omega\vec{j} = \frac{ne^2}{m}\vec{E} \qquad soit \qquad \vec{j} = -i\frac{ne^2}{m\omega}\vec{E}$$

Et :

$$\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}} \quad ; \quad -\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\mu_0 \frac{ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}} + \omega\varepsilon_0\mu_0 \underline{\vec{E}}$$

Il vient :

$$-\vec{k}\wedge\left(\frac{1}{\omega}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}\right)=\frac{1}{\omega}\vec{k}^{\,2}\,\underline{\vec{E}}=-\mu_0\,\frac{ne^2}{m\omega}\,\underline{\vec{E}}+\omega\varepsilon_0\mu_0\,\underline{\vec{E}}$$

On en déduit la relation de dispersion :

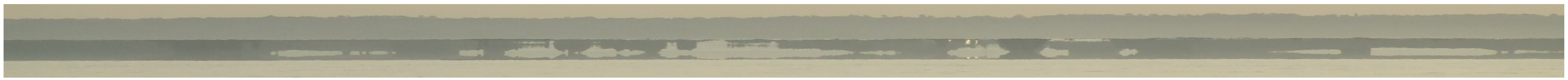
$$k^2=-\mu_0\,\frac{ne^2}{m}+\omega^2\varepsilon_0\mu_0$$

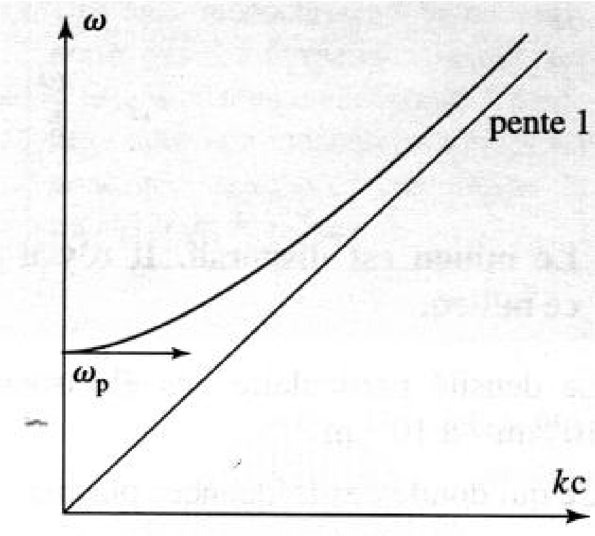
Soit, avec $c^2=\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$ et $\omega_p^2=\dfrac{\mu_0 c^2 ne^2}{m}$ (pulsation plasma) :

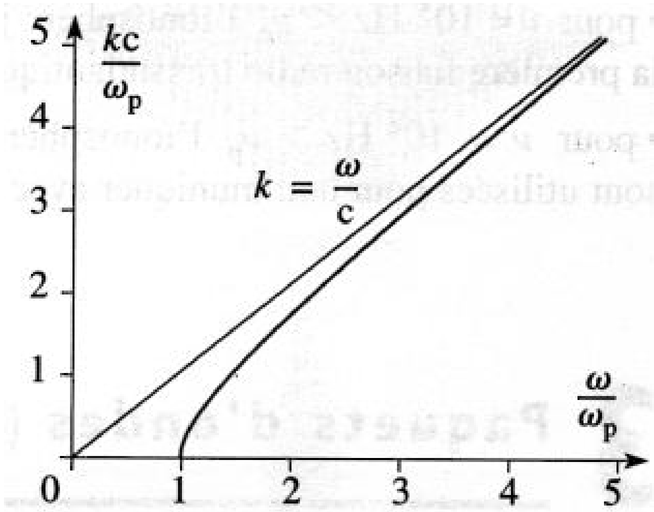
$$k^2=\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}$$

