PCSI 1 (O.Granier)

Lycée Clemenceau

Systèmes formés de deux points matériels

(mécanique du point matériel)

Olivier GRANIER

Préliminaires : rappels du cours sur le PFD

➢ Théorème du Centre d'inertie :

• Centre d'inertie d'un système de points matériels :

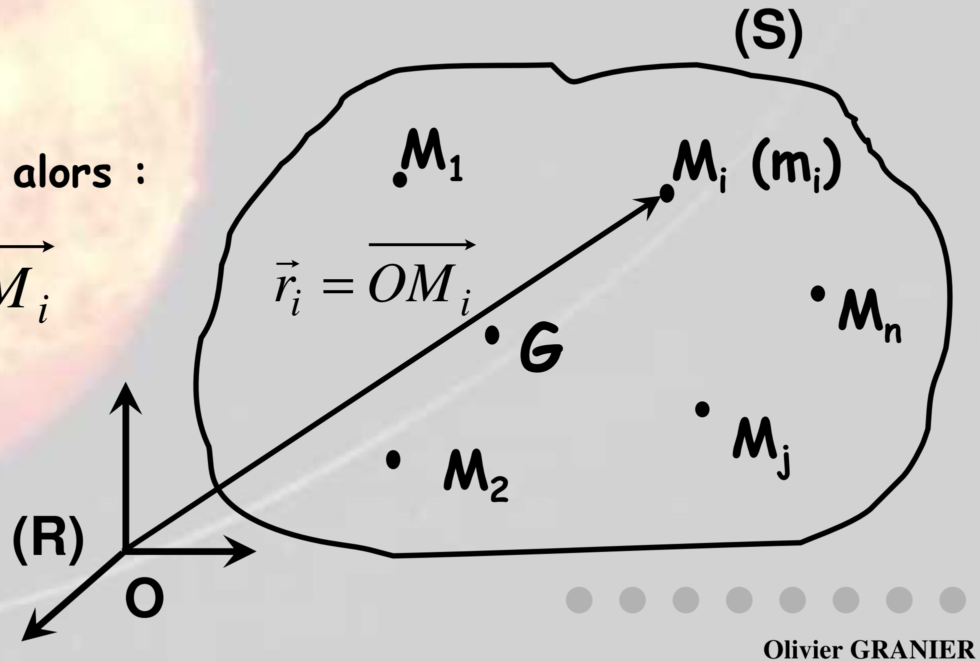
« Le centre d'inertie G d'un système de points matériels M_i de masse m_i est le barycentre des points M_i affectés des coefficients m_i, soit :

$$\boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}}$$

Si O est l'origine du référentiel d'étude, alors :

$$\overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}_i = -\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM}_i$$

D'où $$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i}{m_T}$$



- **Quantité de mouvement totale du système :**

La quantité de mouvement totale du système de points matériels est (dans le référentiel d'étude (R)) :

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v_i} \qquad \textbf{avec} \qquad \vec{v_i} = \frac{d(\overrightarrow{OM_i})}{dt}$$

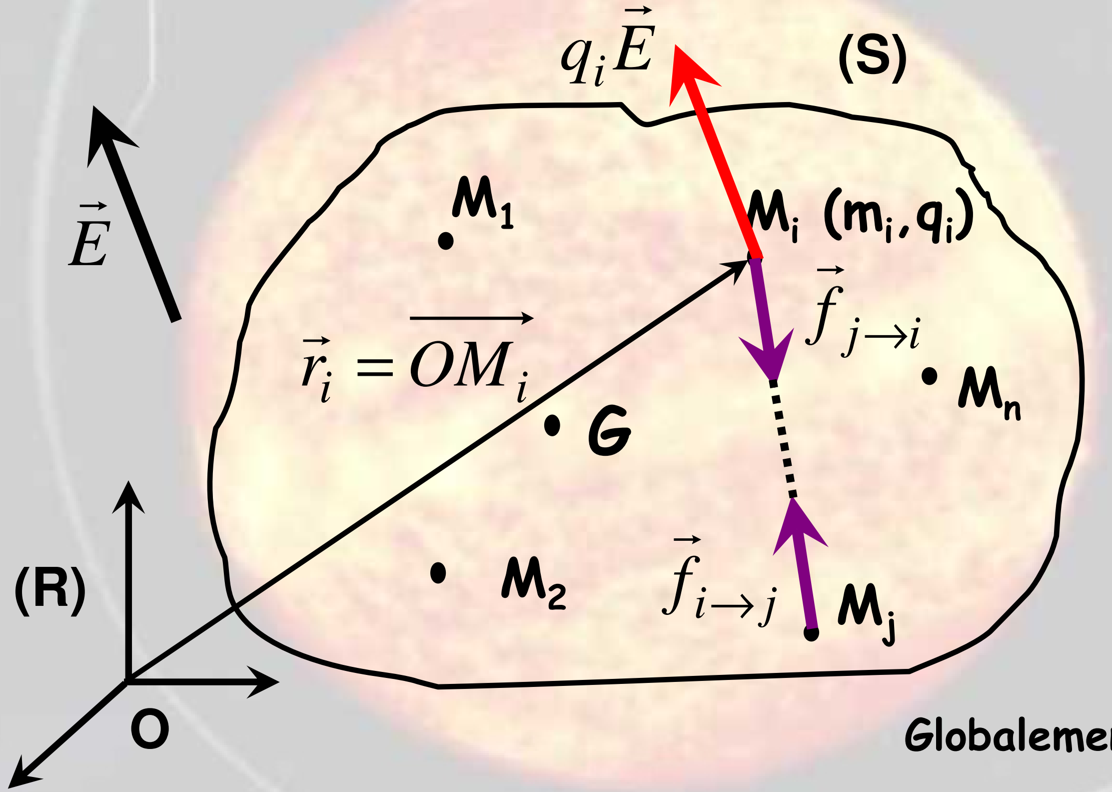
Elle est reliée à la vitesse du centre d'inertie G dans (R) :

$$\vec{p} = \sum_i m_i \frac{d(\overrightarrow{OM_i})}{dt} = \sum_i \frac{d(m_i \overrightarrow{OM_i})}{dt} = \sum_i m_i \frac{d(\overrightarrow{OG})}{dt} = m_T \frac{d(\overrightarrow{OG})}{dt}$$

