

Mécanique du solide

Mécanique du solide

I) Cinétique des systèmes matériels :

1 – Rappel ; composition des vitesses et des accélérations :

Soit (R) un premier référentiel (appelé « absolu », $(Oxyz)$) et (R') un référentiel (appelé « relatif », $(O'x'y'z')$) en mouvement par rapport à (R) .

- (R') est en translation par rapport à (R) :

Composition des vitesses :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}_e = \vec{v}'(M) + \vec{v}(O')$$

Composition des accélérations :

$$\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e = \vec{a}'(M) + \vec{a}(O')$$

- (R') est en rotation autour d'un axe fixe de (R) : (O et O' sont confondus)

Composition des vitesses :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}'(M) + \vec{v}_e = \vec{v}'(M) + \vec{\Omega}_{(R')/(R)} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Composition des accélérations :

$$\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}(M) = \vec{a}'(M) + \left[\frac{d\vec{\Omega}_{(R')/(R)}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_{(R')/(R)} \wedge (\vec{\Omega}_{(R')/(R)} \wedge \overrightarrow{OM}) \right] + \left[2\vec{\Omega}_{(R')/(R)} \wedge \vec{v}'(M) \right]$$

Exemple : un forain sur un manège pour enfants

Un manège d'enfants tourne à une vitesse angulaire constante $\omega > 0$ constante. Le propriétaire parcourt la plate-forme pour ramasser les tickets. Partant du centre à $t = 0$, il suit un rayon de la plate-forme avec un mouvement uniforme de vitesse v_r .

- a) Etablir l'équation de la trajectoire de l'homme dans le référentiel terrestre (trajectoire vue par les parents).
- b) Déterminer la vitesse de l'homme par rapport à la Terre, à partir des équations de la trajectoire puis en utilisant la composition des vitesses.
- c) Déterminer l'accélération de l'homme par rapport à la Terre, à partir des équations de la trajectoire puis en utilisant la composition des accélérations.



2 – Centre d’inertie d’un système, référentiel barycentrique :

Dans le cas de solides ou de systèmes matériels, on est amené à définir une masse volumique, une masse surfacique ou encore une masse linéique :

$$m = \iiint_{(V)} \rho(M) d\tau \quad ; \quad m = \iint_{(S)} \sigma(M) dS \quad ; \quad m = \int_{(C)} \lambda(M) dl$$

Le centre d’inertie d’un système sera défini par :

- Distribution discontinue :

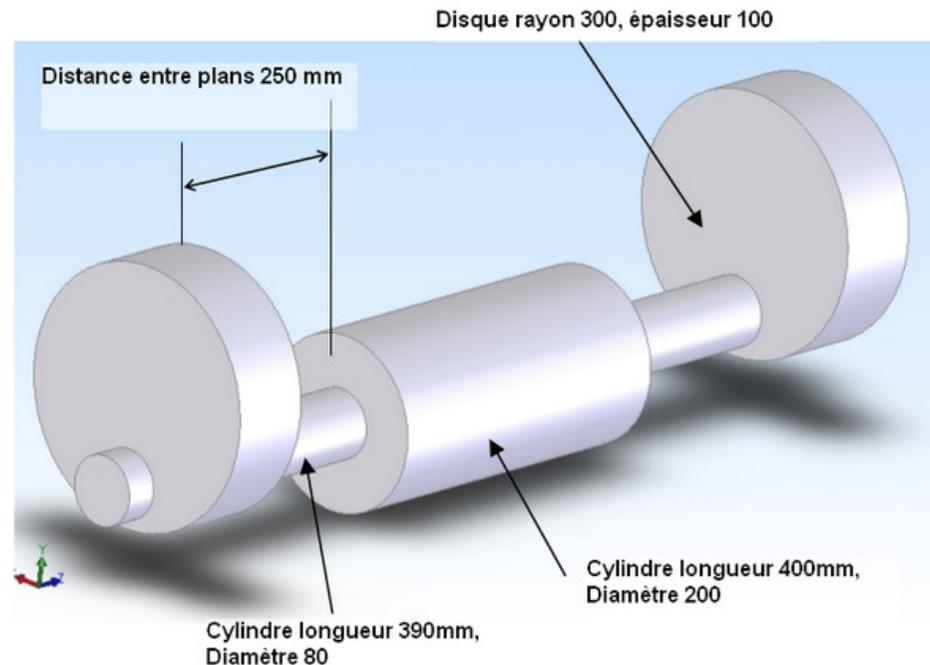
$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0} \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i}{m}$$

- Distribution continue volumique :

$$\iiint_{(V)} \rho(M) \overrightarrow{GM} d\tau = \vec{0} \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_{(V)} \rho(M) \overrightarrow{OM} d\tau}{m}$$

Le centre d'inertie possède la propriété d'associativité : le centre d'inertie G d'un système (S) , constitué de deux systèmes S_1 et S_2 de masse m_1 et m_2 et de centres d'inertie G_1 et G_2 , est défini par :

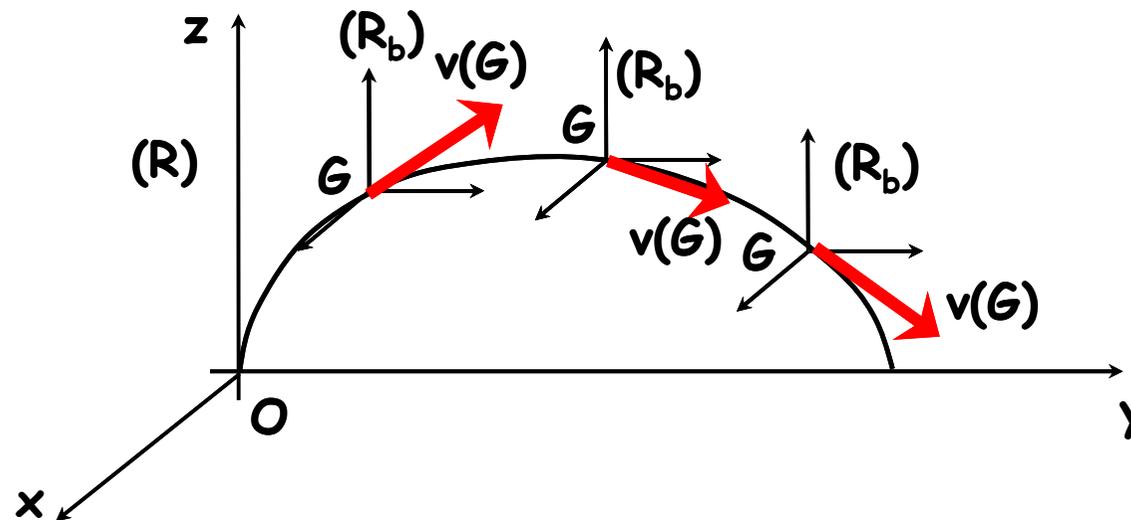
$$(m_1 + m_2) \overrightarrow{OG} = m_1 \overrightarrow{OG_1} + m_2 \overrightarrow{OG_2}$$



Quel est le centre d'inertie de ce solide ?

Référentiel barycentrique :

Le mouvement du système est étudié dans le référentiel (R) . On appelle *référentiel barycentrique* (R_b) relatif au référentiel (R) , le référentiel de centre G et animé d'un mouvement de translation à la vitesse $\vec{v}(G)$ par rapport à (R) .



La loi de composition des vitesses s'écrit sous la forme :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}_b(M) + \vec{v}(G)$$

3 – Résultante cinétique et moment cinétique d'un système matériel :

- Résultante cinétique (ou quantité de mouvement totale du système) :

$$\vec{P} = \iiint_{(V)} \rho(M) \vec{v}(M) d\tau = m\vec{v}(G)$$

Dans le référentiel barycentrique, la résultante cinétique est évidemment nulle.

- Moment cinétique :

Le moment cinétique par rapport à O du système, dans le référentiel (R) est :

$$\vec{L}_O = \iiint_{(V)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho(M) \vec{v}(M) d\tau$$

Théorème de Kœnig pour le moment cinétique :

$$\vec{L}_O = \iiint_{(V)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho(M) \vec{v}(M) d\tau = \iiint_{(V)} (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}) \wedge \rho(M) (\vec{v}_b(M) + \vec{v}(G)) d\tau$$

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}(G) + \iiint_{(V)} \overrightarrow{GM} \wedge \rho(M) \vec{v}_b(M) d\tau$$

Soit :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}(G) + \vec{L}_{G,b}$$

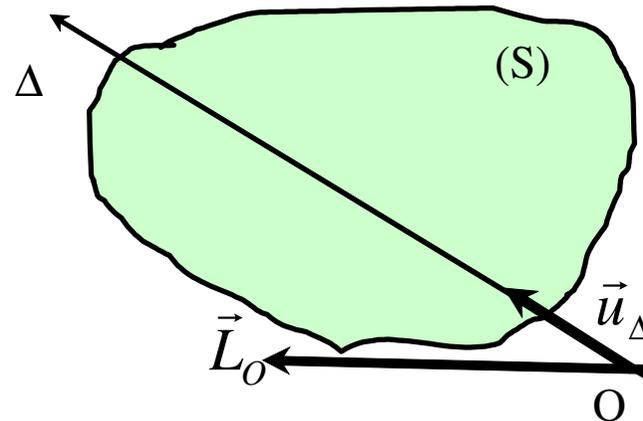
Remarque :

Le moment cinétique barycentrique ne dépend pas du point où on le calcule. En effet :

$$\vec{L}_G = \vec{L}_{G,b} = \vec{L}_{A,b} = \vec{L}_b$$

Moment cinétique par rapport à un axe :

La projection du moment cinétique \vec{L}_O du système (S) sur un axe Δ passant par O définit le moment cinétique L_Δ de (S) par rapport à Δ .



Ainsi, en introduisant le vecteur unitaire \vec{u}_Δ de l'axe (Δ), on obtient :

$$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$$

On vérifie facilement que L_Δ est indépendant du point O de l'axe Δ .

La notion de moment cinétique par rapport à un axe est intéressante lorsque le système (un solide par exemple) est justement en rotation autour de cet axe Δ .

4 – Torseur cinétique :

Résultante cinétique et moment cinétique d'une part possèdent les propriétés d'un concept mathématique appelé *torseur* que nous allons définir.

