MP5 Physique

plan du cours de mécanique du solide

ÉTUDE GÉNÉRALE D'UN SOLIDE ; CAS PARTICULIERS D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE OU D'UN POINT FIXE

ÉTUDE CINÉTIQUE

A) CAS PARTICULIER D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE :

I) MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE :

1) Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe :

définition : on appelle moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe la grandeur :

$$J_\Delta = \iiint_V r^2.\rho(M).d\tau(M)$$

où r est la distance du point M de (S) à l'axe

théorème : si un solide (S) est en rotation autour d'un axe fixe Δ d'un référentiel R, alors :

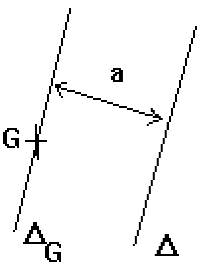
$$L_{R,\Delta} = J_\Delta.\Omega_{S/R} \qquad \text{où} \quad \Omega_{S/R} = \Omega_{S/R}\, u$$

remarque importante : cette relation reste vraie, de façon instantanée, s'il y a rotation, autour d'un axe $\Delta(t_0)$ à l'instant t_0, c'est-à-dire si, à l'instant t_0, le torseur cinématique du solide dans R est un glisseur (mais, dans ce cas, J_Δ n'est pas nécessairement une constante)

définition : on appelle rayon de giration k d'un système matériel (S), de masse totale m, par rapport à un axe Δ la longueur k telle que : $J = m.k^2$

2) Théorème de Huygens :

théorème : le moment d'inertie d'un système matériel par rapport à un axe Δ est égal à la somme du moment d'inertie du système matériel par rapport à un axe Δ_G parallèle à Δ et contenant le barycentre G du système matériel et du moment d'inertie par rapport à Δ d'un point matériel fictif de masse égale à la masse totale du système matériel et situé au barycentre G du système matériel :

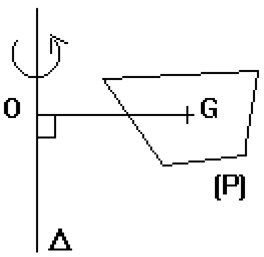


$$J_{\Delta} = J_{\Delta G} + m.a^2$$

3) Théorèmes de Guldin :

a) premier théorème :

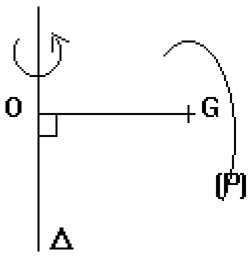
si l'on considère une plaque (P) d'épaisseur négligeable,si G est son barycentre, si Δ est un axe ne traversant pas la plaque et coplanaire de celle-ci, si O est la projection orthogonale de G sur Δ, alors : si la surface de la plaque (P) est S et si, lorsqu'on fait tourner celle-ci autour de l'axe, celle-ci engendre un volume V, on a :



$$OG = \frac{V}{2\pi S}$$

b) deuxième théorème :

si l'on considère un fil plan (Γ), si G est son barycentre, si Δ est un axe ne traversant pas le fil et coplanaire de celui-ci, si O est la projection orthogonale de G sur Δ, alors: si la longueur du fil (Γ) est L et si, lorsqu'on fait tourner celui-ci autour de l'axe Δ, celui-ci engendre une surface S, on a :



$$OG = \frac{S}{2\pi L}$$

II) ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE :

théorème : l'énergie cinétique dans le référentiel R d'un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe dans R est : $T_{S/R} = \frac{1}{2} J_{\Delta_R} .(\Omega_{S/R})^2$ où $J_{\Delta R}$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ_R

remarque importante : cette relation reste vraie, de façon instantanée, s'il y a rotation, autour d'un axe $\Delta(t_0)$, à l'instant t_0, c'est-à-dire si, à l'instant t_0, le torseur cinématique du solide dans R est un glisseur (mais, dans ce cas, J_{Δ} n'est pas nécessairement une constante)

ÉTUDE DYNAMIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE

1) Position du problème :

un solide en rotation autour d'un axe fixe possède un seul degré de liberté : l'angle θ repérant la position autour de l'axe de rotation d'un axe lié au solide