Soit : $$\boxed{\vec{p} = m_T \vec{v}_G}$$

« La quantité de mouvement d'un système de points matériels est égale à la quantité de mouvement d'un point fictif situé au centre d'inertie du système et possédant toute la masse de celui-ci. »

• **Forces intérieures et forces extérieures :**



$q_i\vec{E}$: force extérieure qui s'exerce sur le point M_i

$\vec{f}_{j\to i}$: force intérieure exercée par le point (j) sur le point (i)

$$\vec{f}_{i\to j} = -\vec{f}_{j\to i}$$

Globalement : $$\sum_i \left(\sum_{j\neq i} \vec{f}_{j\to i} \right) = \vec{0}$$

- **Théorème du centre d'inertie :**

Le PFD appliqué à un point matériel donne :

$$m_i \frac{d(\vec{v}_i)}{dt} = \vec{F}_{i,ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \to i}$$

Où $\vec{F}_{i,ext}$ désigne la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur le point (i).

En sommant sur tous les points du système :

$$\sum_i \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = m_T \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,ext} + \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \to i} \right) = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$$

$$\boxed{m_T \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_{ext}}$$

« Le mouvement du centre d'inertie d'un système de points matériels est celui d'un point qui aurait la masse totale du système et auquel serait appliquée la somme des forces extérieures au système. »

I – Eléments cinétiques d'un système de deux points matériels :

Dans la suite, on se limite à un système (S) de deux points matériels M_1 et M_2, de masses m_1 et m_2.

L'étude est faîte dans un référentiel (R) galiléen, d'origine O.

1 - Centre d'inertie (de masse) :

Pour 2 points matériels, G est défini par :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$$

Soit encore :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$$

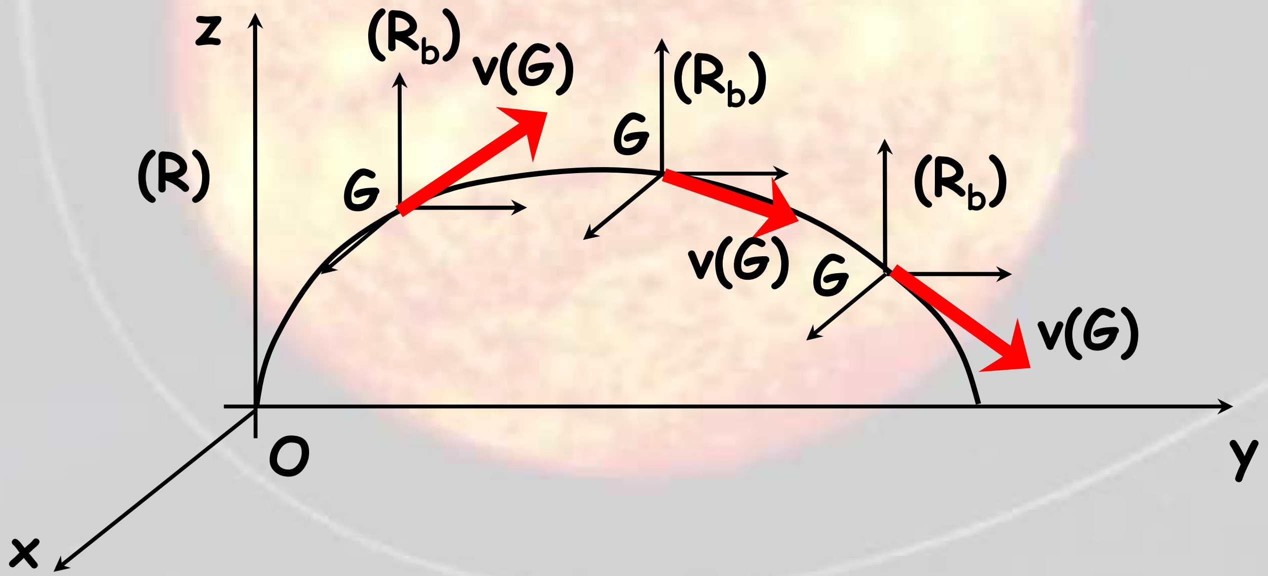
Une calculette astronomique

Calculateur de CI

2 - Référentiel barycentrique :

On note v(G) le vecteur vitesse du centre d'inertie du système par rapport au référentiel d'étude (R).

On appelle **référentiel barycentrique (R_b)** du système, le référentiel animé d'un mouvement de translation par rapport au référentiel (R) à la vitesse du centre d'inertie v(G).



Le référentiel barycentrique est galiléen si v(G) est constante.

3 - Quantité de mouvement (ou résultante cinétique) :

La quantité de mouvement totale du système vaut, dans le référentiel (R) :

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{v}(G)$$

On le retrouve rapidement en écrivant que :

$$\vec{v}(G) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OG}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Remarque : dans le référentiel barycentrique (R_b), la quantité de mouvement totale du système est nulle (car $v_b(G) = 0$).

