QUELQUES RAPPELS DE MÉCANIQUE NON RELATIVISTE DU POINT MATÉRIEL (RAPPELS DE COURS DE PREMIÈRE ANNÉE)

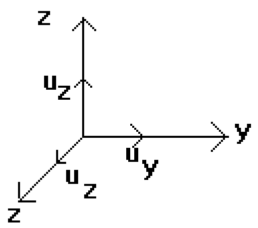
I) CINÉMATIQUE : DÉFINITIONS FONDAMENTALES :

1) Vitesse :

a) Définition :

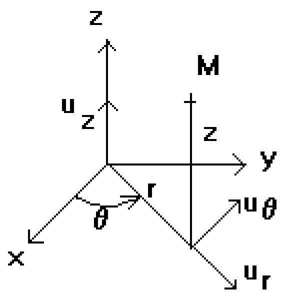
la vitesse du point M dans le référentiel R =(O,x,y,z) est : $v_{M/R} = \left(\dfrac{dOM}{dt}\right)_R$

b) Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes :



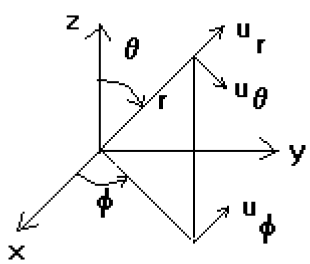
$$v_{M/R} = \dot{x}\,u_x + \dot{y}u_y + \dot{z}u_z$$

c) Expression de la vitesse en coordonnées cylindriques :



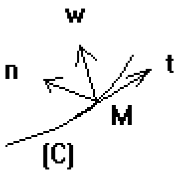
$$v_{M/R} = \dot{r}\,u_r + r\dot{\theta}u_\theta + \dot{z}\,u_z$$

d) Expression de la vitesse en coordonnées sphériques :



$$v_{M/R} = \dot{r}\,u_r + r\dot{\theta}\,u_\theta + r\,\mathbf{sin}\,\theta\,\dot{\varphi}\,u_\varphi$$

e) Expression de la vitesse sur la base du trièdre de Frenet :



$$\vec{v}_{M/R} = v\,\vec{\tau}$$

2) Accélération :

a) Définition :

l'accélération du point M dans le référentiel R = (O,x,y,z) est:

$$\vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d\left(\vec{v}_{M/R}\right)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right)_R$$

b) Expression de l'accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a}_{M/R} = \ddot{x}\,\vec{u}_x + \ddot{y}\,\vec{u}_y + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

c) Expression de l'accélération en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a}_{M/R} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}.\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

d) Expression de l'accélération en coordonnées sphériques :

$$\vec{a}_{M/R} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta + a_\varphi\vec{u}_\varphi$$

où :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\ \theta$$

$$a_\theta = 2\dot{r}.\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta.\cos\theta$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}.\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}.\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta$$

e) Expression de l'accélération sur la base de Frenet :

$$\vec{a}_{M/R} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{t} + \frac{1}{R_C}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{n}$$

où : $\vec{t}$ = vecteur unitaire tangent à la trajectoire

$\vec{n}$ = vecteur normal principal à la trajectoire

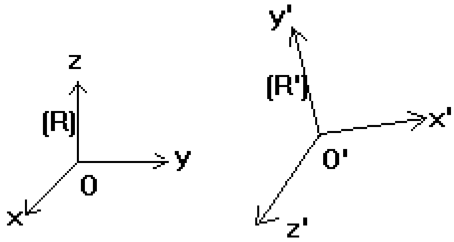
s = abscisse curviligne le long de la trajectoire

R_C = rayon de courbure de la trajectoire

II) CINÉMATIQUE : CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL :

1) Position du problème :

On considère deux référentiels : R = (O,x,y,z) et: R' = (O',x',y',z') en mouvement quelconque l'un par rapport à l'autre. On appellera : R le référentiel absolu
R' le référentiel relatif



2) Dérivées par rapport au temps, dans R, des vecteurs $u'_{x'}$,$u'_{y'}$,$u'_{z'}$:

théorème : il existe un vecteur unique $\Omega_{R'/R}$,appelé vecteur rotation d'entraînement du référentiel R' par rapport au référentiel R, tel que :

$$\left(\frac{du'}{dt}\right)_R = \Omega_{R'/R} \wedge u' \quad \text{pour : } u' = u'_{x'}, u'_{y'}, u'_{z'}$$

3) Etude des vitesses :

théorème : $v_a(M) = v_r(M) + v_{ent}(M)$

où: $v_{ent}(M) = v_R(O') + \Omega_{R'/R} \wedge O'M$

$v_{ent}(M)$ est la vitesse d'entraînement du point M, c'est-à-dire la vitesse dans le référentiel absolu R du point fixe P'(M) du référentiel relatif R' coïncidant, à l'instant considéré avec le point M