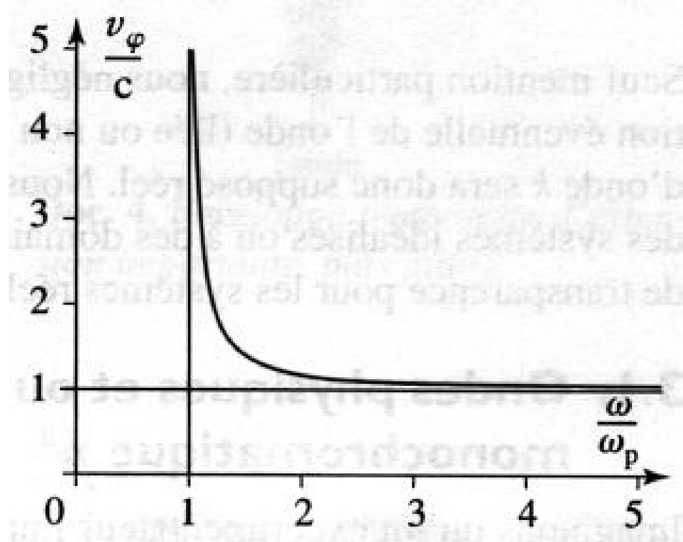
(Equation de Klein-Gordon)

k est réel si $\omega>\omega_p$: il y a alors propagation : le plasma agit vis-à-vis des ondes EM comme un filtre passe-haut de pulsation de coupure ω_p.









A haute fréquence, $k \approx \dfrac{\omega}{c}$ et $v_\varphi \approx c$: le comportement du plasma est proche de celui du vide (à cause de l'inertie des électrons).

Si $\omega < \omega_p$, alors k est imaginaire pur :

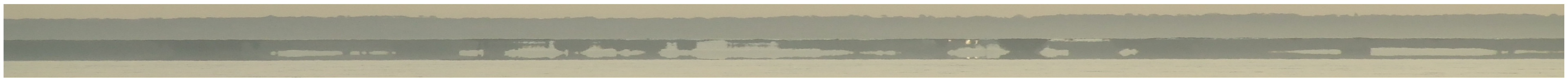
$$k = \pm i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm ik''$$

Le champ électrique de l'onde s'écrit alors sous la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t)} e^{\mp k'' x} \qquad soit \qquad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{\mp k'' x} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Seules les ondes planes monochromatiques de pulsations $\omega > \omega_p$ se propagent dans un plasma.

Dans le cas contraire, les ondes sont stationnaires et dites évanescentes (évolution exponentielle de l'amplitude selon la direction de l'onde).



4 – Structure de l'onde plane progressive harmonique :

* Vitesse de phase et indice de réfraction du plasma :

On se place dans le cas où $\omega > \omega_p$ (il y a propagation) :

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

La relation entre k et ω est non linéaire : le milieu est dispersif.

La vitesse de phase est :

$$v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}} c$$

L'indice de réfraction du plasma est défini par :

$$n = \frac{c}{v_\varphi} = \frac{ck}{\omega} \qquad \text{soit} \qquad n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1$$

On remarque que :

$$v_\varphi(\omega) > c \qquad \text{et} \qquad n < 1$$

ceci n'est pas paradoxal car cette vitesse ne correspond pas à la vitesse de l'information ou de l'énergie (c'est le cas de la vitesse de groupe).

*** Structure de l'onde EM :**

Les équations de Maxwell :

$$\vec{k}.\underline{\vec{E}} = \vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 \qquad et \qquad \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}}$$

donnent en notation réelle (k est réel) :

$$\vec{k}.\vec{E} = \vec{k}.\vec{B} = 0 \qquad et \qquad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est direct et $B = \dfrac{kE}{\omega} = \dfrac{E}{v_\varphi}$: la structure de l'onde plane progressive monochromatique est semblable à celle du vide (seule la vitesse de phase est différente et dépend de la pulsation de l'onde).

Enfin, on justifie *a posteriori* l'approximation $\left\| e\,\vec{v} \wedge \vec{B} \right\| << eE$ puisque :

$$\left\| e\,\vec{v} \wedge \vec{B} \right\| = ev\frac{E}{v_\varphi} << eE \qquad puisque\ v_\varphi > c$$

II – Propagation d'un groupe d'ondes (paquets d'ondes), vitesse de groupe :

1 – Propagation de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines :

On suppose que le vecteur d'onde est réel (on ne prend pas en compte l'absorption).

Soient $k_1 = k(\omega_1)$ et $k_2 = k(\omega_2)$ les vecteurs d'onde réels des deux ondes.