4 - Energies cinétiques :

Dans le référentiel (R) :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}$$

Dans le référentiel barycentrique (R_b) :

$$\boxed{E_{c,b} = \frac{1}{2} m_1 v_{1,b}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,b}^2}$$

Relation entre les vitesses dans (R) et dans (R_b) (Le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation)

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1,b} + \vec{v}(G) \qquad ; \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}_{2,b} + \vec{v}(G)$$

5 - Moments cinétiques :

Moment cinétique par rapport à O, évalué dans (R) :

$$\boxed{\vec{\sigma}_0 = \overrightarrow{OM}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge m_2\vec{v}_2}$$

Moment cinétique barycentrique :

On l'évalue tout d'abord par rapport au point G :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{G,b} = \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1\vec{v}_{1,b} + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2\vec{v}_{2,b}}$$

On montre que ce moment ne dépend du point par rapport auquel on l'évalue. Défini en un point quelconque A :

$$\vec{\sigma}_{A,b} = \overrightarrow{AM}_1 \wedge m_1\vec{v}_{1,b} + \overrightarrow{AM}_2 \wedge m_2\vec{v}_{2,b}$$

En décomposant :

$$\vec{\sigma}_{A,b} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}_1) \wedge m_1 \vec{v}_{1,b} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}_2) \wedge m_2 \vec{v}_{2,b}$$

$$\vec{\sigma}_{A,b} = \vec{\sigma}_{G,b} + \overrightarrow{AG} \wedge m_1 \vec{v}_{1,b} + \overrightarrow{AG} \wedge m_2 \vec{v}_{2,b}$$

$$\vec{\sigma}_{A,b} = \vec{\sigma}_{G,b} + \overrightarrow{AG} \wedge \underbrace{(m_1 \vec{v}_{1,b} + m_2 \vec{v}_{2,b})}_{\text{= 0 (quantité de mouvement dans } (R_b))}$$

Donc : $\boxed{\vec{\sigma}_{A,b} = \vec{\sigma}_{G,b} = \vec{\sigma}_b}$ (Moment cinétique barycentrique)

6 - Les théorèmes de Koenig :

1er théorème (relatif au moment cinétique) :

$$\boxed{\vec{\sigma}_0 = \vec{\sigma}_b + \overrightarrow{OG} \wedge m\,\vec{v}(G)} \qquad (m = m_1 + m_2)$$

Moment cinétique total par rapport à O et évalué dans (R)

Moment cinétique total barycentrique

Moment cinétique du centre d'inertie par rapport à O, évalué dans (R)

6 - Les théorèmes de Koenig :

2ème théorème (relatif à l'énergie cinétique) :

$$\boxed{E_c \quad = \quad E_{c,b} \quad + \quad \frac{1}{2} m \, \vec{v}(G)^2} \qquad (m = m_1 + m_2)$$

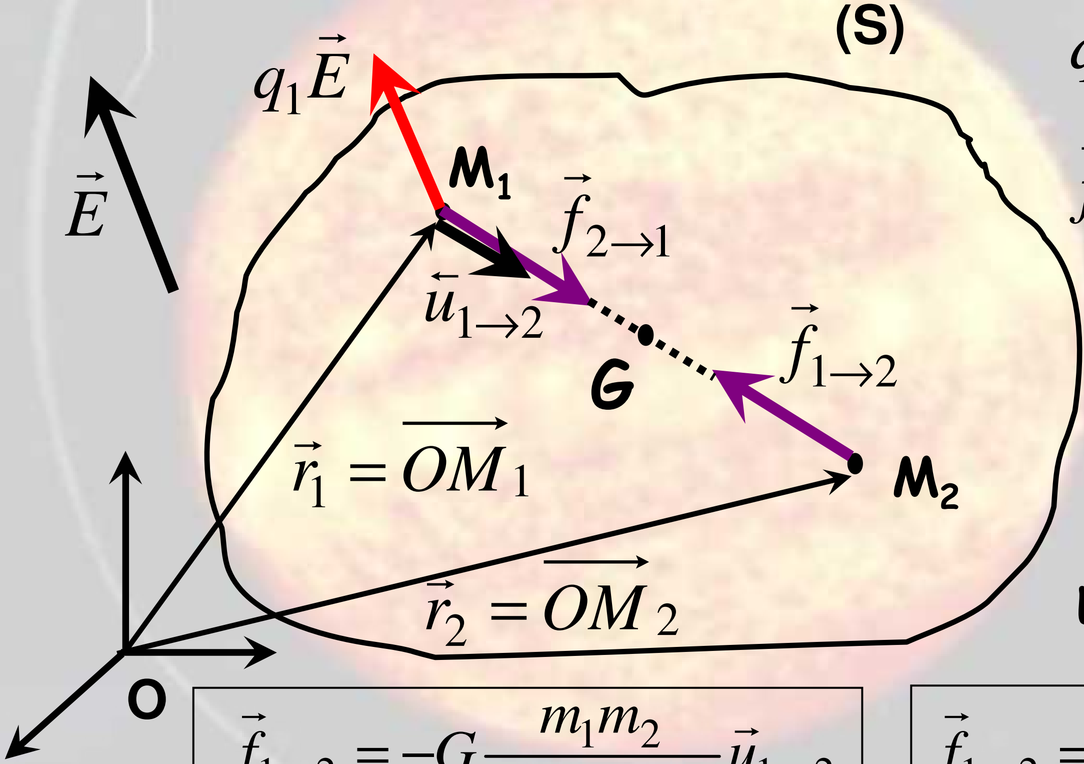
Energie cinétique totale évaluée dans (R)