- Notion de torseurs :

On considère un ensemble de points M_i et à chacun de ces points on associe un vecteur \vec{q}_i (ce vecteur pourra être la vitesse, la quantité de mouvement, une force qui agit en ce point, ...). On définit alors :

* La résultante :
$$\vec{R} = \sum_i \vec{q}_i$$

* Le moment en O :
$$\vec{M}_O = \sum_i (\overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{q}_i)$$

On vérifie aisément que le moment en deux points O et A vérifient la relation :



$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OA} \quad (\text{BABAR !!!})$$

La résultante \vec{R} et le moment en O, \vec{M}_O , sont appelés éléments de réduction en O du torseur (T) associé au système de vecteurs \vec{q}_i . La donnée des éléments de réduction en un point O définit complètement le torseur puisqu'il est alors possible de calculer les éléments de réduction en tout autre point A :

$$\vec{R} \text{ est indépendante de A et } \vec{M}_A = \vec{M}_O + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R}$$

- Torseur cinétique :

On vérifie que, dans le référentiel (R), la résultante cinétique \vec{P} et le moment cinétique \vec{L}_O en un point O d'un système matériel (S) forment les éléments de réduction d'un torseur, appelé torseur cinétique et noté $T_c(\vec{P}, \vec{L}_O)$. On a notamment :

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{P}$$

5 – Energie cinétique d'un système matériel :

- Définition :

$$E_c = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} \rho(M) \vec{v}(M)^2 d\tau$$

- Théorème de Kœnig pour l'énergie cinétique :

On montre que :

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}(G)^2 + \iiint_{(V)} \frac{1}{2} \rho(M) \vec{v}_b(M)^2 d\tau$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}(G)^2 + E_{c,b}$$

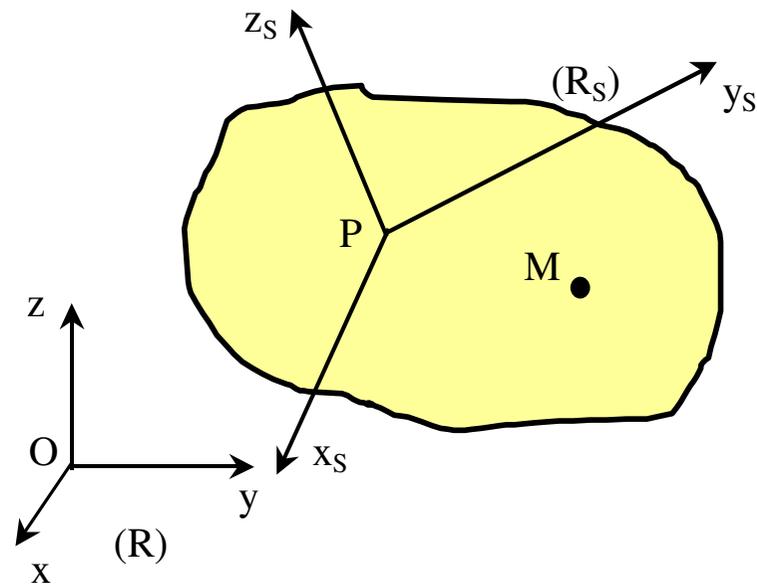
II) Mouvement d'un solide :

1 – Le solide en mécanique :

On appelle « solide » un corps indéformable : la distance entre deux points quelconques d'un solide reste constante au cours du temps.

2 – Champ des vitesses :

Le solide (S) se déplace dans le référentiel (R). On considère le référentiel (R_S) lié au solide (S) d'origine P (point rigidement lié au solide).



On considère un point M rigidement lié au solide ; on note $\vec{\Omega}_{R_s/R} = \vec{\Omega}$ le vecteur vitesse angulaire instantanée du référentiel (R_s) par rapport à (R) , qui est *a priori* une fonction vectorielle du temps.

La formule de Varignon (loi de dérivation dans les référentiels (R) et (R_s)) donne :

$$\left(\frac{d(\overrightarrow{PM})}{dt} \right)_{(R)} = \left(\frac{d(\overrightarrow{PM})}{dt} \right)_{(R_s)} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}$$

Après calculs :

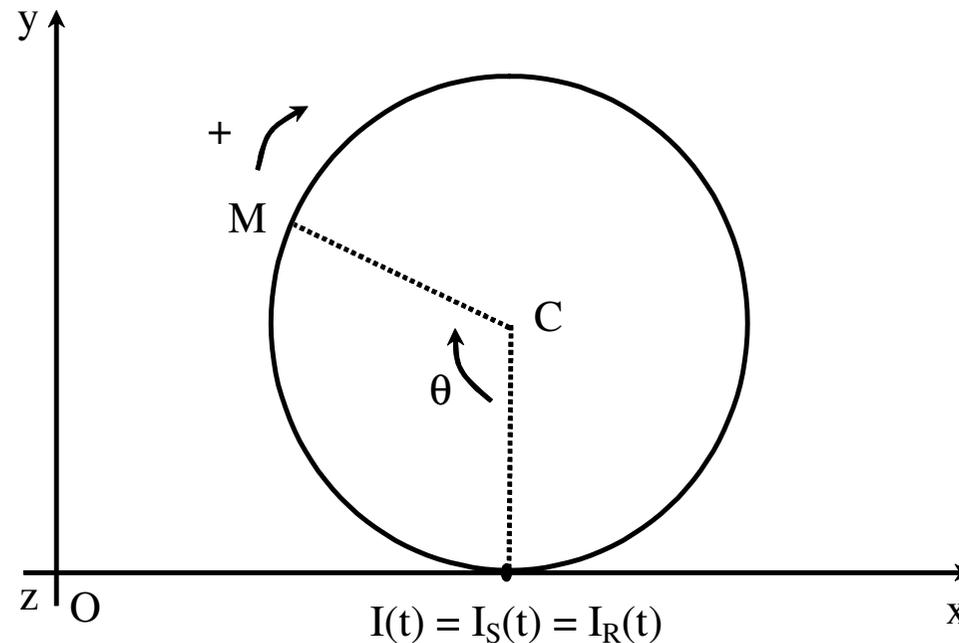
$$\vec{v}(M) = \vec{v}(P) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}$$

On constate que les vitesses des points d'un solide vérifient la loi caractéristique des moments d'un torseur, appelé « torseur des vitesses » ou « torseur cinématique », dont :

- la résultante est le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{R_S/R} = \vec{\Omega}$.
- le moment en P est la vitesse $\vec{v}(P)$ du point P de (S) dans (R).

Premier exemple : le mouvement d'une roue

On considère une roue de rayon b , de centre C, se déplaçant sur le sol horizontal fixe dans (R), en restant dans le même plan vertical.



On appelle I le point de contact de la roue et du sol à l'instant t . On peut en fait distinguer trois points au niveau du contact de la roue avec le sol :

- le point I_S du sol qui est fixe dans (R) .
- le point I_R de la roue qui, lorsqu'elle roule, ne se trouve plus au contact du sol à un instant ultérieur.
- le point géométrique I qui localise le contact.

Dans le référentiel (R) lié au sol, la vitesse du point I_S est bien évidemment nulle.

La vitesse du point I_R de la roue s'exprime en fonction de celle du centre C :

$$\vec{v}(I_R) = \vec{v}(C) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CI_R} = \vec{v}(C) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CI}$$

où $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ est le vecteur vitesse angulaire instantanée de la roue.

Le mouvement de la roue peut se décomposer en un mouvement de translation du centre

d'inertie C et en un mouvement de rotation autour de l'axe (C, \vec{u}_z) à la vitesse angulaire :

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z = -\dot{\theta} \vec{u}_z$$

La vitesse $\vec{v}(I_R)$ s'appelle *vitesse de glissement* de la roue sur le sol, $\vec{v}_g = \vec{v}(I_R)$. Elle est tangente au sol.

La roue roule sans glisser sur le sol lorsque :

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_R) = \vec{0}$$

Si on note x l'abscisse de C (et donc celle de I), on peut écrire :

$$\vec{v}_g = \dot{x} \vec{u}_x + (-\dot{\theta} \vec{u}_z) \wedge (-b \vec{u}_y) = (\dot{x} - b \dot{\theta}) \vec{u}_x$$

La condition de non glissement donne alors :



$$\dot{x} - b\dot{\theta} = 0$$

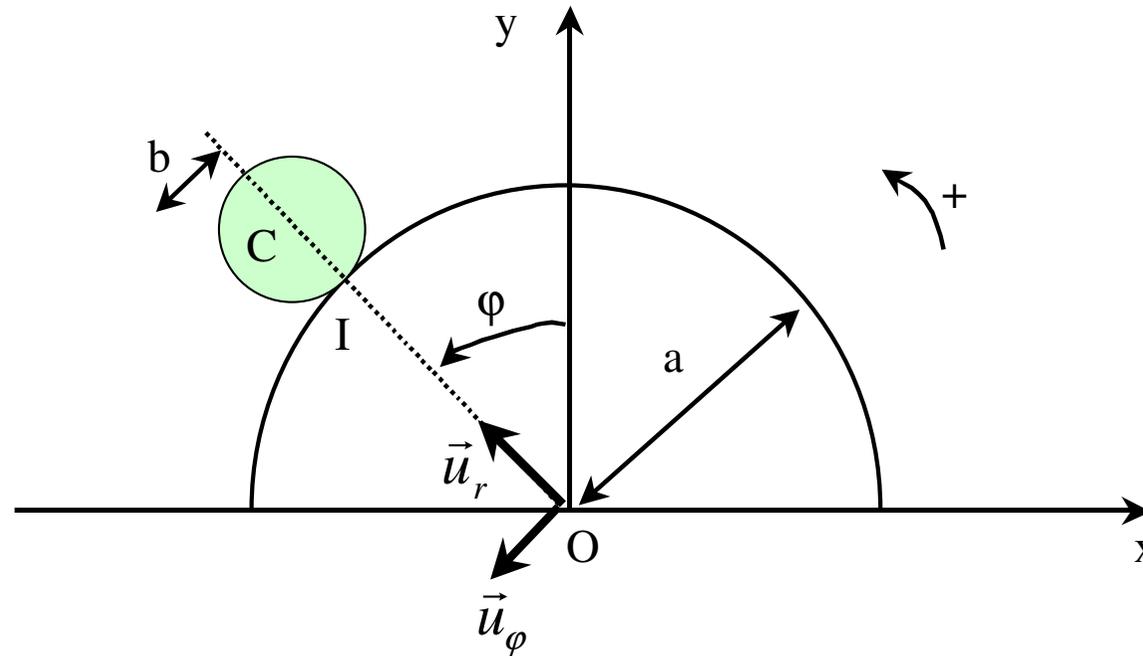
Remarque :

Cette condition de non glissement revient à écrire que :

$$OI = x = I\widehat{M} = b\theta$$

2^{em} exemple ; mouvement d'une roue sur un support cylindrique

La roue de centre C et de rayon b roule sans glissement sur un support cylindrique de centre O et de rayon a, fixe dans (R), tout en restant dans un plan vertical.



Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de la roue en fonction de l'angle $\varphi = (\vec{u}_y, \overrightarrow{OC})$.

On souhaite écrire :

$$\vec{v}(I) = \vec{v}(C) + \Omega \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{CI} = \vec{0}$$

puisque'il n'y a pas glissement de la roue sur le support cylindrique.

Or :

$$\overrightarrow{CI} = -b\vec{u}_r \quad ; \quad \vec{v}(C) = \frac{d}{dt}((a+b)\vec{u}_r) = (a+b)\dot{\phi}\vec{u}_\varphi \quad ; \quad (a+b)\dot{\phi}\vec{u}_\varphi - \Omega b\vec{u}_\varphi = \vec{0}$$

Par conséquent :

$$\Omega = \frac{a+b}{b} \dot{\phi}$$

3 – Eléments cinétiques ; relations typiques pour un solide :

- Rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

On considère un solide (S) en rotation autour d'un axe Δ lié au solide et fixe dans (R) (Oxyz). Très souvent, le référentiel d'étude sera le référentiel barycentrique (R_b) (Gxyz) et les axes (Oz) et (Gz) seront soit confondus soit parallèles à l'axe de rotation Δ .

