MP5

Physique

complément au cours de mécanique

RAPPELS SUR LES TORSEURS

I) DÉFINITION D'UN TORSEUR :

1) Champ vectoriel (rappel) :

définition : un champ vectoriel $\vec{V}$ est une application d'un espace affine (A) dans son espace vectoriel associé (E) : $P \in (A) \rightarrow \vec{V}_P \in (E)$

2) Torseur :

définition : un torseur est un champ vectoriel $\vec{M}$ équiprojectif, c'est-à-dire tel que :

$$\forall P, Q \in (A), \vec{M}_P . \overrightarrow{PQ} = \vec{M}_Q . \overrightarrow{PQ}$$

II) CARACTÉRISATION D'UN TORSEUR :

1) Champ vectoriel affine :

définition : un champ vectoriel $\vec{V}$: $P \in (A) \rightarrow \vec{V}_P \in (E)$ est un champ vectoriel affine si, et seulement s'il existe un point O de (A) et un endomorphisme f de (E) tels que :

$$\forall P \in (A), \vec{V}_P = \vec{V}_O + f\left(\overrightarrow{OP}\right)$$

2) Endomorphisme antisymétrique de (E) :

définition : une application f de (E) dans (E) est antisymétrique si, et seulement si :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in (E), \vec{x}.f(\vec{y}) = -\vec{y}.f(\vec{x})$$

théorème : une application f de (E) dans (E) antisymétrique est linéaire (c'est-à-dire est un endomorphisme de (E))

3) Équivalence entre champ vectoriel équiprojectif et champ vectoriel affine dont l'endomorphisme associé est antisymétrique :

théorème : un champ vectoriel M est un champ équiprojectif si, et seulement si M est un champ vectoriel affine dont l'endomorphisme associé est antisymétrique

4) Résultante d'un torseur :

théorème : M est un torseur, si et seulement s'il existe un vecteur R unique appartenant à (E) tel que :

$$\forall P, Q \in (A), M_Q = M_P + R \wedge PQ$$

où: R est la résultante du torseur

M_P est le moment en P du torseur (de résultante R)

notation : le torseur de moment en P M_P et de résultante R sera noté : $\{T\} = \begin{Bmatrix} R \\ M_P \end{Bmatrix}$

5) Invariant scalaire :

définition-théorème : pour un torseur $\{T\} = \begin{Bmatrix} R \\ M_P \end{Bmatrix}$, le produit scalaire : $J = R.M_P$ est indépendant du point P ; on l'appelle invariant scalaire du torseur

III) COMPOSITION DE TORSEURS :

1) Somme de deux torseurs :

définition-théorème : si $\{\mathbf{T_1}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R_1} \\ \mathbf{M_{1P}} \end{Bmatrix}$ et $\{\mathbf{T_2}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R_2} \\ \mathbf{M_{2P}} \end{Bmatrix}$ sont deux torseurs, $\{T_1 + T_2\} = \begin{Bmatrix} R_1 + R_2 \\ M_{1P} + M_{2P} \end{Bmatrix}$ est un torseur, appelé torseur somme : $\{T\} = \{T_1\} + \{T_2\}$

2) Dérivée d'un torseur par rapport au temps :

ATTENTION : la dérivée d'un torseur par rapport au temps t n'est pas un torseur !

3) Comoment ou produit scalaire de deux torseurs :

définition : le comoment ou produit (scalaire) $\{T_1\}\otimes\{T_2\}$ des deux torseurs $\{\mathbf{T_1}\} = \begin{cases}\mathbf{R_1}\\ \mathbf{M_{1P}}\end{cases}$ et $\{\mathbf{T_2}\} = \begin{cases}\mathbf{R_2}\\ \mathbf{M_{2P}}\end{cases}$ est :

$$\{T_1\}\otimes\{T_2\} = R_1.M_{2P} + R_2.M_{1P}$$

théorème : le comoment ou produit (scalaire) de deux torseurs est indépendant du point où on le calcule

4) Moment d'un torseur par rapport à un axe:

définition-théorème : le moment $M(\Delta, K)$ d'un torseur $\{\mathbf{T}\} =_{\mathbf{P}} \begin{cases}\mathbf{R}\\ \mathbf{M_P}\end{cases}$ par rapport à un axe $\Delta = (u, K)$ est:

$M(\Delta, K) = u.M_K$, qui est indépendant du point K choisi sur l'axe

IV) TORSEURS ELEMENTAIRES , C'EST-A-DIRE D'INVARIANT SCALAIRE NUL :

1) Torseur nul

2) Couple :

définition : un torseur $(T) = \begin{cases}R\\ M\end{cases}$ est un couple si, et seulement si sa résultante R est nulle : $R = 0$

théorème : un couple est un champ vectoriel uniforme

3) Glisseur :

définition : un torseur $(T) = \begin{cases}R\\ M\end{cases}$ est un glisseur si, et seulement si sa résultante est non nulle et que son invariant scalaire est nul : $R \neq 0$ et $J = 0$

théorème : si et seulement si un torseur $\{T\}$ est un glisseur, il existe une infinité de points de (A) où le moment est nul ; ces points sont portés par une droite colinéaire à la résultante R, appelée axe du glisseur

V) DÉCOMPOSITION D'UN TORSEUR :

1) Première décomposition :

théorème : un point P de (A) étant choisi, un torseur se décompose, de façon unique, en somme d'un couple et d'un glisseur dont l'axe passe par P

2) Deuxième décomposition : axe d'un torseur :

théorème : un torseur $\{T\}$ se décompose de façon unique en somme d'un couple et d'un glisseur colinéaires (c'est-à-dire tels que l'axe du glisseur soit parallèle au moment du couple en tout point de cet axe)

théorème : il existe une infinité de points P de (A) où M_P est colinéaire à la résultante R du torseur; ces points constituent une droite, appelée axe du torseur, qui est colinéaire à R

théorème : l'axe d'un torseur est l'ensemble des points où le moment a un module minimal