Energie cinétique totale barycentrique

Energie cinétique du centre d'inertie, évaluée dans (R)

II – Dynamique d'un système de deux points matériels :

1 - Forces intérieures, forces extérieures :



$q_1\vec{E},\, q_2\vec{E}$: forces extérieures

$\vec{f}_{1\to 2},\, \vec{f}_{2\to 1}$: forces intérieures (parallèles à M_1M_2)

$$\boxed{\vec{f}_{1\to 2} = -\vec{f}_{2\to 1}}$$

Exemples :

$$\boxed{\vec{f}_{1\to 2} = -G\frac{m_1 m_2}{(M_1M_2)^2}\vec{u}_{1\to 2}}$$

$$\boxed{\vec{f}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{(M_1M_2)^2}\vec{u}_{1\to 2}}$$

II – Dynamique d'un système de deux points matériels :

2 - Théorème du centre d'inertie (ou de la quantité de mouvement) :

Dans le cas d'un système de deux points matériels : si on note p la quantité de mouvement totale du système dans (R) :

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}(G) = m\vec{v}(G)$$

Le théorème du CI (ou de la quantité de mouvement) s'écrit, dans le référentiel (R) galiléen :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}} \quad ; \quad \boxed{m\frac{d\vec{v}(G)}{dt} = m\vec{a}(G) = \sum \vec{F}_{ext}}$$

II – Dynamique d'un système de deux points matériels :

3 - Théorème du moment cinétique :

Dans le référentiel galiléen (R), le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \left(\overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{f}_{2\to1} + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{f}_{1\to2}\right) + \left(\vec{M}_{forces\ extérieures}\right)$$

Or, le moment des forces intérieures est nul :

$$\left(\overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{f}_{2\to1} + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{f}_{1\to2}\right) = \left(\overrightarrow{OM}_1 \wedge (-\vec{f}_{1\to2}) + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{f}_{1\to2}\right)$$

$$= \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{f}_{1\to2} = \vec{0}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{M}_{forces\ extérieures}}$$

Dans le référentiel barycentrique (R_b), le théorème du moment cinétique est encore valable, bien que ce référentiel ne soit pas nécessairement galiléen.

Pour le montrer, on évalue :

$$\frac{d\vec{\sigma}_b}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1\vec{v}_{1,b} + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2\vec{v}_{2,b}\right)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_b}{dt} = (\vec{v}_{1,b} \wedge m_1\vec{v}_{1,b} + \vec{v}_{2,b} \wedge m_2\vec{v}_{2,b}) + \overrightarrow{GM}_1 \wedge \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_{1,b}) + \overrightarrow{GM}_2 \wedge \frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_{2,b})$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_b}{dt} = \overrightarrow{GM}_1 \wedge \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_{1,b}) + \overrightarrow{GM}_2 \wedge \frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_{2,b})$$

Or :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m_1\vec{v}_{1,b}) = \vec{F}_{ext,1} + \vec{f}_{2\to1} - m_1\vec{a}(G) \\ \dfrac{d}{dt}(m_2\vec{v}_{2,b}) = \vec{F}_{ext,2} + \vec{f}_{1\to2} - m_2\vec{a}(G) \end{cases}$$

(PFD dans (R_b) non galiléen)

En regroupant, il vient (le moment des forces intérieures s'annule là encore) :

$$\frac{d\vec{\sigma}_b}{dt} = \vec{M}_{Forces\ extérieures} + \left(\overrightarrow{GM}_1 \wedge (-m_1\vec{a}(G)) + \overrightarrow{GM}_2 \wedge (-m_2\vec{a}(G))\right)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_b}{dt} = \vec{M}_{Forces\ extérieures} - \left(\underbrace{m_1\,\overrightarrow{GM}_1 + m_2\,\overrightarrow{GM}_2}_{=\ 0\ \text{par définition du centre d'inertie}\ G}\right) \wedge \vec{a}(G)$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_b}{dt} = \vec{M}_{Forces\ extérieures}}$$

Le théorème du moment cinétique est valable dans (R_b), même si celui-ci n'est pas galiléen.

II – Dynamique d'un système de deux points matériels :

4 - Théorème de l'énergie cinétique :

Dans le référentiel galiléen (R), le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\Delta E_c = W_{Forces\ extérieures} + W_{forces\ intérieures}$$

$$\Delta E_c = W_{F,ext} + W_{f,\mathrm{int}}$$

Le travail des forces intérieures n'est pas nul en général. En effet :

$$\delta W_{f,\mathrm{int}} = \vec{f}_{2\to1}.d\vec{r}_1 + \vec{f}_{1\to2}.d\vec{r}_2 = (-\vec{f}_{1\to2}).d\vec{r}_1 + \vec{f}_{1\to2}.d\vec{r}_2$$

$$\delta W_{f,\mathrm{int}} = \vec{f}_{1\to2}.d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{f}_{1\to2}.d\overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\vec{f}_{1\to2} = f_{1\to2}\,\vec{u}_{1\to2} \quad ; \quad \overrightarrow{M_1M_2} = r\,\vec{u}_{1\to2} \qquad (r = M_1M_2)$$

$$d(\overrightarrow{M_1M_2}) = d(r\,\vec{u}_{1\to2}) = (dr)\,\vec{u}_{1\to2} + r\,d(\vec{u}_{1\to2})$$