On suppose que ω_1 et ω_2 sont proches et l'on pose :

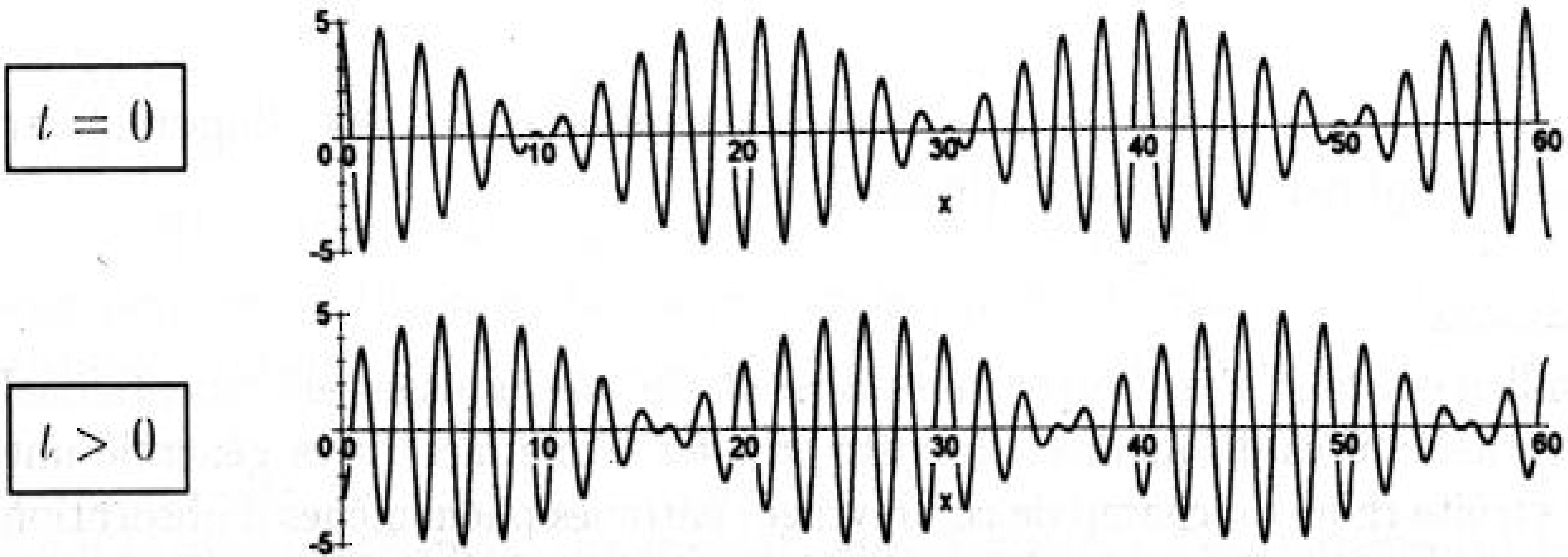
$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad ; \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad ; \quad \delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad ; \quad \delta k = k_1 - k_2$$

Avec $|\delta\omega| << \omega_0$ et $|\delta k| << k_0$.

On suppose de plus que les deux ondes ont même amplitude.

L'onde résultante, superposition de deux ondes, a pour amplitude :

$$\theta(x,t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 x) + A\cos(\omega_2 t - k_2 x) = 2A\cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right)\cos(\omega_0 t - k_0 x)$$