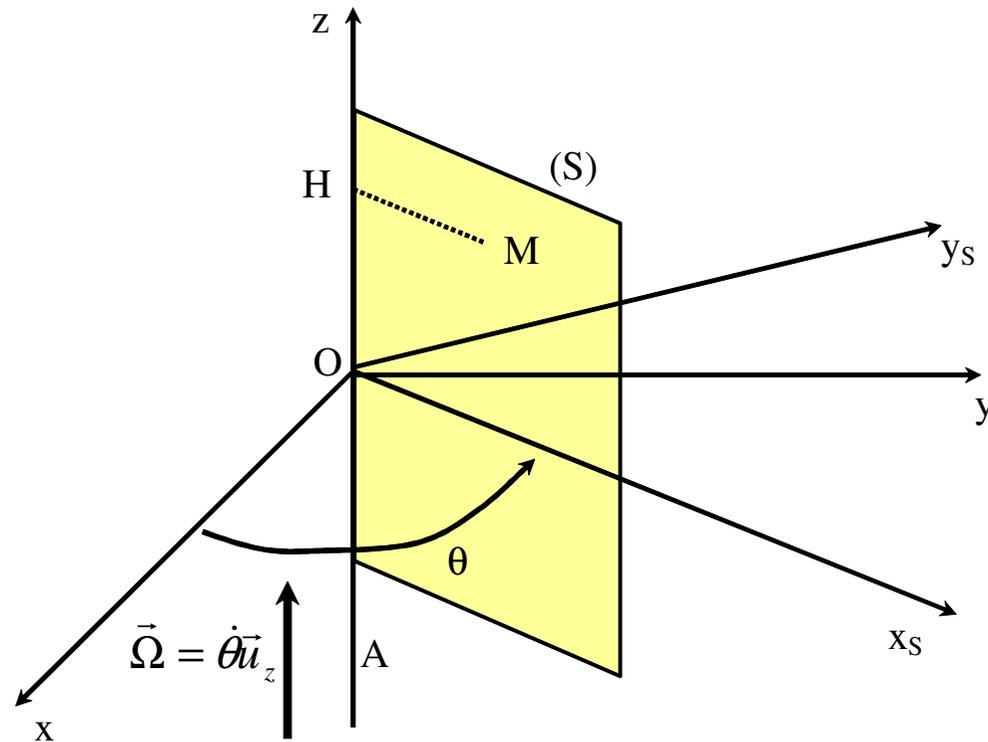
Le solide est supposé homogène et on notera :

$$m = \iiint_{(V)} \rho(M) d\tau = \iiint_{(V)} dm$$

On pourra ensuite généraliser aux répartitions discrètes, surfaciques ou linéiques.

Moment cinétique en un point de l'axe :

On prend l'exemple d'une porte qui tourne autour de ses gonds.



Le solide et le référentiel lié au solide $R_{(S)}(Ox_s y_s z)$ tourne à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ autour de l'axe (Oz).

On veut calculer le moment cinétique du solide dans le référentiel (R) par rapport à un point A situé sur l'axe de rotation :

$$\vec{L}_A = \iiint_{(V)} \overrightarrow{AM} \wedge dm \vec{v}(M)$$

On introduit le point H tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_z = AH$$

Après calculs :

$$\vec{L}_A = \left(\iiint_{(V)} HM^2 dm \right) \vec{\Omega} - \Omega \iiint_{(V)} AH \overrightarrow{HM} dm = \vec{L}_{A, //} + \vec{L}_{A, \perp}$$

Moment d'inertie :

On note $L_{\Delta} = \vec{L}_{A, //} \cdot \vec{u}_{\Delta}$ la coordonnée du moment cinétique sur l'axe Δ : L_{Δ} est appelé moment cinétique du solide par rapport à l'axe Δ :

$$L_{\Delta} = \left(\iiint_{(V)} HM^2 dm \right) \Omega$$

Il est indépendant du point A.

On définit le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ :

$$J_{\Delta} = \iiint_{(V)} HM^2 dm = \iiint_{(V)} r^2 dm \quad ; \quad L_{\Delta} = J_{\Delta} \Omega$$

où $r = HM$ désigne la distance du point M à l'axe de rotation.

J_{Δ} est une caractéristique du solide et ne dépend que de la répartition des masses dans le solide.

Quelques exemples :

* Tige de longueur $2b$, axe passant par son centre : $J_{\Delta} = \frac{1}{3}mb^2$

* Cerceau de rayon R , axe passant par son centre : $J_{\Delta} = mR^2$

* Disque ou cylindre plein de rayon R , axe passant par son axe : $J_{\Delta} = \frac{1}{2}mR^2$

* Sphère creuse de rayon R , axe passant par un diamètre : $J_{\Delta} = \frac{2}{3}mR^2$

* Sphère pleine de rayon R , axe passant par un diamètre : $J_{\Delta} = \frac{2}{5}mR^2$

Moment cinétique perpendiculaire à l'axe :

$$\vec{L}_{A,\perp} = -\Omega \iiint_{(V)} AH \overrightarrow{HM} dm$$

$\vec{L}_{A,\perp}$ est perpendiculaire au vecteur rotation (à l'axe (Oz)). Il n'est en général pas nul.

On peut montrer qu'il est nul :

- * Lorsque l'axe de rotation coïncide avec un axe de symétrie du solide
- * Lorsque le solide est plan dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation en A.

Energie cinétique :

L'énergie cinétique du système dans (R) est :

$$E_c = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} dm \vec{v}^2 (M) = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} dm r^2 \Omega^2$$

Soit :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega^2$$

On constate que l'énergie cinétique ne dépend pas de la composante $\vec{L}_{A,\perp}$ du moment cinétique.

Utilisation des théorèmes de Kœnig :

Avec des notations évidentes :

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}(G) + J_{Gz} \Omega \vec{u}_z + \vec{L}_{G,b,\perp}$$

Le plus souvent, $\vec{L}_{G,b,\perp} = \vec{0}$ ((Gz) sera un axe de symétrie du système).

Pour l'énergie :

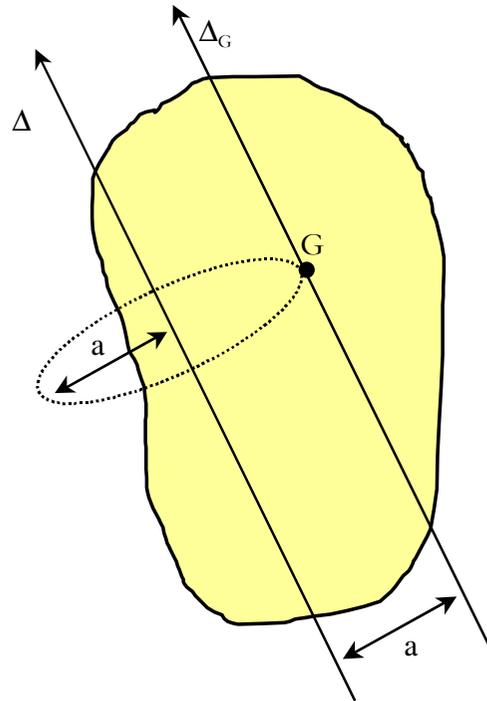
$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 (G) + \frac{1}{2} J_{Gz} \Omega^2$$

Le théorème de Huygens :

Le théorème de Huygens permet de relier les moments d'inertie J_{Δ} d'un solide par rapport à un axe Δ et $J_{\Delta,G}$ du solide par rapport à l'axe Δ_G parallèle à Δ et passant par G :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta,G} + ma^2$$

où a désigne la distance entre les deux axes de rotation.

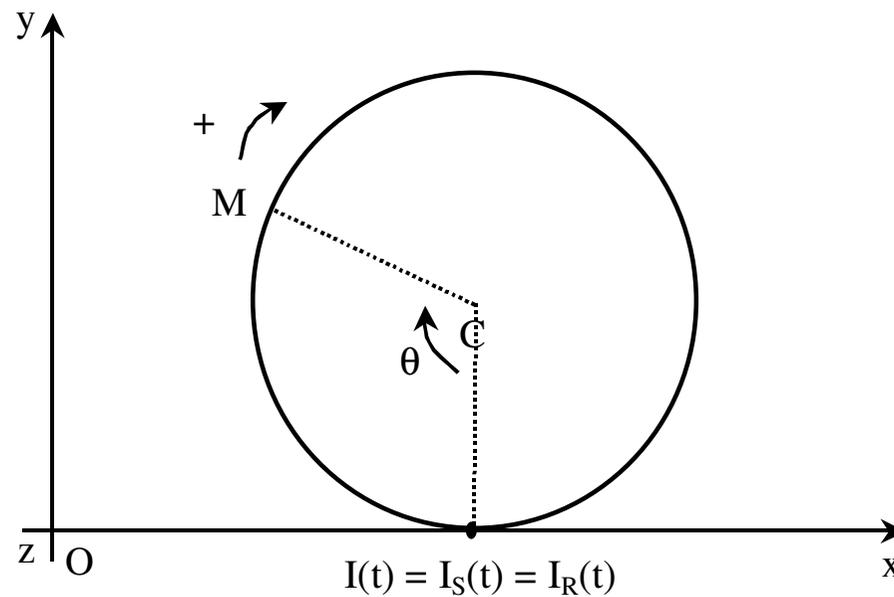


Exemple : (cas de la roue)

On peut calculer l'énergie cinétique de la roue dans le référentiel du sol.

Dans le référentiel barycentrique :

$$E_{c,b} = \frac{1}{2} J_{z,C} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} mb^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} mb^2 \dot{\theta}^2$$



Le théorème de Kœnig relatif à l'énergie donne :

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 (C) + \frac{1}{4} m b^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m b^2 \dot{\theta}^2$$

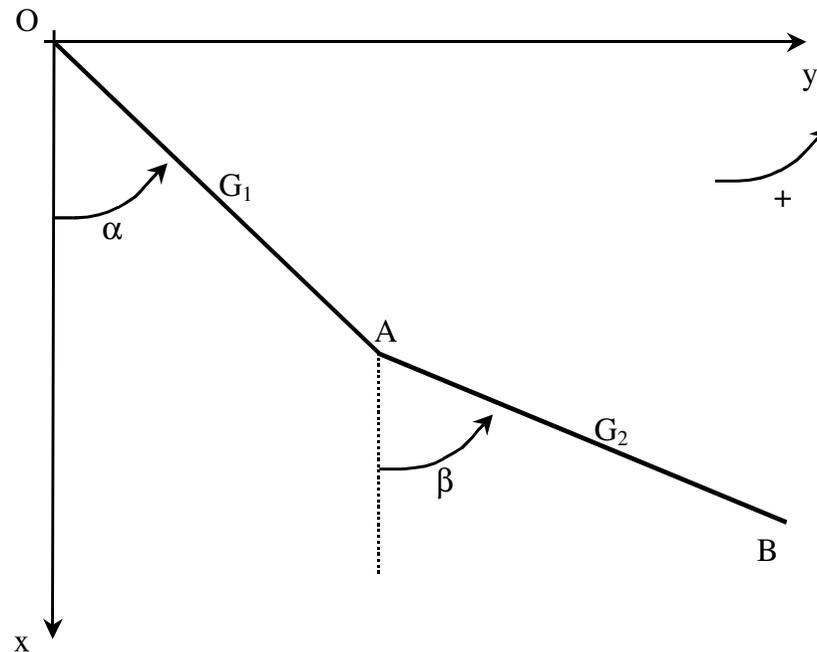
Si on suppose que la roue roule sans glisser, $\dot{x} - b \dot{\theta} = 0$ et :

$$E_c = \frac{3}{4} m b^2 \dot{\theta}^2$$

Exemple (le pendule double) :

Un pendule double est constitué de deux barres OA et AB identiques, homogènes, de masse m , de longueur $2b$ et articulées en A.

Les deux barres sont astreintes à se déplacer dans le plan vertical (Oxy) et leurs inclinaisons sont définies par les angles α et β (voir figure).



Calculer le moment cinétique par rapport à l'axe Oz et l'énergie cinétique de ce pendule double.