Le travail élémentaire des forces intérieures devient alors :

$$\delta W_{f,\text{int}} = \vec{f}_{1\to2}.d(\overrightarrow{M_1M_2}) = f_{1\to2}\,\vec{u}_{1\to2}.((dr)\,\vec{u}_{1\to2} + r\,d(\vec{u}_{1\to2}))$$

$$\delta W_{f,\text{int}} = f_{1\to2}\,dr + r\,f_{1\to2}\,\vec{u}_{1\to2}.d(\vec{u}_{1\to2})$$

Or : $\vec{u}_{1\to2}.d(\vec{u}_{1\to2}) = d\left(\frac{1}{2}\vec{u}_{1\to2}^{\,2}\right) = d\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Donc : $\boxed{\delta W_{f,\text{int}} = f_{1\to2}\,dr}$

$$\boxed{\delta W_{f,\text{int}} = f_{1\to 2}\, dr}$$

Ce travail élémentaire des forces intérieures est donc en général non nul.

Il ne dépend que du mouvement relatif de M_1 par rapport à M_2 (variation dr de la distance relative M_1M_2).

Dans le cas où les deux points sont rigidement liés (deux points à l'extrémité d'une tige de masse négligeable, par exemple), alors dr = 0 et le travail des forces intérieures est alors nul.

Ce résultat se généralise au cas d'un solide.

II – Dynamique d'un système de deux points matériels :

5 – Energie potentielle d'interaction mutuelle (intérieure) :

On cherche une fonction, appelée énergie potentielle d'interaction mutuelle et notée $E_{p,int}$, définie par :

$$\delta W_{f,\text{int}} = f_{1\to 2}\, dr = -dE_{p,\text{int}}$$

Soit :

$$\boxed{f_{1\to 2} = -\frac{dE_{p,\text{int}}}{dr}}$$

Dans le cas de l'attraction gravitationnelle :

$$f_{1\to 2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} = -\frac{dE_{p,\text{int}}}{dr} \qquad soit \qquad \boxed{E_{p,\text{int}} = -G\frac{m_1 m_2}{r}}$$

Dans le cas de l'attraction coulombienne :

$$f_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = -\frac{dE_{p,\text{int}}}{dr} \qquad \textit{soit} \qquad \boxed{E_{p,\text{int}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}}$$

Ces énergies potentielles sont formellement identiques à celles obtenues dans le cas d'une seule masse m (ou charge q) mobile, placée dans le champ créé par une masse M (ou charge Q) immobile :

$$E_p = -G\frac{mM}{r} \qquad ; \qquad E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

II – Dynamique d'un système de deux points matériels :

6 - Energie mécanique :

On suppose que le travail des forces extérieures peut se décomposer en deux parties :

$$W_{F,ext} = -\Delta E_{p,ext} + W_{F,ext\ non\ conservatives}$$

Le théorème de l'énergie cinétique, dans (R) galiléen devient :

$$\Delta E_c = W_{F,ext} + W_{F,\mathrm{int}}$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_{p,\mathrm{int}} - \Delta E_{p,ext} + W_{F,ext\ non\ conservatives}$$

On note :

$$E_m = E_c + E_{p,\mathrm{int}} + E_{p,ext}$$

l'énergie mécanique du système de deux points matériels.

Alors :

$$\boxed{\Delta E_m = W_{F,ext\ non\ conservatives}}$$

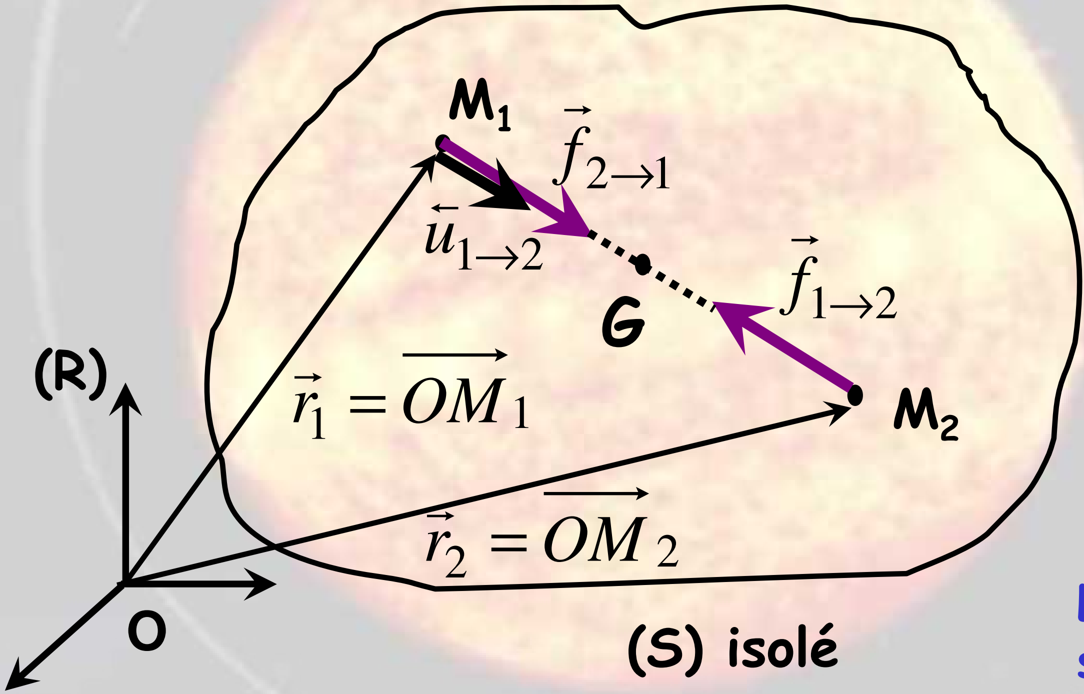
Dans le cas de systèmes de **deux points isolés** (pas de forces extérieures), alors, dans les deux cas cités précédemment :

$$E_m = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} = cste$$

$$E_m = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} = cste$$

III - Système isolé de deux points matériels :

1 - Conservation de la quantité de mouvement :



$$\vec{f}_{1\to2} = f_{1\to2}\,\vec{u}_{1\to2}$$

$$\vec{f}_{2\to1} = -\vec{f}_{1\to2}$$

Dans (R) galiléen, le théorème du CI donne (pas de forces extérieures) :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{p} = \overrightarrow{cste}$$

La quantité de mouvement du système est une constante du mouvement.