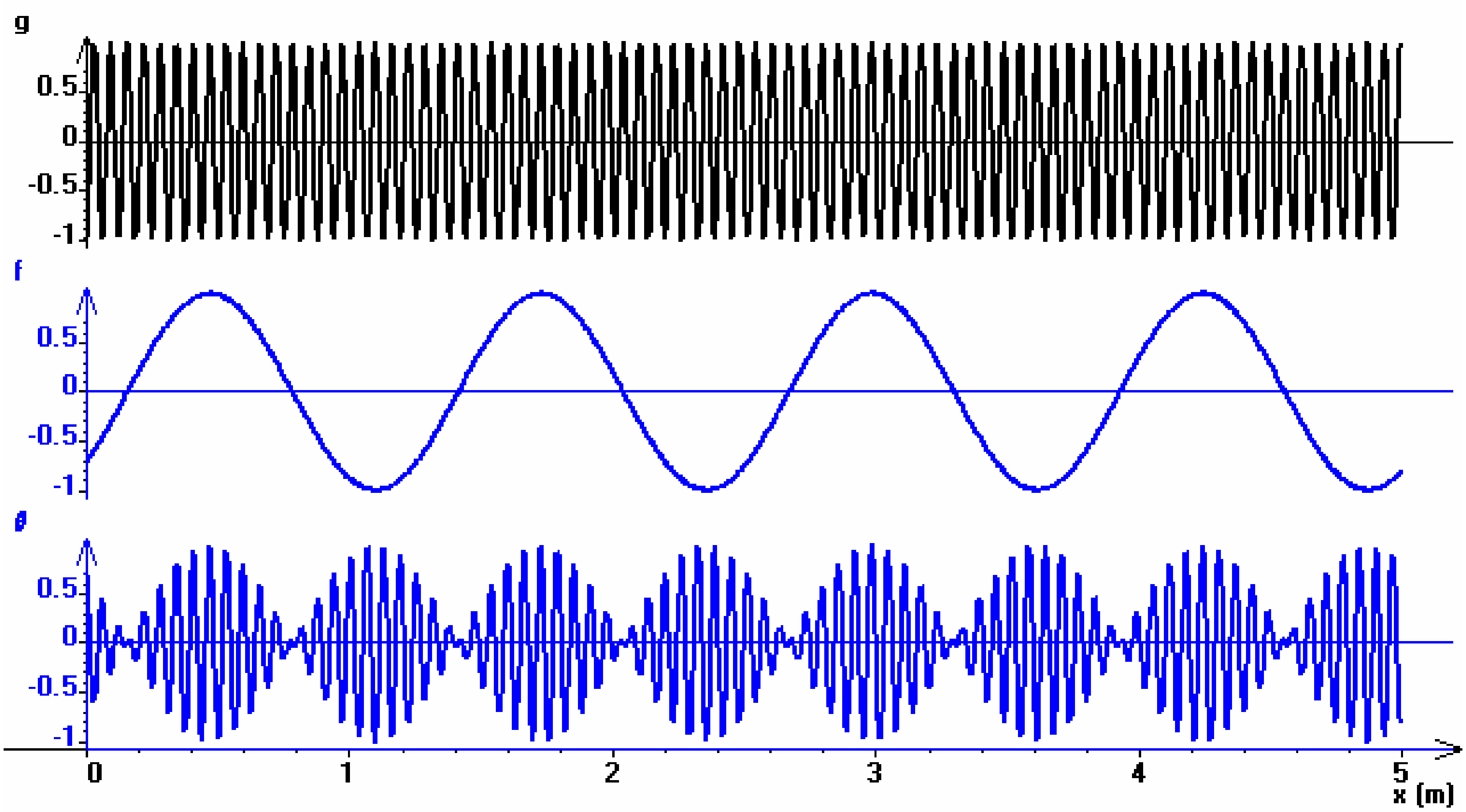


On observe des battements :

Une onde moyenne de vecteur d'onde k_0 est enveloppée par une onde enveloppe de vecteur d'onde δk.

Au cours du temps, l'onde moyenne constitue une onde plane progressive de vitesse $\dfrac{\omega_0}{k_0}$ alors que l'onde enveloppe constitue une onde plane progressive de vitesse $\dfrac{\delta\omega}{\delta k}$.

Ces vitesses n'étant en général pas identiques, les crêtes de l'onde moyenne avance à une vitesse différente de celle des crêtes de l'onde enveloppe.



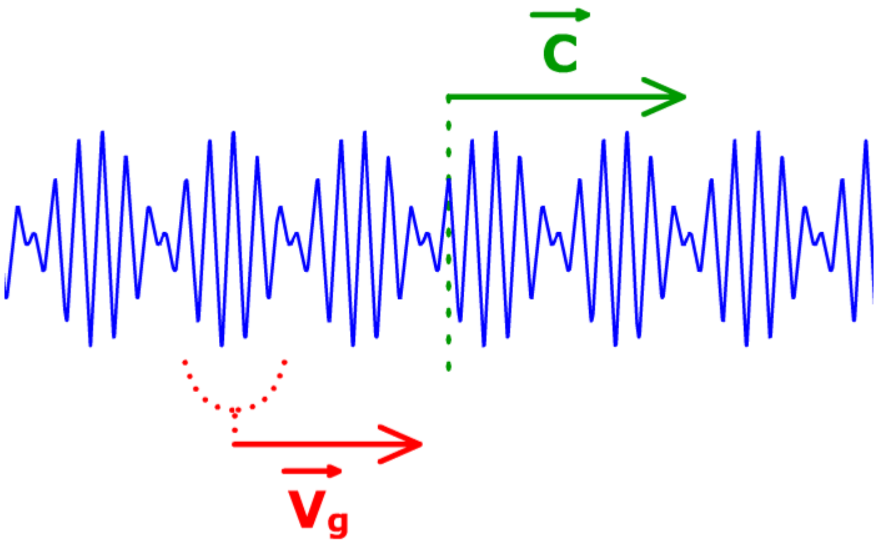
Animation Regressi

2 – Généralisation au cas d'un paquet d'ondes :

On appelle paquet d'ondes un ensemble d'ondes planes progressives harmoniques de pulsations voisines.