Le moment d'inertie d'une barre de longueur $2b$ par rapport à sa médiatrice est $J = \frac{1}{3}mb^2$.

Pour la barre OA :

$$J_{Oz} = \frac{4}{3}mb^2 \quad ; \quad L_{A,Oz} = \frac{4}{3}mb^2\dot{\alpha} \quad ; \quad E_{c,A} = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2$$

Pour la barre AB :

Les théorèmes de Kœnig donnent :

$$L_{B,Oz} = (\overrightarrow{OG_2} \wedge m\vec{v}(G_2)) \cdot \vec{u}_z + \frac{1}{3}mb^2\dot{\beta}$$

$$E_{c,B} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(G_2) + \frac{1}{2}\frac{1}{3}mb^2\dot{\beta}^2$$

Après calculs :



$$L_{B,Oz} = mb^2 (4\dot{\alpha} + \dot{\beta} + 2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos(\alpha - \beta)) + \frac{1}{3} mb^2 \dot{\beta}$$

$$E_{c,B} = \frac{1}{2} mb^2 (4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 4\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\alpha - \beta)) + \frac{1}{6} mb^2 \dot{\beta}^2$$

Pour l'ensemble du pendule double :

$$L_{Oz} = L_{A,Oz} + L_{B,Oz} \quad ; \quad E_c = E_{c,A} + E_{c,B}$$

III) Etude dynamique des systèmes matériels :

1 – Modélisation des actions mécaniques :

On s'intéresse aux actions mécaniques extérieures qui agissent sur un système matériel (S), en commençant par quelques exemples classiques.

- Le poids d'un système :

La résultante de tous les poids élémentaires est :

$$\vec{P} = \iiint_{(V)} dm \vec{g}_0 = \iiint_{(V)} \rho(M) d\tau \vec{g}_0 = m \vec{g}_0$$

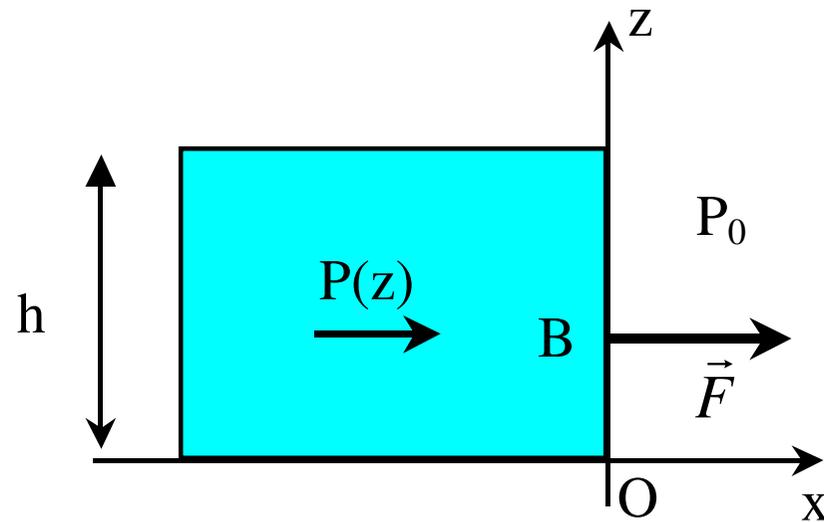
Le moment résultant en un point A quelconque est :

$$\vec{M}_A = \iiint_{(V)} \overrightarrow{AM} \wedge \rho(M) \vec{g}_0 d\tau = \left(\iiint_{(V)} \overrightarrow{AM} \rho(M) d\tau \right) \wedge \vec{g}_0 = \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{g}_0$$

On montre ainsi que le poids du système est équivalente à une force unique $\vec{P} = m\vec{g}_0$ qui s'applique en G.

- Les forces de pression sur la paroi d'un récipient :

On considère un récipient cubique de côté a , contenant une hauteur h d'eau (de masse volumique uniforme ρ).



On va montrer que l'action des forces de pression sur une paroi verticale du récipient peut être caractérisée par un glisseur.

Le calcul de la résultante des forces de pression est classique :

$$\vec{F} = \int_0^h \rho g_0 (h - z) dz \vec{u}_x = \rho g_0 a \frac{h^2}{2} \vec{u}_x$$

Le moment en O des forces de pression est :

$$\vec{M}_O = \iint_{\text{paroi}} \overrightarrow{OM} \wedge \rho g_0 (h - z) dy dz \vec{u}_x = \iint_{\text{paroi}} z \vec{u}_z \wedge \rho g_0 (h - z) dy dz \vec{u}_x$$

$$\vec{M}_O = \int_0^h z \rho g_0 (h - z) a dz \vec{u}_y = \rho g_0 a \frac{h^3}{6} \vec{u}_y$$

On constate que l'on peut écrire : $\vec{M}_O = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}$ avec $\overrightarrow{OB} = \frac{h}{3} \vec{u}_z$

L'action des forces de pression sur la paroi est donc caractérisée par une force unique \vec{F} passant par le point B.

On obtient bien un glisseur dont les éléments de réduction en B sont :

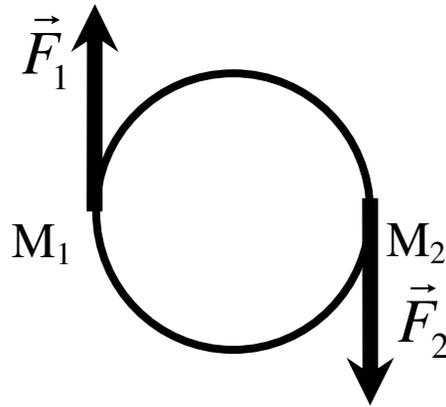
* La résultante est égale à
$$\vec{F} = \rho g_0 a \frac{h^2}{2} \vec{u}_x$$

* Le moment en B est nul :
$$\vec{M}_B = \vec{0}$$

- Couple s'exerçant sur un système en rotation autour d'un axe fixe :

On prend l'exemple d'un couple créé par deux forces opposées. La résultante des forces est nulle et le moment des deux forces au point O est indépendant du point où on le calcule.

Un couple représente un exemple de torseur de résultante nulle. Le moment est donc indépendant du point considéré.



Le moment en un point A quelconque est en effet : (avec $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$)

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{F}_2 = \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{F}_1$$

Il est bien indépendant du point A.

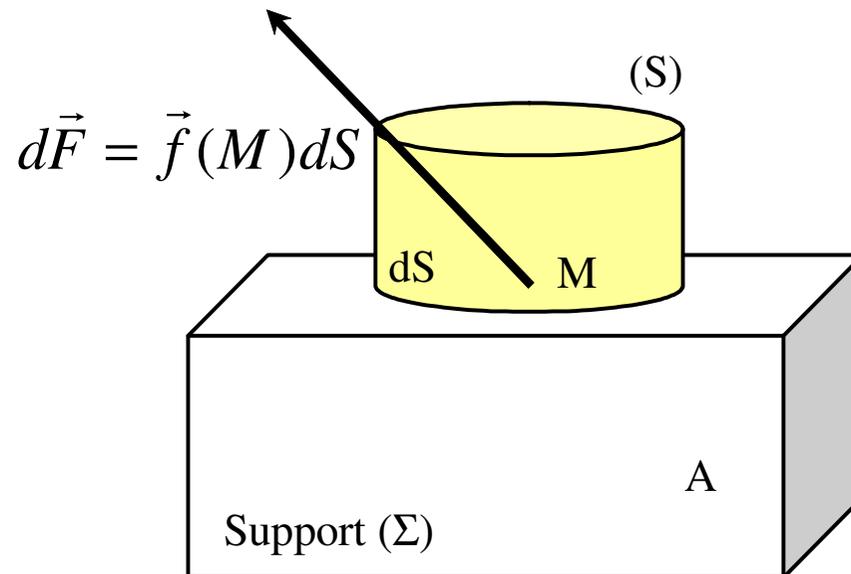
Exemples :

- * Forces que l'on exerce quand on tourne la poignée d'une fenêtre
- * Action d'un champ électrique sur un dipôle électrique
- * Un moteur exerce sur un cylindre extérieur par exemple une action mécanique assimilable à un couple de moment \vec{c} colinéaire à l'axe de rotation commun du moteur et du cylindre.
- * Pendule de torsion dont le couple est de la forme $-C\alpha$.

- Actions de contact entre deux solides :

Un système matériel solide (S) est en contact avec un support solide (Σ) ne faisant donc pas partie de (S). Il y a interaction entre les particules de (S) et celles de (Σ), au niveau de la surface de contact S.

On définit une densité surfacique de forces $\vec{f}(M)$ en chaque point de la surface de contact S. On calcule alors :



* La résultante : $\vec{F}_{(\Sigma) \rightarrow (S)} = \iint_S \vec{f}(M) dS$

* Le moment en un point A : $\vec{M}_{A,(\Sigma) \rightarrow (S)} = \iint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M) dS$

2 – Lois de la dynamique dans un référentiel galiléen :

On considère un système matériel (S) fermé, de masse m et de centre d'inertie G, en mouvement dans un référentiel galiléen (R).

- Loi de l'action et de la réaction :

Cette loi est encore appelée loi des actions réciproques.

On considère deux systèmes (S₁) et (S₂) en interaction dans un référentiel galiléen (par exemple, un livre posé sur une table).

Soient $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ (resp. $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$) la résultante des forces exercées par le corps 1 sur le corps 2 (resp. la

résultante des forces exercées par le corps 2 sur le corps 1).

Soient $\vec{M}_{A, \vec{F}_{1 \rightarrow 2}}$ et $\vec{M}_{A, \vec{F}_{2 \rightarrow 1}}$ les moments correspondants.

La loi de l'action et de la réaction affirme que :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{A, \vec{F}_{2 \rightarrow 1}} = -\vec{M}_{A, \vec{F}_{1 \rightarrow 2}}$$

- Théorème de la résultante cinétique (ou théorème du centre d'inertie, ou théorème de la quantité de mouvement, ou théorème de la résultante dynamique) :

Dans un référentiel (R) galiléen :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}(G)) = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext}$$

- Théorème du moment cinétique en un point fixe :

On considère un point fixe A du référentiel galiléen (R). Alors :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A, \vec{f}_{ext}}$$

La dérivée du moment cinétique du système par rapport au point fixe A est égal au seul moment en A des forces extérieures au système (celui des forces intérieures est nul).

- * Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe :

On considère un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire \vec{u}_Δ , fixe dans (R).

En projetant le théorème du moment cinétique sur cet axe, on obtient le théorème du moment cinétique par rapport l'axe Δ :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \vec{M}_{A, \vec{f}_{ext}} \cdot \vec{u}_{\Delta} = M_{\Delta, ext} \quad (L_{\Delta} = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_{\Delta})$$

Ce théorème sera couramment utilisé dans le paragraphe sur le mouvement d'un solide autour d'un axe fixe.