III – Système isolé de deux points matériels :

2 - Caractère galiléen du référentiel barycentrique :

La quantité de mouvement totale du système p est une constante du mouvement.

La vitesse du centre d'inertie dans (R) est également une constante du mouvement (puisque p = mv(G)).

Le référentiel barycentrique, animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport au référentiel (R) (supposé galiléen) est lui-même galiléen.

Données des conditions initiales : si on suppose qu'à t = 0 :

$$\vec{r}_1(t=0)=\vec{r}_{1,0} \quad ; \quad \vec{r}_2(t=0)=\vec{r}_{2,0} \quad ; \quad \vec{v}_1(t=0)=\vec{v}_{1,0} \quad ; \quad \vec{v}_2(t=0)=\vec{v}_{2,0}$$

La quantité de mouvement constante du système est alors :

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_{1,0} + m_2 \vec{v}_{2,0}$$

La vitesse du centre d'inertie G est alors :

$$\vec{p} = (m_1 + m_2)\vec{v}(G) \quad donc \quad \vec{v}(G) = \frac{m_1 \vec{v}_{1,0} + m_2 \vec{v}_{2,0}}{m_1 + m_2}$$

Le rayon vecteur du CI est ensuite :

$$\vec{v}(G) = \frac{d(\overrightarrow{OG})}{dt} \quad donc \quad \overrightarrow{OG} = \left(\frac{m_1 \vec{v}_{1,0} + m_2 \vec{v}_{2,0}}{m_1 + m_2} \right) t + \frac{m_1 \vec{r}_{1,0} + m_2 \vec{r}_{2,0}}{m_1 + m_2}$$

Le mouvement du centre d'inertie est donc entièrement déterminé par la connaissance des conditions initiales.

III - Système isolé de deux points matériels :

3 - Conservation du moment cinétique barycentrique :

On se place désormais dans le référentiel barycentrique.

Le système étant isolé, le théorème du moment cinétique, écrit dans le référentiel barycentrique, s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_b}{dt} = \vec{M}_{\vec{F},ext} = \vec{0} \qquad donc \qquad \vec{\sigma}_b = \overrightarrow{cste}$$

Le moment cinétique du système est donc une constante du mouvement.

III – Système isolé de deux points matériels :

4 - Conservation de l'énergie barycentrique :

De la même manière, pour un système isolé, l'énergie mécanique totale, évaluée dans le référentiel barycentrique, est une constante du mouvement (dans la suite, on omettra l'indice b pour alléger l'écriture) :

$$E_m = E_c + E_{p,\text{int}} = cste$$

Int gravitationnelle :

$$E_m = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} = cste$$

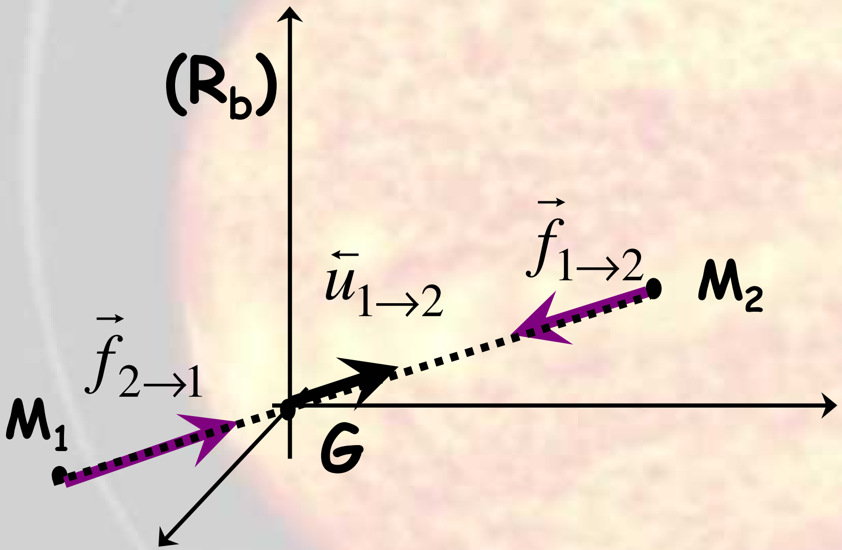
Int coulombienne :

$$E_m = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = cste$$

III – Système isolé de deux points matériels :

5 - Réduction du problème à 2 corps à un problème à un corps :

a - Présentation de la méthode :