4) Etude des accélérations :

théorème : $a_a(M) = a_r(M) + a_{ent}(M) + a_c(M)$

où : $$a_{ent}(M) = a_R(O') + \left(\frac{d\Omega_{R'/R}}{dt}\right)_R \wedge O'M + \Omega_{R'/R} \wedge \left[\Omega_{R'/R} \wedge O'M\right]$$

et : $$a_c(M) = 2\Omega_{R'/R} \wedge v_{M/R'}$$

$a_{ent}(M)$ est l'accélération d'entraînement du point M, c'est-à-dire l'accélération dans le référentiel absolu R du point fixe P'(M) du référentiel R' coïncidant, à l'instant considéré,avec le point M

$a_c(M)$ est l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire du point M

5) Dérivée par rapport au temps d'un vecteur quelconque $\underline{K}$:

théorème : $$\left(\frac{dK}{dt}\right)_R = \left(\frac{dK}{dt}\right)_{R'} + \Omega^{R'}/_R \wedge K$$

III) PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE :

1) Quantité de mouvement :

définition : la quantité de mouvement p_R d'une particule de masse inertielle m, de position M, dans un référentiel R, est : $p_R = mv^M/_R$

définition: la quantité de mouvement p_R d'un ensemble de particules de masses inertielles m_i, dans un référentiel R,est: $p_R = \sum_i p_{Ri}$

2) Référentiels galiléens :

définition : une particule libre ou isolée est une particule ne subissant, ni n'exerçant aucune action

définition : un système isolé de particules est un système de particules pouvant être en interaction entre elles, mais telles que chaque particule du système soit sans interaction avec l'extérieur du système

définition : on appelle référentiel inertiel un référentiel R tel que, par rapport à ce référentiel R, une particule isolée ou un système isolé de particules soit tel que : $\left(\frac{dp_R}{dt}\right)_R = 0$

quels que soient : 1)l'instant t
2)la position M (ou les positions M_i)
3)la vitesse $v^M/_R$ (ou les vitesses $v^{Mi}/_R$)

définition : on appelle référentiel galiléen un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel inertiel

principe de relativité :
1) il existe un référentiel inertiel
2) toutes les lois physiques sont invariantes par changement de référentiel galiléen

théorème : l'ensemble des référentiels galiléens est tel que l'un quelconque de ces référentiels est en translation rectiligne uniforme par rapport à l'un quelconque autre de ces référentiels

3) Exemples de référentiels approximativement galiléens :

a) Référentiel de Copernic :

origine = centre de masse du système solaire ; axes dirigés vers trois étoiles fixes postulat : le référentiel de Copernic est galiléen

b) Référentiel héliocentrique :

origine = centre du Soleil ; axes dirigés vers trois étoiles fixes
le référentiel héliocentrique est en translation par rapport au référentiel de Copernic

c) Référentiel géocentrique :

origine = centre de la Terre ; axes dirigés vers trois étoiles fixes
le référentiel géocentrique est en translation non rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic (il n'est donc pas galiléen)

d) Référentiel terrestre :

origine = centre de la Terre ; axes liés à la Terre
le référentiel géocentrique est en translation et rotation par rapport au référentiel de Copernic (il n'est donc pas galiléen)

4) Force ; principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen :

définition ("principe fondamental de la dynamique") : dans un référentiel galiléen R, on appelle force agissant sur une particule la dérivée par rapport au temps, dans le référentiel considéré, de la quantité de mouvement de la particule : $F = \left(\frac{dp_R}{dt}\right)_R = ma_R$

principe ("loi de l'action et de la réaction") : lorsque deux particules 1 et 2 sont en interaction entre elles et sans interaction avec le reste de l'univers (c'est-à-dire si l'ensemble des deux particules constitue un système isolé), alors la force exercée par la particule 1 sur la particule 2 est opposée à la force exercée par la particule 2 sur la particule 1 et la direction commune de ces deux forces est la direction joignant les positions des deux particules

5) Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen :

théorème : le principe fondamental de la dynamique reste valable dans un référentiel R' animé d'un mouvement quelconque par rapport à un référentiel galiléen R si, et seulement si on ajoute à la force F s'appliquant à la particule dans le référentiel galiléen R les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

$$F + F_{ent} + F_c = ma^{M}/_{R'}$$

où : $F_e = -ma_{ent}(M)$

$F_c = -ma_c(M)$

remarque : l'équation d'équilibre d'une particule dans un référentiel R' non galiléen est : $F + F_{ent} = 0$

IV) MOMENT CINÉTIQUE :