* Théorème du moment cinétique au point G :

$$\vec{L}_A = \iiint_{(V)} \overrightarrow{AM} \wedge dm \vec{v}(M) = \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}(G) + \vec{L}_G$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \overrightarrow{AG} \wedge \frac{d}{dt} (m \vec{v}(G)) + \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F}_{ext} + \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

D'autre part :

$$\vec{M}_{A, \vec{f}_{ext}} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_{ext} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F}_{ext} + \vec{M}_{G, \vec{f}_{ext}}$$

Ainsi, comme $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A, \vec{f}_{ext}}$, on obtient :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_{G, \vec{f}_{ext}}$$

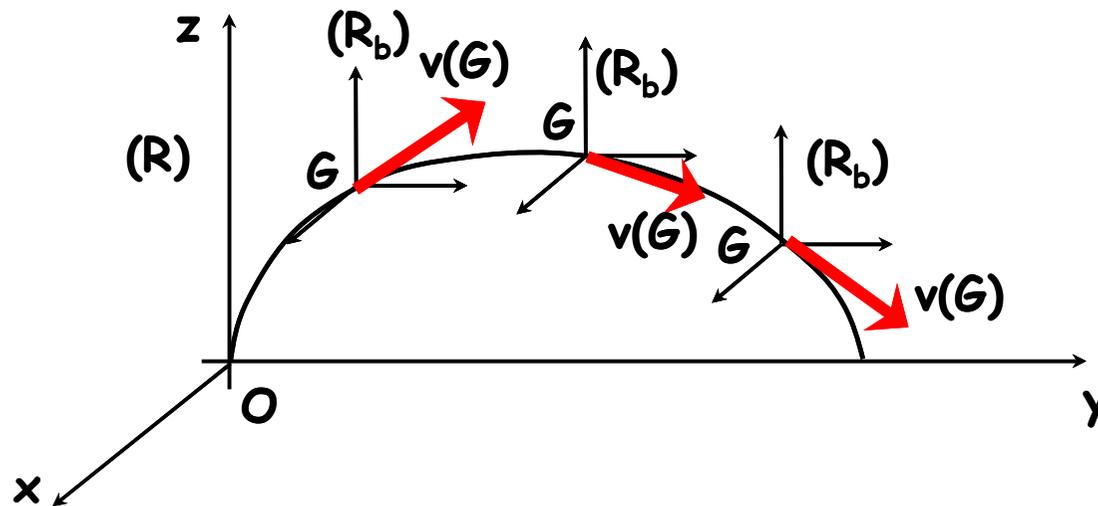
Ainsi, le théorème du moment cinétique peut s'appliquer au point G, même si celui-ci est mobile dans (R).

3 – Théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique :

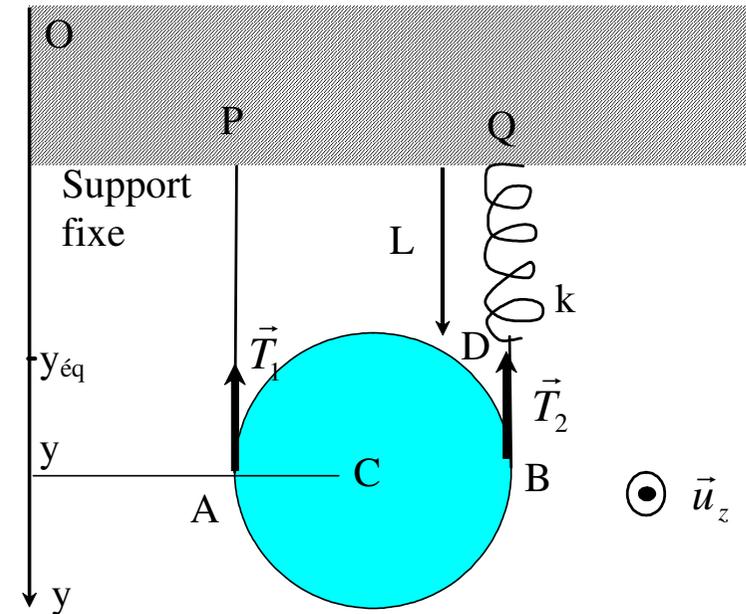
On a vu que : $\vec{L}_G = \vec{L}_{G,b}$. Ainsi :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d\vec{L}_{G,b}}{dt} = \vec{M}_{G,ext}$$

Le théorème du moment cinétique s'applique au point G dans le référentiel barycentrique (\mathcal{R}_b) du système comme en un point fixe d'un référentiel galiléen (bien que le référentiel barycentrique ne soit pas *a priori* galiléen).



Application : oscillations d'un cylindre



On considère le système de la figure suivante :

On demande de calculer la période des oscillations verticales du centre C du cylindre homogène.

Le fil, inextensible, est sans masse et sans raideur et ne glisse pas sur la poulie. Le ressort a une raideur k et une longueur à vide l_0 . On note y la position verticale de C et L la longueur du ressort à l'instant t.

On désigne par $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ le vecteur rotation du cylindre.

4 – Lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen :

Il faut prendre en compte les forces d'inertie :

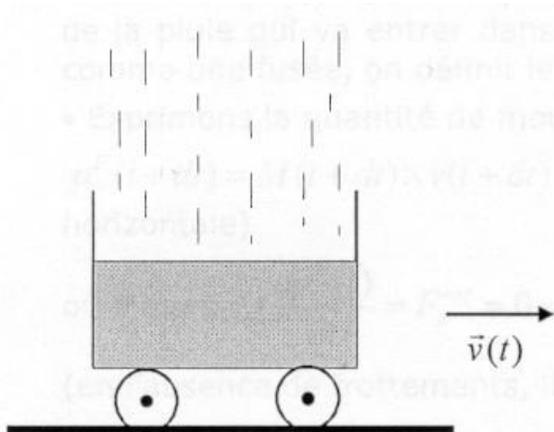
$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}(G)) = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Et, en un point fixe du référentiel mobile :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,\vec{f}_{ext}} + \vec{M}_{A,\vec{f}_{ie}} + \vec{M}_{A,\vec{f}_{ic}}$$

5 – Cas des systèmes ouverts :

Exercice : il pleut sur un chariot



Un chariot, rempli de sable, avance sans frottements sur des rails horizontaux avec une vitesse \vec{v}_0 . Sa masse totale est alors M_0 . La section du chariot perpendiculaire à la verticale est notée S .

1) Soudain, la pluie se met à tomber, verticalement, et il rentre, par seconde D kilogrammes d'eau dans le chariot.

Donner la loi d'évolution $v(t)$ de la vitesse du chariot.

2) La pluie tombe maintenant avec une vitesse constante u et un angle $\theta = 45^\circ$ par rapport à la verticale, dans le sens contraire du mouvement du chariot ; on appelle M_1 la masse du chariot et de son contenu à l'instant où la pluie s'est mise à tomber de manière oblique et v_1 sa vitesse au même instant.

Exprimer l'instant t_0 où le chariot s'arrête en fonction de M_1 , v_1 , D , u et θ .

6 – Formulation torsorielle des lois de la mécanique des systèmes

On a établi que le principe de l'action et de la réaction avait pour conséquence la nullité de la résultante des forces intérieures ainsi que celle du moment des actions intérieures.

Ces deux résultats peuvent se condenser sous le fait que le torseur des actions intérieures est nul :

$$\left[\vec{F}_{\text{int}}, \vec{M}_{\text{int}} \right] = 0$$

Les deux grandes lois de la mécanique des systèmes peuvent alors s'écrire sous la forme torsielle suivante unique, dans un référentiel galiléen (R) dans lequel le point A est fixe :

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{P}, \vec{L}_A \right] = \left[\vec{F}_{\text{ext}}, \vec{M}_{A,\text{ext}} \right]$$

(La dérivée d'un torseur se fait terme à terme)

Autrement dit, la dérivée du torseur cinétique est égale au torseur des actions extérieures.

IV) Etude énergétique des systèmes matériels :

Faire quelques rappels sur l'étude énergétique du système de deux points matériels. Rappeler notamment que le travail des forces intérieures peut s'écrire :

$$\delta W_{\text{int}} = f_{1 \rightarrow 2} dr_{12} = f_{1 \rightarrow 2} d(M_1 M_2)$$

Ce travail, *a priori*, n'est pas nul sauf dans le cas de deux points matériels rigidement liés l'un à l'autre ($d(M_1 M_2) = 0$).

On s'attend alors que ce travail des forces intérieures soit nul pour un solide.

1 – Puissance des actions exercées sur un solide :

En faisant appel à la notion de forces volumiques exercées sur un solide, on peut écrire la puissance des actions (extérieures et intérieures) exercées sur un corps continu :

$$P = \iiint_{(V)} \vec{v}(M) \cdot \vec{f}(M) d\tau$$

Pour un solide :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$$

Soit, après calculs :

$$P = \vec{v}(A) \cdot \vec{F}_{ext} + \vec{M}_{A,ext} \cdot \vec{\Omega}$$

On remarque que les forces intérieures n'interviennent pas dans cette expression de la puissance reçue par le solide.

Remarque : A pourra être souvent le centre d'inertie G.

2 – Théorème de l'énergie cinétique (ou de la puissance cinétique) :

Dans la suite, on se place dans un référentiel (R) supposé galiléen.

- Pour un solide :

$$P = \iiint_{(V)} \vec{v}(M) \cdot \vec{f}(M) d\tau = \iiint_{(V)} \vec{v}(M) \cdot dm \vec{a}(M) = \iiint_{(V)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} dm \vec{v}(M)^2 \right) = \frac{dE_c}{dt}$$

Ainsi, pour un solide :

$$P = \vec{v}(G) \cdot \vec{F}_{ext} + \vec{M}_{G,ext} \cdot \vec{\Omega} = \frac{dE_c}{dt} \quad (\text{Théorème de la puissance cinétique})$$

Rappelons ici que P représente la puissance uniquement des actions extérieures subies par le solide (la puissance des actions intérieures est nulle pour un solide).

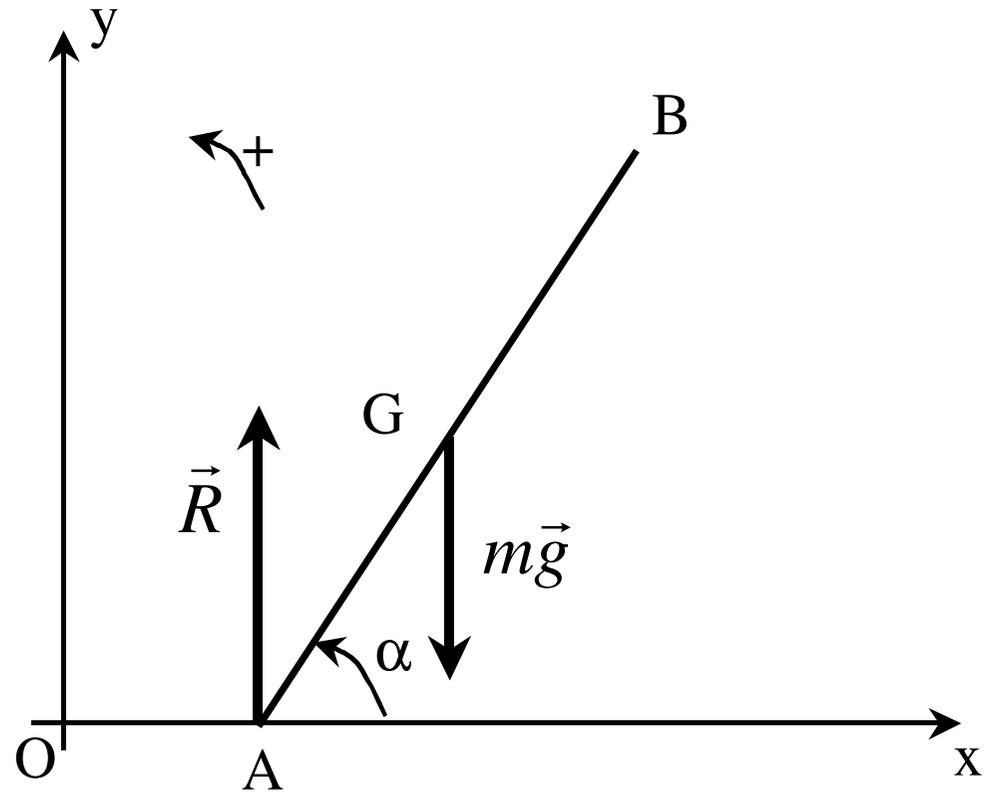
Le théorème de l'énergie cinétique s'en déduit : $\Delta E_c = W_{\vec{f}_{ext}}$

Un 1^{er} exemple : chute d'une tige sur le sol

Une tige AB, homogène, de centre G et de longueur 2b, est posée sur le sol, verticalement sans vitesse initiale. Sous l'action d'un léger déséquilibre, elle tombe.