Plus précisément, leurs pulsations sont comprises dans l'intervalle :

$$\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right] \quad \text{avec} \quad \Delta\omega << \omega_0$$



Une illustration de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe.

On voit apparaître une onde moyenne de pulsation ω_0 se propageant à la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$$

et une onde enveloppe qui se propage à la vitesse de groupe :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}$$

Les vitesses de phase et de groupe sont *a priori* différentes et le paquet d'ondes se propage en se déformant.

En effet, chacune des composantes monochromatiques du groupe « chemine » avec sa propre vitesse, de telle sorte qu'on observe une déformation du paquet d'ondes tout au long de sa propagation. On conçoit aussi que cette déformation est accompagnée d'un étalement du paquet d'ondes dû à l'avance croissante prise par les composantes de forte vitesse.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad ; \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Animation JJ.Rousseau

Conclusions :

Pour une onde réelle, qui est la superposition d'ondes planes progressives monochromatiques se propageant dans un milieu quelconque, il est possible de définir deux vitesses :

- La vitesse de phase : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$

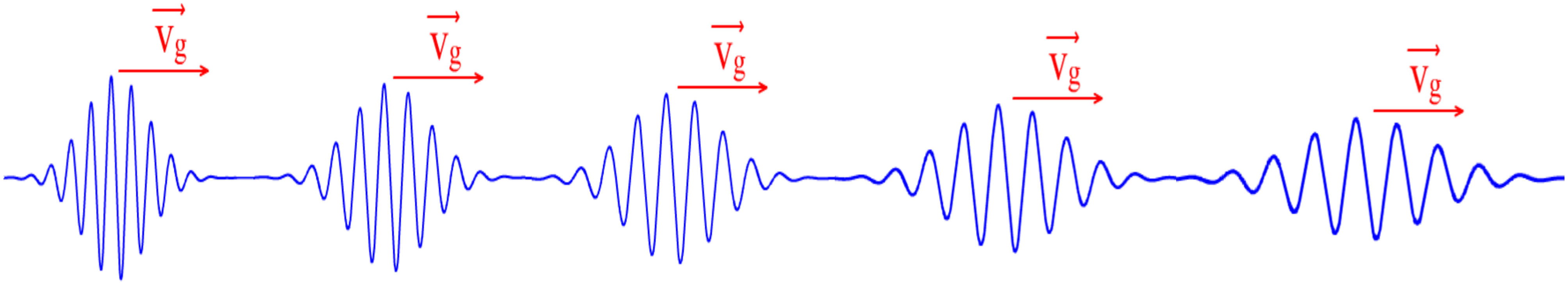
Elle correspond à la vitesse de propagation de la phase d'une composante monochromatique. Elle n'a aucune réalité physique, c'est-à-dire ne correspond pas à un transport d'énergie.

- La vitesse de groupe : $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

C'est la vitesse de propagation de l'enveloppe de l'onde. On montre qu'elle s'identifie généralement à la vitesse de propagation de l'énergie (ou de l'information). Le principe de relativité impose que la vitesse de groupe est inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

Si v_φ dépend effectivement de ω, alors la phase de chaque onde plane progressive sinusoïdale se propage à sa propre vitesse.

Une onde physique réelle, composée d'ondes planes progressives sinusoïdales, va se déformer au cours de sa propagation : c'est ce qu'on appelle la dispersion.



Paquet d'ondes avec déformation

3 – Retour à la structure de l'onde plane progressive harmonique :

* Vitesse de groupe :

La vitesse de groupe vaut :

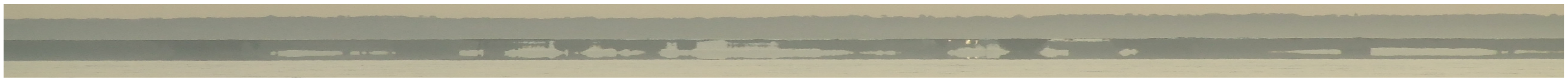
$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

On différencie la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Soit :

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \qquad \text{d'où} \qquad v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$$