2) Équations différentielles régissant le mouvement :

définition (rappel) : on appelle moment par rapport à l'axe $\Delta = (A, u)$ des forces auxquelles est soumis un système matériel : $M_\Delta = M(A).u$, où $M(A)$ est le moment en A des forces auxquelles est soumis le système

équation du mouvement : $J_{oz}.\ddot{\theta} = N'$

où : J_{OZ} est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation Oz

N' est le moment des forces auxquelles est soumis le solide par rapport à l'axe de rotation Oz

3) Cas plus général d'un solide en rotation par rapport à un axe de direction fixe :

a) Étude du moment cinétique :

théorème : si un solide est, dans (R), en rotation autour d'un axe Δ de direction fixe u (c'est-à-dire si le torseur cinématique du solide dans (R) est un glisseur d'axe Δ), alors le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation s'écrit : $\frac{d\left(J_\Delta \Omega_{S/R}\right)}{dt} = M_{ext\Delta}$ (mais, dans ce cas, J_Δ n'est pas nécessairement une constante)

théorème : si un solide est, dans (R), en rotation autour d'un axe Δ de direction fixe u (c'est-à-dire si le torseur cinématique du solide dans (R) est un glisseur d'axe Δ), alors le solide est en rotation dans son référentiel barycentrique (R^*) autour d'un axe Δ^* fixe dans (R^*) et le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation s'écrit, dans (R^*) : $J_{\Delta^*} \frac{d\left(\Omega_{S/R}\right)}{dt} = M_{ext\Delta}$ (et, dans ce cas, J_{Δ^*}est une constante)

b) Étude de l'énergie cinétique :

théorème : si un solide est, dans (R), en rotation autour d'un axe Δ de direction fixe u (c'est-à-dire si le torseur cinématique du solide dans (R) est un glisseur d'axe Δ), alors le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $\frac{d\left(\frac{1}{2} J_\Delta \Omega_{S/R}^{\ 2}\right)}{dt} = P_{ext\Delta}$ (mais, dans ce cas, J_Δ n'est pas nécessairement une constante) théorème : si un solide est, dans (R), en rotation autour d'un axe Δ de direction fixe $\vec{u}$ (c'est-à-dire si le torseur cinématique du solide dans (R) est un glisseur d'axe Δ), alors le solide est en rotation dans son référentiel barycentrique (R^*) autour d'un axe Δ^* fixe dans (R^*) et le théorème de l'énergie cinétique s'écrit, dans (R^*) : $J_{\Delta^*}\Omega_{S/R}\dfrac{d\left(\Omega_{S/R}\right)}{dt} = P_{ext\Delta}$ (et, dans ce cas, J_{Δ^*} est une constante)

MÉTHODE GÉNÉRALE DE RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE DU SOLIDE

1. Définir le système étudié

2. Définir le référentiel dans lequel on étudie ce système

3. Paramétrer le système c'est-à-dire définir les paramètres décrivant l'évolution du système dans le référentiel considéré.
   En déduire le nombre de degrés de liberté du système, c'est-à-dire le nombre de paramètre scalaires dont il faudra déterminer l'évolution en fonction du temps

4. Faire le bilan des actions mécaniques s'exerçant sur le système (en simplifiant ce bilan par la prise en compte du théorème de l'action et de la réaction)

5. Ecrire les théorèmes généraux de la mécanique, sachant qu'il faut un nombre d'équations scalaires égal au nombre de degrés de liberté :

   - Le PFD donne des renseignements sur le mouvement du barycentre d'un solide (3 équations scalaires au maximum)

   - Le théorème du moment cinétique écrit en G ou dans le référentiel barycentrique donne des renseignements sur le mouvement propre d'un solide (3 équations scalaires au maximum)

   - Si le système est à un seul degré de liberté, le théorème de l'énergie cinétique (ou la conservation de l'énergie mécanique) donne directement l'évolution de l'unique paramètre décrivant le système en fonction du temps (1 équation scalaire)