En supposant que l'extrémité A glisse sans frottements sur le sol, calculer la vitesse v_0 du centre G de la tige quand celle-ci heurte le sol.

Le moment d'inertie de la tige par rapport à sa médiatrice est $J = \frac{1}{3}mb^2$.



3 – Energie potentielle et énergie mécanique d'un système :

La présentation est identique à celle faite pour deux points matériels :

L'énergie mécanique E_m d'un système (S) est la somme de son énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle intérieure $E_{p,int}$ et extérieure $E_{p,ext}$:

$$E_m = E_c + E_{p,int} + E_{p,ext}$$

et le théorème de l'énergie cinétique conduit, pour un système fermé (S) à :

$$dE_m = \delta W_{\text{forces ext et int non conservatives}} \quad ; \quad \frac{dE_m}{dt} = P_{\text{forces ext et int non conservatives}}$$

La plupart des actions mécaniques connues sont conservatives (le poids, la force électrique, la force de gravitation, l'action d'un ressort, ...).

Parmi les actions mécaniques non conservatives, on peut citer les actions de contact entre solides, la tension d'un fil, les forces de pression, les forces de propulsion, ...

Conservation de l'énergie mécanique d'un système fermé, système conservatif :

Si toutes les actions mécaniques dérivent d'une énergie potentielle (extérieure ou intérieure) ou si toutes les actions mécaniques qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle ne travaillent pas, alors l'énergie mécanique du système se conserve au cours du mouvement.

Le système est dit conservatif.

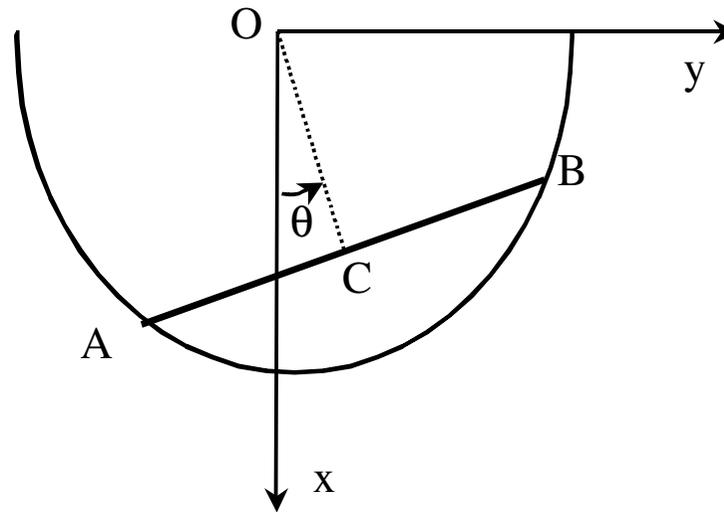
L'équation :

$$E_m = E_c + E_{p,int} + E_{p,ext} = cste$$

est appelée l'intégrale 1^{ère} du mouvement (relative à l'énergie).

Exemple d'application : oscillation d'une tige sur un demi-cercle

Une tige homogène AB, de centre C, de longueur 2ℓ , de moment d'inertie $J = \frac{1}{3}m\ell^2$ par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par C, glisse sans frottements à l'intérieur d'un demi-cercle de centre O et de rayon $R = \frac{2\ell}{\sqrt{3}}$.

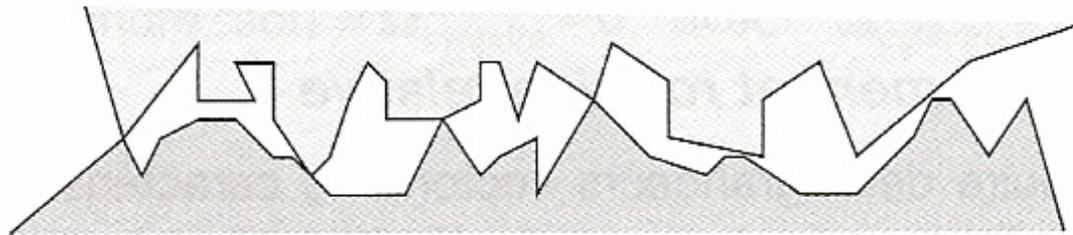


Ce cercle est situé dans le plan vertical (Oxy) d'un référentiel galiléen.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ défini par $\theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OC})$. Calculer la période des petites oscillations de la tige autour de sa position d'équilibre.

V) Contact entre deux solides – Lois du frottement :

Le contact est une notion concrète familière. Il est facile de déterminer visuellement si deux objets sont en contact. Cependant, au niveau microscopique, les choses sont bien plus difficiles. Déjà, la surface des objets usuels qui nous semble lisse est loin de l'être vraiment : les atomes situés à la surface sont disposés aléatoirement et la position de la surface des solides subit des variations très brusques (voir figure suivante).



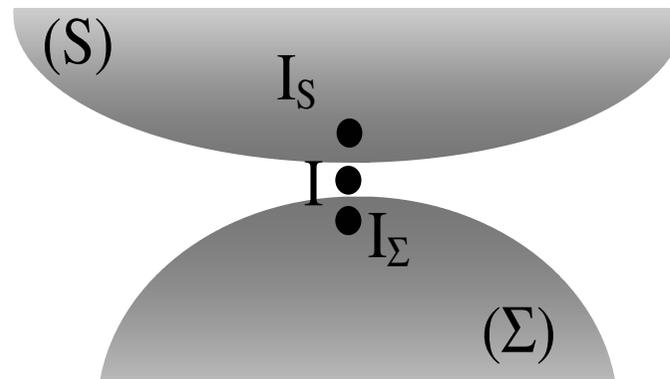
Quand on approche deux objets, les nuages électroniques des atomes situés aux deux interfaces finissent par être très proches et la répulsion électrostatique entre ces nuages engendre la non-interpénétrabilité entre les solides. On comprend donc, vu la complexité de la situation, qu'obtenir une loi exacte décrivant les contacts au niveau macroscopique n'est pas aisé.

1 – Etude cinématique :

On considère deux solides (S) et (Σ) en mouvement dans un référentiel (R) de manière à ce qu'ils restent toujours en contact ; ce contact peut se traduire :

- Par une surface commune
- Par une ligne commune
- Par un ou plusieurs points communs

Ainsi, il existe au moins un point I_S de (S) en coïncidence avec un point I_Σ de (Σ) en I à tout instant t.



On appelle vitesse de glissement \vec{v}_g de (S) sur (Σ) en I à l'instant t, le vecteur :

$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}_g(I_S)_{/(R)} - \vec{v}_g(I_\Sigma)_{/(R)}$$

Cette vitesse de glissement de (S) sur (Σ) en I est aussi la vitesse du point $I_{(S)}$ de (S) dans le référentiel $(R_{(\Sigma)})$ lié à (Σ) :

$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}_g(I_S)_{/(R_\Sigma)}$$

On dit que (S) ne glisse pas sur (Σ) si la vitesse de glissement est nulle en tous points de contact, à tout instant :

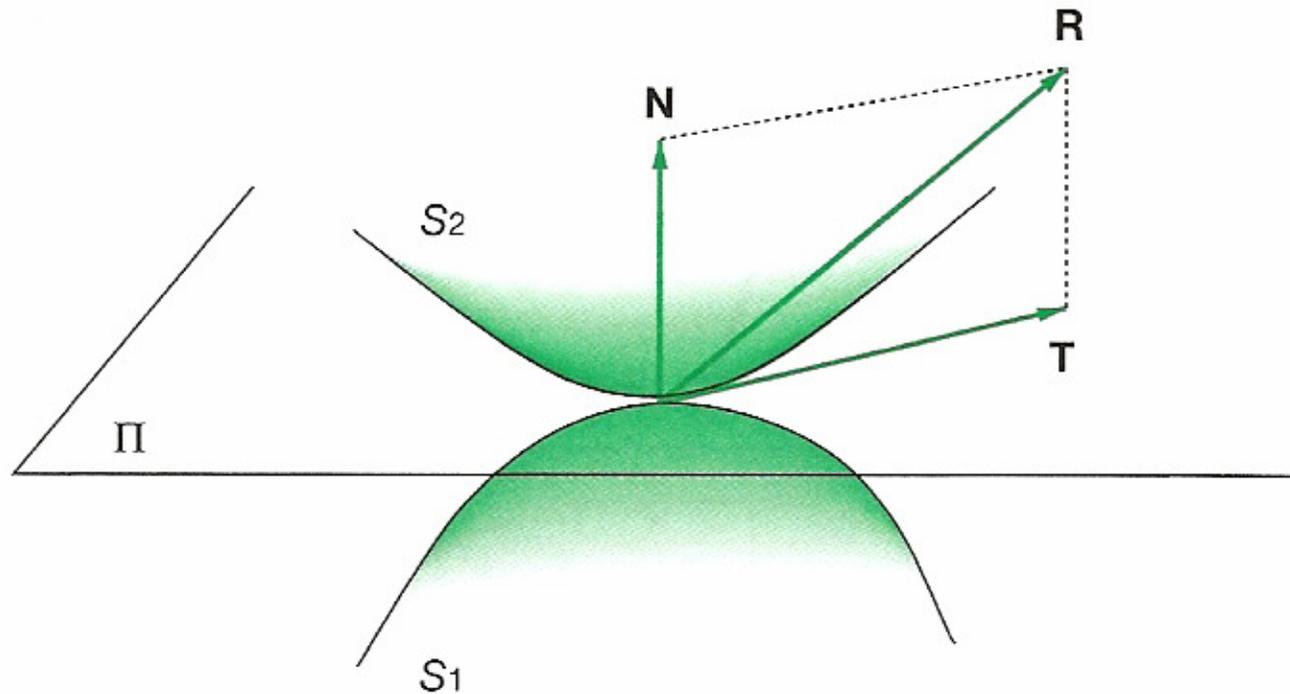
$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}_g(I_S)_{/(R_\Sigma)} = \vec{0}$$

2 – Actions mécaniques de contact :

- Définition des composantes normale et tangentielle de la résultante des actions mécaniques de contact et des moments de frottement de pivotement et de roulement :

On note dans la suite \vec{R} la résultante des actions de contact du solide (1) sur le solide (2). Elle se décompose selon :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$



- Lois de Coulomb

Au XVIII^{ème} siècle, Coulomb a énoncé les lois approchées suivantes, valables pour le frottement de glissement entre deux solides en contact ponctuel (on considérera dans la suite que ces lois restent valables même si le contact n'est pas rigoureusement ponctuel) :

Soient deux solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel. On note \vec{v}_g la vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1).

- Si $\vec{v}_g \neq \vec{0}$ (il y a glissement), la force de frottement de glissement vérifie :

$$\vec{T} // \vec{v}_g \quad ; \quad \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0 \quad ; \quad \|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$$

où f est appelé coefficient de frottement de glissement.