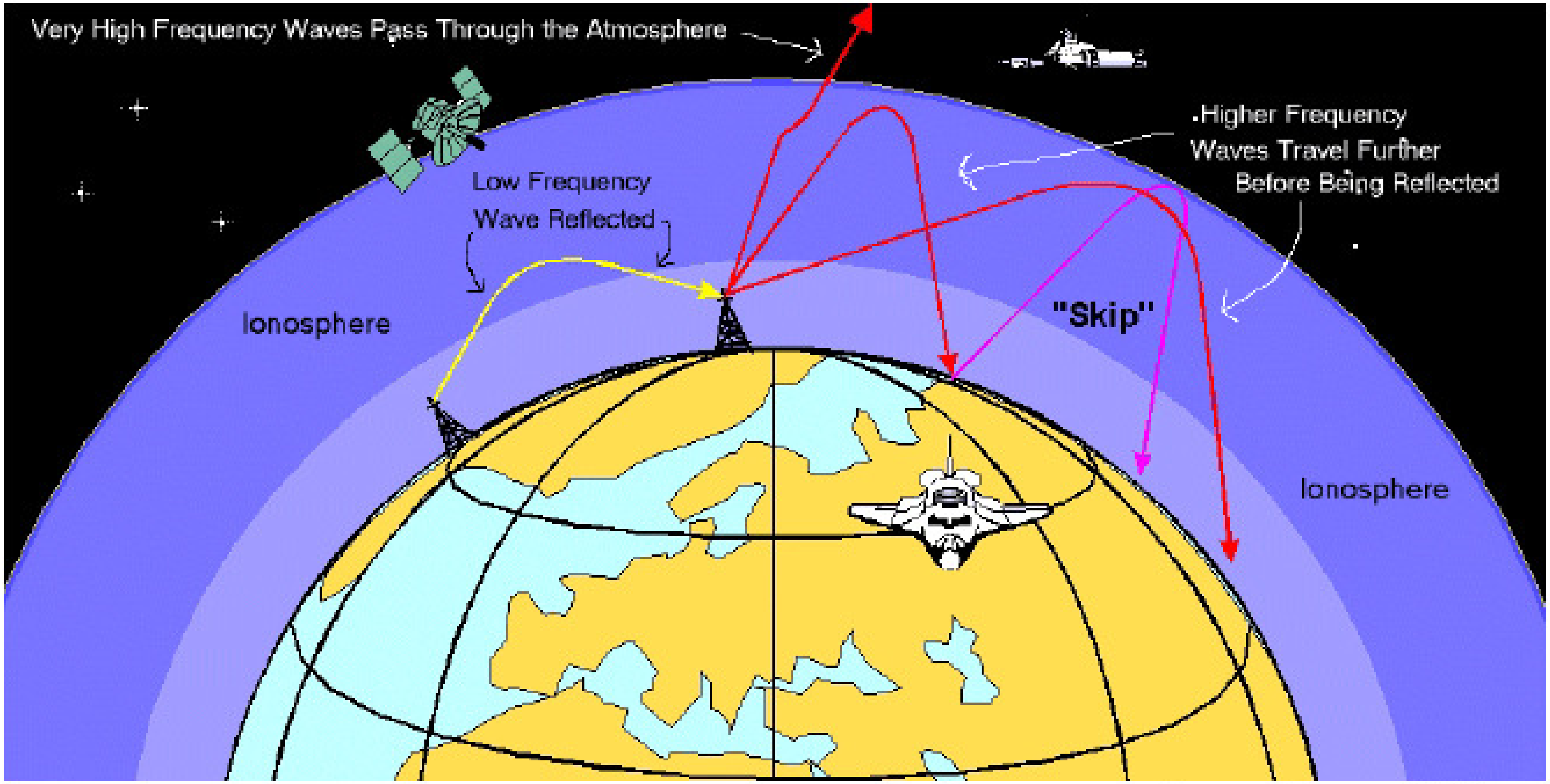
D'où :

$$v_g = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\, c$$

On constate que :

$$v_g < c \qquad \text{et que} \qquad v_\varphi v_g = c^2$$

Ionosphère / Atmosphère



[Source: Nasa - GSFC]

Quelques ordres de grandeurs :

L'ionosphère est la partie de la haute atmosphère (75 à 250 km d'altitude en plusieurs couches) où les gaz sont ionisés par le rayonnement cosmique et par le vent solaire. La densité particulaire des électrons dans l'ionosphère est de l'ordre de $10^{10}\ m^{-3}$ à $10^{12}\ m^{-3}$ et la fréquence plasma de l'ordre de $\nu_p = 10^7\ Hz$.