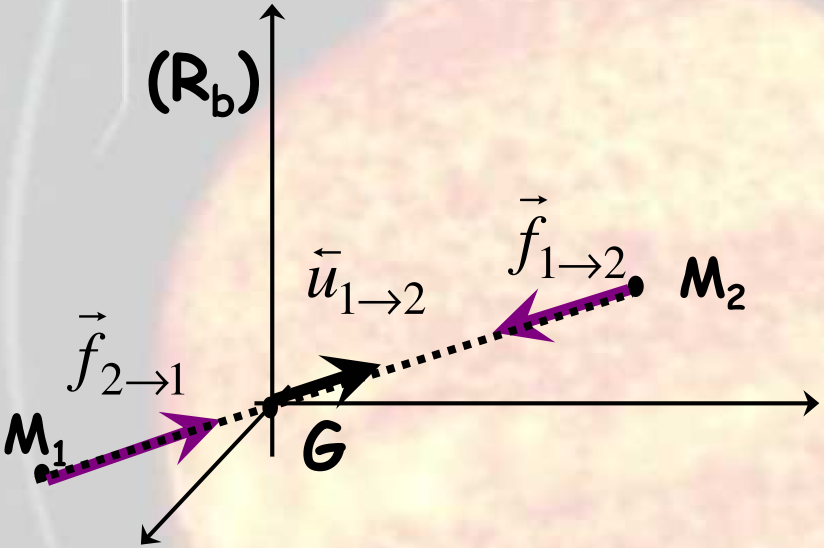


Le PFD appliqué à chacun des points matériels (dans R_b) donne :

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{f}_{2\to 1} = -\vec{f}_{1\to 2} & (1) \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{f}_{1\to 2} & (2) \end{cases}$$

On aboutit ainsi à un système de 6 équations scalaires (une fois projetées) couplées, difficile à résoudre !

On effectue le calcul $\frac{(2)}{m_2}-\frac{(1)}{m_1}$, soit :



$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}-\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}=\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1}\right)\vec{f}_{1\to 2}$$

On note $\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\overrightarrow{M_1M_2}$, le rayon vecteur relatif entre les deux points :

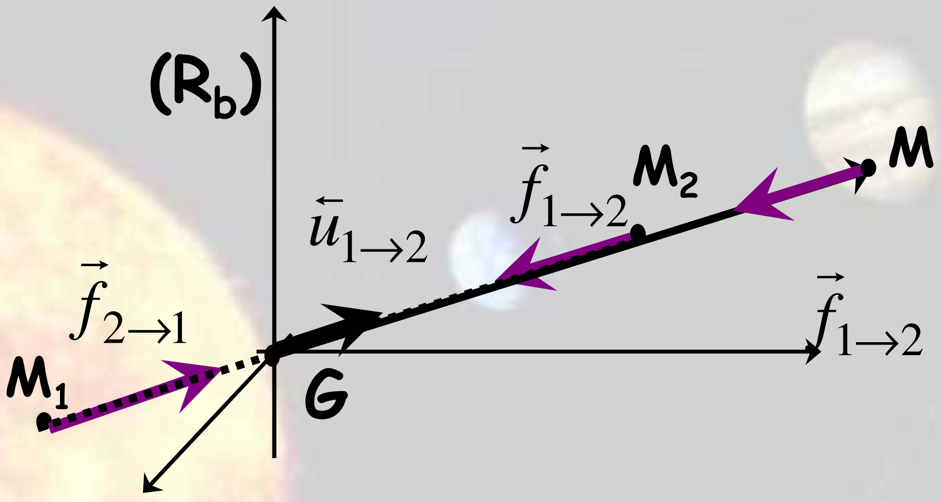
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1}\right)\vec{f}_{1\to 2}$$

On définit μ, la masse réduite :

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1} \quad soit \quad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

Alors :

$$\boxed{\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_{1\to 2}}$$



On définit une particule fictive (réduite) M, de masse μ, située au point M tel que :

$$\vec{r} = \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$$

et soumise à la force centrale $\vec{f}_{1\to 2}$.

Le mouvement des deux points matériels se ramène à l'étude du mouvement d'un seul corps soumis à une force centrale (étude déjà faite).

Remarque : si $m_1 >> m_2, alors\ \mu \approx m_2$ **, la particule réduite est confondue avec M$_2$ et M$_1$ est le CI du système.**

b – Expressions des solutions :

Connaissant le mouvement de la particule réduite, c'est-à-dire connaissant son rayon vecteur (dans le référentiel barycentrique), on en déduit les rayons vecteurs des deux points M_1 et M_2.

Sachant que :

$$\vec{r} = \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad ; \quad m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{0}$$

On déduit :

$$\boxed{\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}} \qquad \boxed{\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}}$$

Les trajectoires de M_1 et M_2 se déduisent de celle de la particule fictive par de simples homothéties.

Etoiles doubles

c – Expressions de l'énergie et du moment cinétique barycentriques :

Energie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{\,2} + E_{p,\text{int}}$$

$$Or : \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v} \ et \ \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}, \ par\ conséquent :$$

$$E_m = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{v}^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{v}^{\,2} + E_{p,\text{int}}$$

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{v}^{\,2} + E_{p,\text{int}}$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^{\,2} + E_{p,\text{int}}}$$

C'est l'énergie de la particule réduite

c – Expressions de l'énergie et du moment cinétique barycentriques :

Moment cinétique barycentrique :

$$\vec{\sigma}_b = \overrightarrow{GM}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2\vec{v}_2$$

$Or\ m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2,\ par\ conséquent :$

$$\vec{\sigma}_b = \overrightarrow{GM}_1 \wedge (-m_2\vec{v}_2) + \overrightarrow{GM}_2 \wedge m_2\vec{v}_2 = \overrightarrow{M_1M}_2 \wedge m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{\sigma}_b = \vec{r} \wedge m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}\right)$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_b = \vec{r} \wedge \mu\vec{v}}$$

C'est le moment cinétique de la particule réduite par rapport à G.