- Si $\vec{v}_g = \vec{0}$ (il n'y a pas glissement), alors :

$$\|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$$

Quelques exemples de coefficients de frottement :

Nature du contact	Coefficient de frottement f
bois sur bois	0,30 à 0,50
acier sur acier (à sec)	0,15 à 0,20
acier sur caoutchouc	0,25 à 0,45
pneu sur route sèche	0,7
pneu sur route mouillée	0,1
métal sur glace	0,02

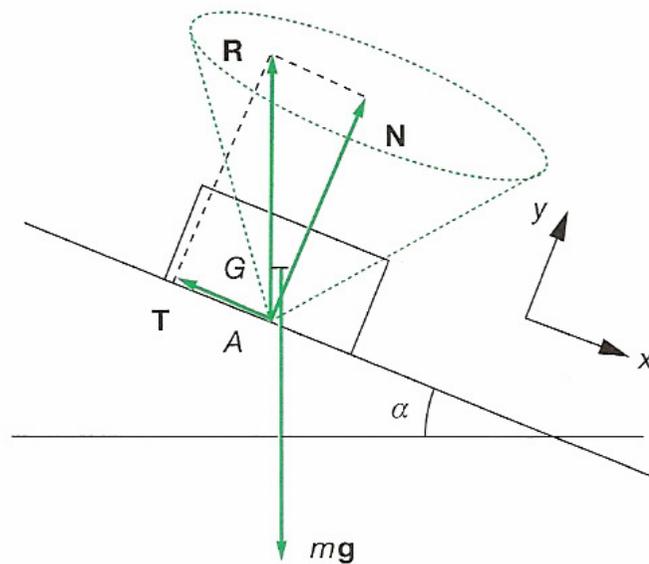
- Cône de frottement :

On considère un solide immobile sur un sol incliné.

Le solide reste-t-il immobile ou commence-t-il à glisser ?

$$\tan \alpha \leq f = \tan \varphi \quad \text{ou} \quad \alpha \leq \varphi = \arctan f$$

L'interprétation géométrique est que la résultante \vec{R} doit se trouver dans le cône d'axe \vec{N} et de demi-angle au sommet $\varphi = \arctan f$. Ce cône est appelé cône de frottement.



3 – Approche énergétique :

- Puissance des actions mécaniques de contact :

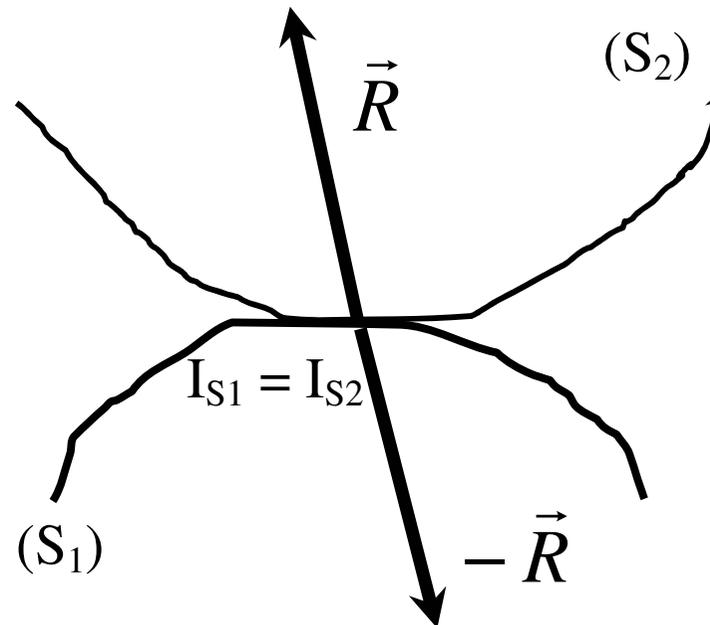
On a vu que la puissance des actions exercées sur un solide est :

$$P = \vec{v}(A) \cdot \vec{F}_{ext} + \vec{M}_{A,ext} \cdot \vec{\Omega}$$

où A est un point quelconque du solide.

On s'intéresse à l'action du solide (S_1) sur le solide (S_2). Le contact est supposé ponctuel en I .

On note \vec{R} la résultante de l'action de (S_1) sur le solide (S_2).



Alors, la puissance reçue par le solide (S₂) de la part du solide (S₁) est : (le moment est nul puisque le contact est ponctuel)

$$P_2 = \vec{v}(I_{S_2}) \cdot \vec{R}$$

$-\vec{R}$ désigne la résultante de l'action de (S₂) sur le solide (S₁). Alors, la puissance reçue par le solide (S₁) de la part du solide (S₂) est :

$$P_1 = \vec{v}(I_{S_1}) \cdot (-\vec{R})$$

Soit, après calculs :

$$P = \vec{v}_g \cdot \vec{R}$$

Soit encore, puisque \vec{N} est perpendiculaire à la vitesse de glissement :

$$P = \vec{v}_g \cdot \vec{T}$$

- Conséquences des lois de Coulomb :

* Il y a glissement :

Alors, $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$ et $P < 0$. A cause des frottements entre les solides, leur énergie mécanique totale diminue.

* Il y a roulement sans glissement :

Alors la vitesse de glissement est nulle et $P = 0$. Les actions de contact ne dissipent aucune énergie alors qu'il existe la plupart du temps une composante tangentielle non nulle de frottement.

Très souvent, le solide (S_1) est le sol immobile ; alors :

$$P = \vec{v}(I_{S_2}) \cdot \vec{T} = 0$$

En cas de roulement sans glissement, la puissance des actions de contact du sol immobile sur un solide est nulle.

4 - Application à la résolution des problèmes :

L'étude d'un mouvement avec contact de solides fait intervenir notamment les forces de contact comme inconnues. Pour résoudre le problème, il faut écrire :

- Les équations découlant du principe fondamental des systèmes.
- Une relation supplémentaire provenant d'une hypothèse sur l'existence ou non d'un glissement, hypothèse qui devra être vérifiée.

Si l'on suppose qu'il y a glissement, la relation supplémentaire est alors donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{T} // \vec{v}_g \quad ; \quad \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0 \quad ; \quad \|\vec{T}\| = f_s \|\vec{N}\|$$

Il faut ensuite vérifier que la vitesse de glissement est bien non nulle et de sens opposé à \vec{T} .

Si l'on suppose qu'il n'y a pas glissement, la relation supplémentaire est $\vec{v}_g = \vec{0}$ et il faut alors vérifier que $T \leq fN$.

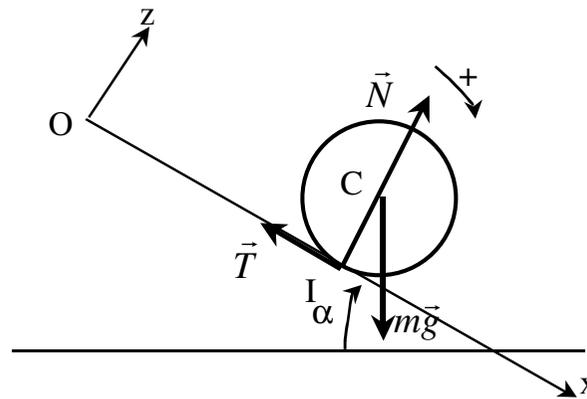
Enfin, si le mouvement comporte différentes phases successives de natures différentes (avec et sans glissement), la vérification de l'hypothèse choisie permet de déterminer l'instant de changement de phase.

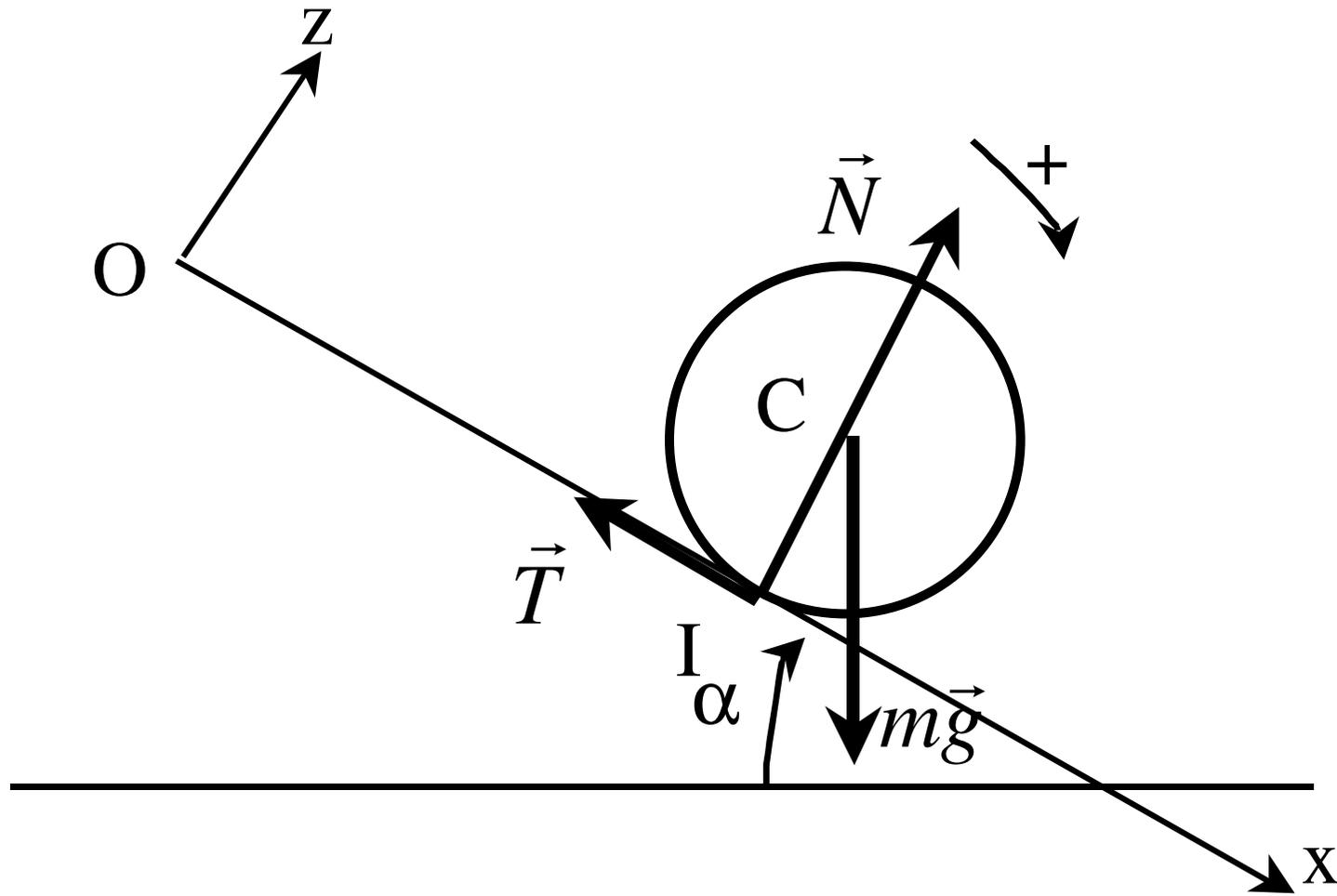
Un 1^{er} exemple d'application ; un cylindre sur un plan incliné :

Un cylindre homogène de centre d'inertie C, de rayon R et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mR^2$ par rapport à son axe, est posé sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale, dans le référentiel terrestre (\mathbf{R}) galiléen (l'axe du cylindre est horizontal).

On désigne par f le coefficient de frottement de glissement entre le cylindre et le plan incliné.