1) Définition :

définition : le moment cinétique en A d'une particule, dans le référentiel R, de masse m, de position M et de vitesse dans R : $v^{M}/_{R}$, est : $\sigma_{A/R} = AM \wedge p_R$

remarque : $\sigma_{A'/R} = \sigma_{A/R} + p_R \wedge AA'$

2) Théorème du moment cinétique :

a) Moment d'une force en un point :

définition : si l'on considère une particule de masse m, située au point M, sur laquelle s'applique la force F, le moment au point A de cette force est : $M(A) = AM \wedge F$

b) Théorème du moment cinétique :

théorème : la dérivée par rapport au temps, dans un référentiel galiléen R, du moment cinétique en un point A fixe du référentiel R d'un point matériel est égale au moment en ce point A de la force s'appliquant à ce point matériel : $\left(\frac{d\sigma^{A}/_{R}}{dt}\right)_R = M(A)$

remarque :
1) on peut étendre le théorème du moment cinétique, dans un référentiel galiléen R, à un point A non fixe dans R à condition d'écrire, si $v^{A}/_{R}$ est la vitesse dans R du point A :

$$\left(\frac{d\sigma_R(A)}{dt}\right)_R = M(A) - v^{A}/_{R} \wedge p_R$$

corollaire : le théorème du moment cinétique s'écrit, dans un référentiel galiléen, en un point A non fixe, de la même façon que si A était fixe, lorsque la vitesse du point A est parallèle à celle du point matériel étudié

2) on peut écrire le théorème du moment cinétique dans un référentiel R' non galiléen comme dans un référentiel galiléen à condition de tenir compte des moments des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis

V) TRAVAIL ; ÉNERGIE :

1) Puissance,travail :

a) Puissance d'une force :

définition : la puissance P_R, dans un référentiel R, d'une force F s'appliquant à une particule de position M, ayant dans R la vitesse $v^{M}/_{R}$, est: $P_R = F.v^{M}/_{R}$

b) Travail d'une force :

définition : le travail élémentaire, dans le référentiel R, $\delta W(R)$, entre les instants t et t + dt, d'une force F s'appliquant à une particule parcourant dans le référentiel R, pendant dt, l'espace dr, est : $\delta W_R = F.dr_R$

c) Remarques :

la puissance et le travail d'une force dépendent du référentiel dans lequel on les définit et on les calcule

2) Energie cinétique :

définition : l'énergie cinétique, dans un référentiel R, d'un point matériel de masse m et de vitesse dans R : $v^{M}/_{R}$ est : $K_R = \frac{1}{2} m (v^{M}/_{R})^2 = \frac{1}{2} m (v^{M}/_{R})^2$

3) Théorème de l'énergie cinétique :

théorème : dans un référentiel galiléen R, la variation d'énergie cinétique K d'un point matériel entre deux instants t_1 et t_2 est égale au travail dans le référentiel R, entre ces deux instants, des forces appliquées au point matériel : $W_{AB,R} = K_R(B) - K_R(A)$

théorème : dans un référentiel non galiléen R', la variation d'énergie cinétique $K_{R'}$ d'un point matériel entre deux instants t_A et t_B est égale à la somme du travail dans le référentiel R', entre ces deux instants, des forces appliquées au point matériel et de la force d'inertie d'entraînement :

$W_{AB,R'} + W_{ent\ AB,R'} = K_{R'}(B) - K_{R'}(A)$

4) Energie potentielle, énergie mécanique :

définition : si la force F s'appliquant à une particule matérielle est telle qu'il existe une fonction U_R telle qu'à tout instant on puisse écrire, dans le référentiel R : $F = -\mathrm{grad}(U_R)$ (ou bien: $\delta W_R = - dU_R$), alors on dit que la force F dérive, dans le référentiel R, du potentiel ou de l'énergie potentielle U_R

théorème : lorsque la force F appliquée à un point matériel dérive, dans le référentiel R, d'un potentiel U_R, son travail dans R $W_{AB,R}$, lors du déplacement du point matériel de A en B, est égal à la diminution du potentiel U_R : $W_{AB,R} = U_{R,A} - U_{R,B}$. Ce travail est donc indépendant du chemin suivi de A vers B: il ne dépend que des positions A et B

définition : si un point matériel est soumis à une force F dérivant, dans le référentiel R, d'un potentiel U_R, alors on appelle énergie mécanique de la particule dans le référentiel R : $E_R = U_R + K_R$

théorème : si un point matériel n'est soumis, dans un référentiel galiléen R, qu'à des forces dérivant de potentiels, alors son énergie mécanique dans le référentiel R est constante

5) Caractérisation d’un équilibre grâce à l’énergie potentielle :

théorème : pour un système constitué d’un point matériel à un seul degré de liberté et soumis à une force dérivant d’une énergie potentielle, le système est en équilibre si et seulement si cette énergie potentielle est extrémale ; l’équilibre est stable si l’extremum est un minimum et instable si l’extremum est un maximum

généralisation à un système constitué d’un point matériel à plus d’un degré de liberté