III – Système isolé de deux points matériels :

6 – Applications :

L'étude du mouvement de deux points matériels en interaction mutuelle (et isolés) se ramène ainsi à l'étude du mouvement d'un seul point matériel placé dans un champ de force centrale (toujours dirigée vers G).

Ce mouvement possède les caractéristiques suivantes :

* Conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie mécanique et du moment cinétique.

* Mouvement plan (loi des aires)

* Utilisation des coordonnées polaires

* Energie potentielle effective (ou efficace)

* Formules de Binet

Etoiles doubles

1ère application : animation « étoiles doubles »

Etoiles doubles

2ème application : ex sur les étoiles doubles (ex n°5)

3ème application : masses reliées par un ressort (ex n°3 et 4)

III – Système isolé de deux points matériels :

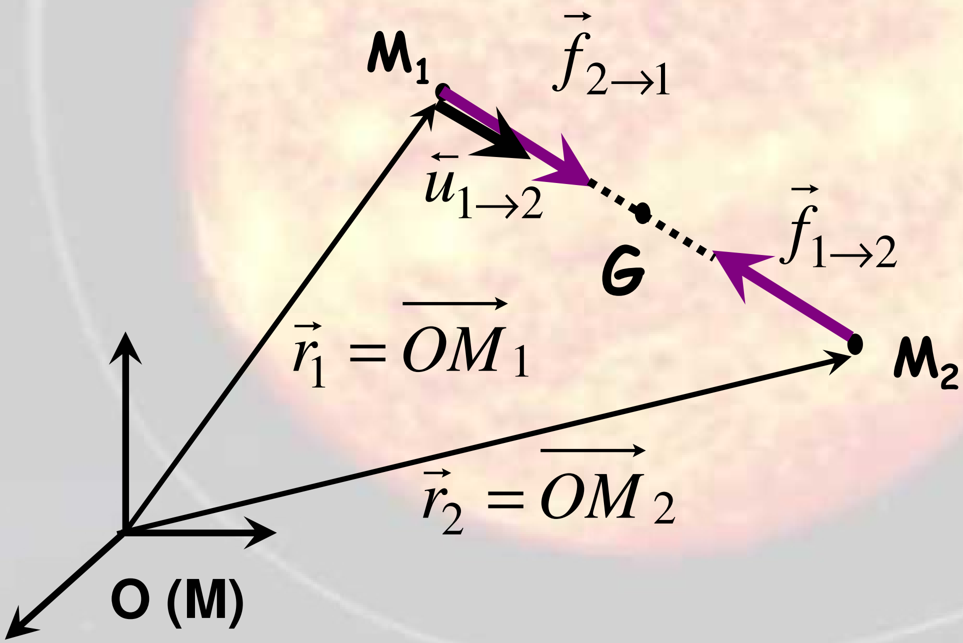
7 - Influence d'un champ gravitationnel extérieur (phénomène des marées) :

Que se passe-t-il si un système isolé de deux points matériels devient soumis au champ gravitationnel d'un corps massif ? (exemple : une étoile double qui passe au voisinage d'un astre massif).

Nous allons montrer que les deux points matériels M_1 et M_2 sont alors soumis à un champ de forces supplémentaires, appelé « champs des marées » et formellement identique à celui défini dans le cadre des marées océaniques.

Soit O un astre massif de masse M. Le référentiel barycentrique n'est plus galiléen. L'accélération d'entraînement de (R_b) par rapport au référentiel lié à l'astre (supposé galiléen) est donnée par le théorème du CI écrit dans (R) :

$$(m_1+m_2)\vec{a}(G) = -G\frac{m_1 M}{OM_1^3}\overrightarrow{OM}_1 - G\frac{m_2 M}{OM_2^3}\overrightarrow{OM}_2$$



Le PFD appliqué au point M_1 dans le référentiel barycentrique fait apparaître, en plus des forces réelles, la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{ie,1} = -m_1\vec{a}(G)$$

Et s'écrit :

$$m_1 \frac{d^2\overrightarrow{GM}_1}{dt^2} = \vec{f}_{2\to 1} - G\frac{m_1 M}{OM_1^3}\overrightarrow{OM}_1 + \vec{f}_{ie,1}$$

$$m_1 \frac{d^2\overrightarrow{GM}_1}{dt^2} = \vec{f}_{2\to 1} - G\frac{m_1 M}{OM_1^3}\overrightarrow{OM}_1 - m_1\frac{1}{m_1+m_2}\left(-G\frac{m_1 M}{OM_1^3}\overrightarrow{OM}_1 - G\frac{m_2 M}{OM_2^3}\overrightarrow{OM}_2\right)$$

$$m_1 \frac{d^2\overrightarrow{GM}_1}{dt^2} = \vec{f}_{2\to 1} + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(-G\frac{M}{OM_1^3}\overrightarrow{OM}_1 + G\frac{M}{OM_2^3}\overrightarrow{OM}_2\right)$$

Champ créé par l'astre au point M_1

L'opposé du champ créé par l'astre au point M_2

$$m_1 \frac{d^2\overrightarrow{GM}_1}{dt^2} = \vec{f}_{2\to 1} + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\underbrace{\left(-G\frac{M}{OM_1^3}\overrightarrow{OM}_1 + G\frac{M}{OM_2^3}\overrightarrow{OM}_2 \right)}_{\text{Champ des marées}}$$

Limite de Roche

(Animation Cabri)

Exercice

force de marées en astronomie, limite de Roche

La comète Shoemaker-Levy 9, en orbite autour de Jupiter, est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour se fragmenter en morceaux à cause des forces de marées dues à Jupiter (voir l'exercice proposé).