- Déterminer l'accélération \ddot{x} du cylindre. Montrer qu'il y a glissement ou non selon la position de α par rapport à une certaine valeur α_0 que l'on déterminera.
- Faire un bilan énergétique entre les instants 0 et t. Envisager les deux cas $\alpha < \alpha_0$ et $\alpha > \alpha_0$.

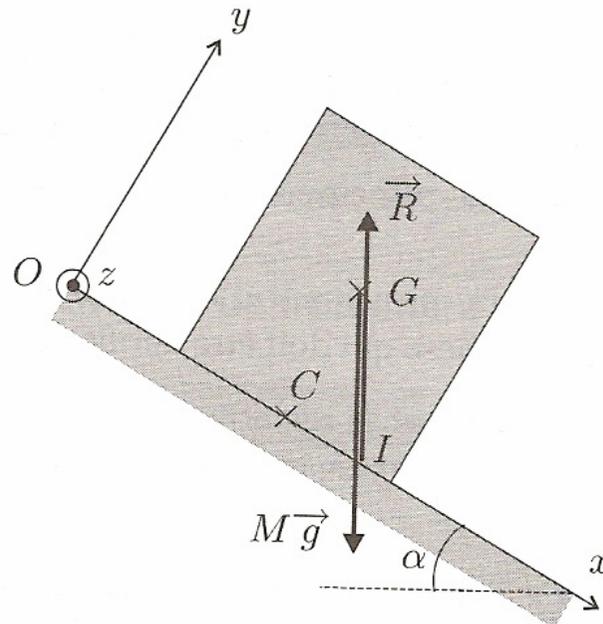




Un 2nd exemple d'application ; cylindre posé sur sa base

On considère un cylindre (C) de masse M , de rayon a et de hauteur h . On pose le cylindre sur sa base sur un plan incliné d'angle α . Sa vitesse initiale est nulle.

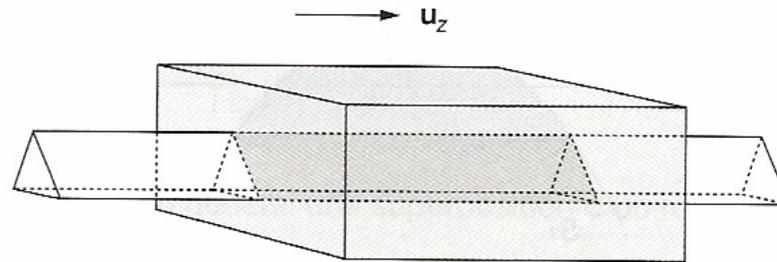
Dans une première expérience, on pose le cylindre C sur sa base (voir figure). En augmentant l'inclinaison de \mathcal{P} à partir de $\alpha = 0$, on constate l'existence d'un angle limite α_1 tel que C reste en équilibre si $\alpha < \alpha_1$, et que C glisse vers le bas si $\alpha > \alpha_1$. Nous allons interpréter ces observations.



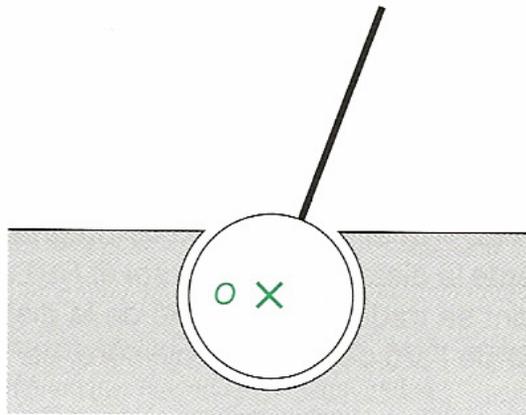
VI) Rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

1 – Description de quelques liaisons classiques entre deux solides :

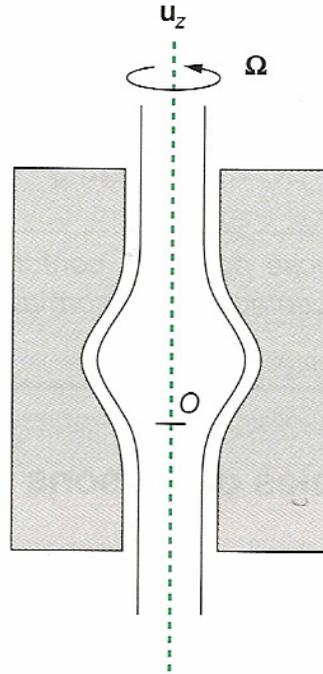
- Liaison glissière ou liaison prismatique :



- Liaison rotule ou liaison sphérique :



- Liaison pivot (ou liaison rotoïde) :



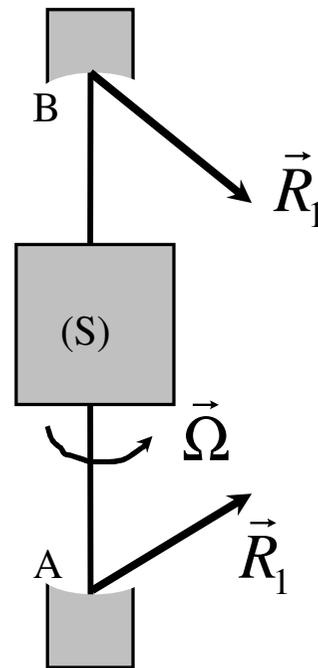
2 – Liaisons parfaites :

Par définition, une liaison parfaite entre deux solides est telle que la puissance totale entre ces deux solides est nulle.



Exemple : une liaison pivot parfaite

Le solide (S) est maintenu par deux pivots quasi-ponctuels en A et B de manière à pouvoir tourner autour de l'axe fixe (AB) dans le référentiel d'étude. Nous supposons que les liaisons en A et B sont parfaites : les actions de contact qui s'exercent sur (S) en A et B se réduisent respectivement à deux forces : \vec{R}_1 passant par A et \vec{R}_2 passant par B.

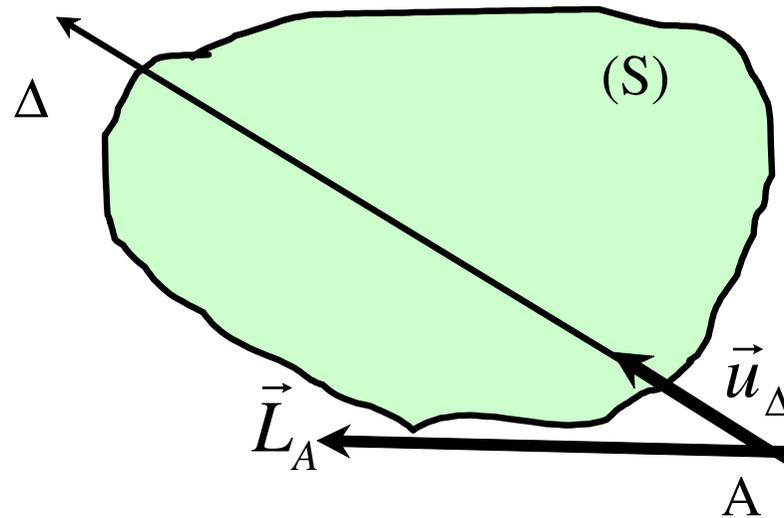


Calculer les éléments de réduction en A du torseur des actions mécaniques de contact sur (S).

3 – Etude du mouvement de rotation (liaison pivot) :

Rappel : (théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe)

On considère un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire \vec{u}_Δ , fixe dans (\mathbb{R}) .



En projetant le théorème du moment cinétique sur cet axe, on obtient le théorème du moment cinétique par rapport l'axe Δ :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \vec{M}_{A, \vec{f}_{ext}} \cdot \vec{u}_{\Delta} = M_{\Delta, ext} \quad (L_{\Delta} = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_{\Delta})$$

Ce théorème sera couramment utilisé dans l'étude du mouvement d'un solide autour d'un axe fixe, en utilisant :

$$L_{\Delta} = J_{\Delta} \omega$$

où ω désigne la vitesse angulaire du solide, portée par l'axe Δ .

Finalement (théorème « scalaire » du moment cinétique pour un solide en rotation autour de l'axe de rotation Δ) :

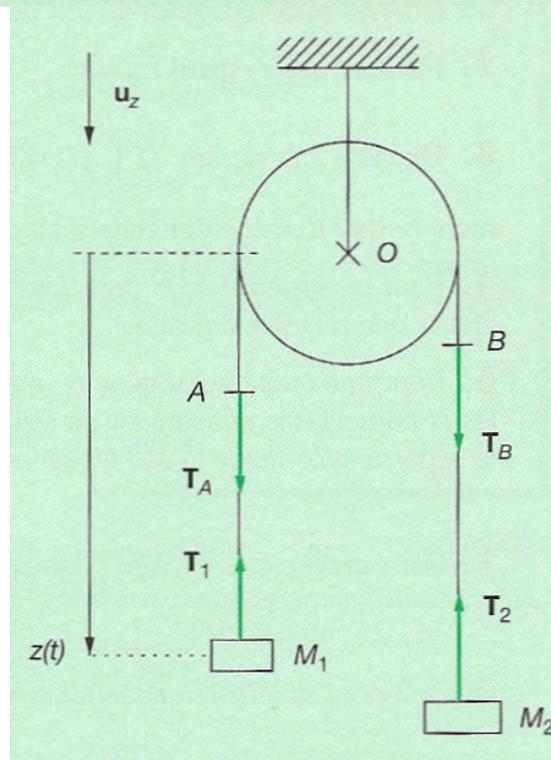
$$J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = L_{\Delta} \quad (L_{\Delta} = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_{\Delta})$$

4 – Exemples :

- Machine d'Atwood :

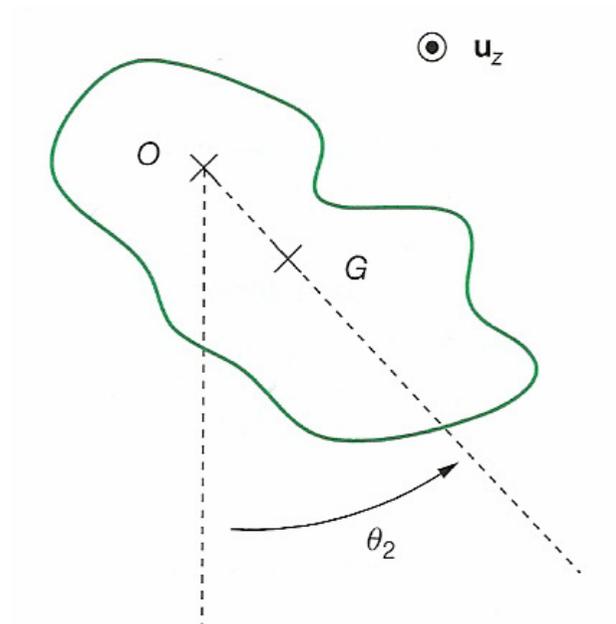
Une poulie sans masse est attachée au plafond par une tige. Cette poulie tourne sans frottements autour de son axe. Un fil inextensible et souple, de masse négligeable, attaché à ses deux bouts à deux masses m_1 et m_2 coulisse sans glisser sur cette poulie.

1. Montrer que la poulie transmet les tensions, c'est-à-dire que les tensions du fil de chaque côté de la poulie sont identiques.



2. Montrer que la tension est la même tout au long de la corde libre.
3. En déduire les accélérations des deux masses. Commenter le résultat.

- Le pendule pesant :



* Equation de la dynamique :

* Approche énergétique :