- Pour $\nu = 10^5\ Hz < \nu_p$, l'ionosphère joue le rôle de réflecteur : ceci explique la 1ère liaison radio transatlantique réalisée par Marconi en 1901. Ainsi des ondes radio en modulation d'amplitude peuvent atteindre des points très éloignés sur le globe.

- Pour $\nu = 10^8\ Hz > \nu_p$, l'ionosphère est « transparente ». Ces fréquences sont utilisées pour communiquer avec les satellites.

Autre exemple : France inter GO et France Info FM

France Inter GO a pour fréquence $f_{GO} = 164$ kHz et France info FM $f_{FM} = 105{,}5$ MHz.

On voit que :

$$f_{GO} < \nu_p < f_{FM}$$

Ainsi, les GO se réfléchissent sur l'ionosphère et pourront être captées à des distances nettement plus importantes du lieu d'émission que France Info dont les ondes se propagent dans l'ionosphère.

III – Compléments : aspect énergétique et cas d'un milieu isolant dilué :

1 - Coefficients de réflexion et de transmission :

Voir exercice n°13.

2 – Propagation d'une onde EM dans un milieu isolant dilué :

On se propose d'étudier le modèle simplifié suivant de la propagation d'une onde dans un milieu neutre dilué (du verre, par exemple) et de démontrer l'expression de la loi de Cauchy donnée en 1ère année ($n(\lambda) = A + B / \lambda^2$).

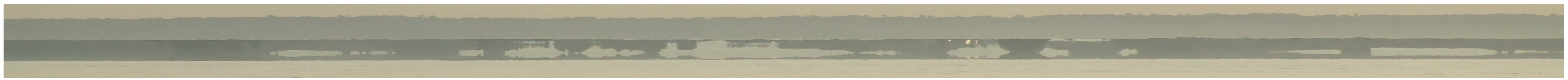
On appelle n_0 le nombre d'électrons par unité de volume et on suppose que seul le mouvement des électrons est à prendre en compte.

Sous l'action du champ électrique $\vec{E} = E\vec{u}_x$, les électrons ont un mouvement qui lui est colinéaire et que l'on peut caractériser par l'équation différentielle :

$$m\ddot{x} = -kx - f\dot{x} - eE$$

où x est le déplacement de l'électron, k et f des constantes du modèle. On posera :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad \tau = \frac{m}{f} \quad ; \quad \omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}$$



Une onde plane EM de pulsation ω, de polarisation rectiligne selon (Ox), se propage dans la direction (Oz) dans ce milieu et son champ électrique s'écrit :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(kz - \omega t))\, \vec{u}_x$$

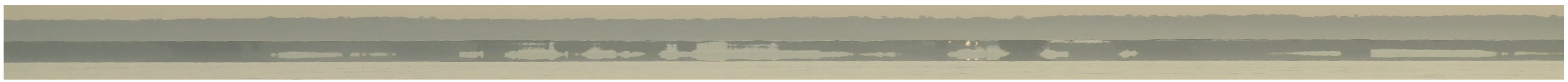
1) Comparer l'équation différentielle à celle du modèle de plasma vu dans le cours. Quels sont les termes supplémentaires ? A quelles propriétés physiques correspondent-ils ?

2) Chercher la solution correspondant au régime forcé : $\underline{\underline{x}}(z,t) = \underline{x}_0 \exp(i(kz - \omega))$

3) En déduire, en notation complexe, la densité volumique de courant due au mouvement des électrons.

4) A partir des équations de Maxwell, établir une équation aux dérivées partielles liant $\vec{E}$ et $\vec{j}$.

5) En déduire la relation de dispersion du milieu. Quel phénomène traduit le fait que k soit complexe ?



6) Dans cette question, on suppose que f = 0 et que $\omega_0 >> \omega$. L'indice du milieu pour la pulsation ω est défini par la relation : $v_\varphi = c/n$, où v_φ est la vitesse de phase.

Montrer que l'on peut écrire une formule approchée : $n^2 = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$, où λ est la longueur d'onde dans le vide d'une onde de pulsation ω et où A et B sont des constantes caractéristiques du milieu que l'on exprimera en fonction de ω_0, ω_p et c.

Comment en déduire ensuite la loi de Cauchy ?