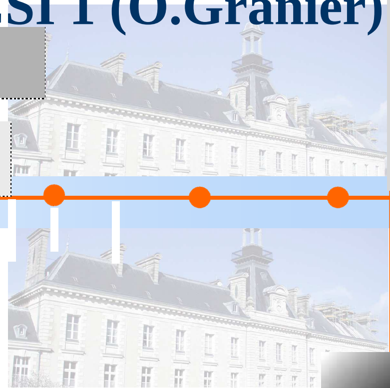
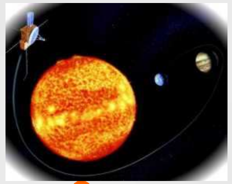
PCSI 1 (O.Granier)

Lycée Clemenceau



Cinématique
du point matériel

Olivier GRANIER



➢ **1 - Objet de la cinématique** : décrire les mouvements des corps sans chercher à les interpréter.

Point matériel : particule « suffisamment petite » pour pouvoir être assimilée à un point repérable par un ensemble de trois coordonnées.

➢ **2 - Référentiel** : un référentiel est un corps solide (c'est-à-dire indéformable), par rapport auquel on se place pour étudier le mouvement d'un point matériel.

Relativité du mouvement

➢ **3 - Repère :** un repère est un système d'un point et de trois axes permettant de repérer un point matériel.

* Repère cartésien (Oxyz)

4 - Systèmes de coordonnées :

* a - Coordonnées cartésiennes

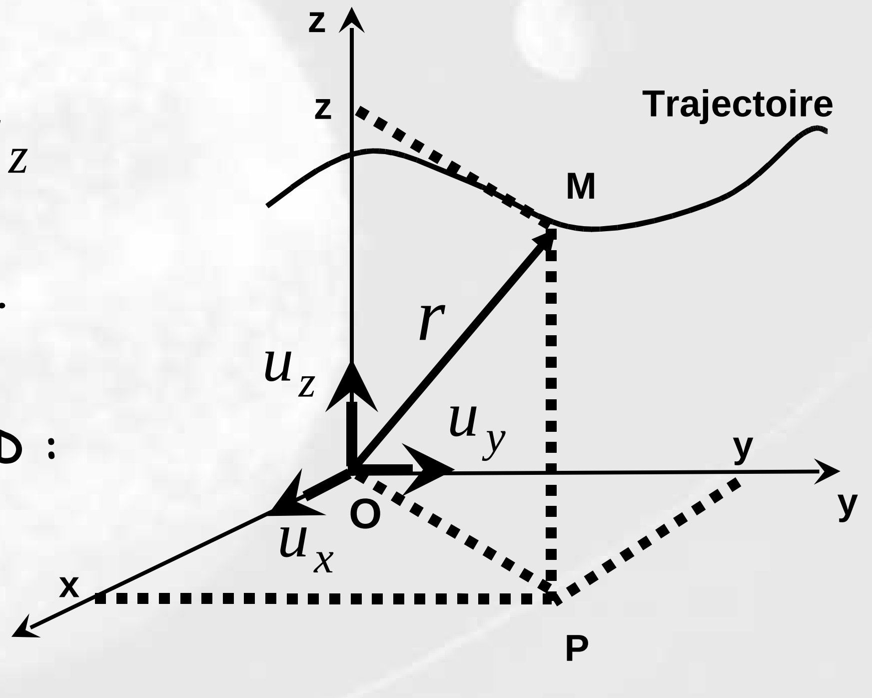
$$\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$$

est appelé rayon vecteur de M.

$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une BOND :

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \;\; ; \;\; \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$$

$$\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$$



➢ Systèmes de coordonnées :

*** b - Coordonnées polaires (mouvements plans uniquement)**

r et θ sont les coordonnées polaires de M.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

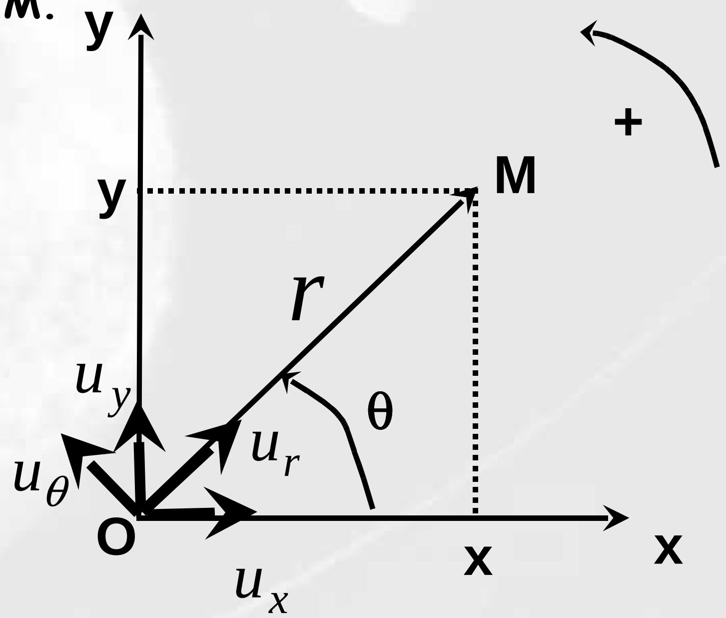
$$\theta \in [0,2\pi]$$

x = r cos(θ) ; y = r sin(θ)

$$\vec{u}_r = \cos(\theta)\,\vec{u}_x + \sin(\theta)\,\vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{u}_x + \cos(\theta)\,\vec{u}_y$$

$\vec{u}_\theta$ **est directement perpendiculaire à** $\vec{u}_r$

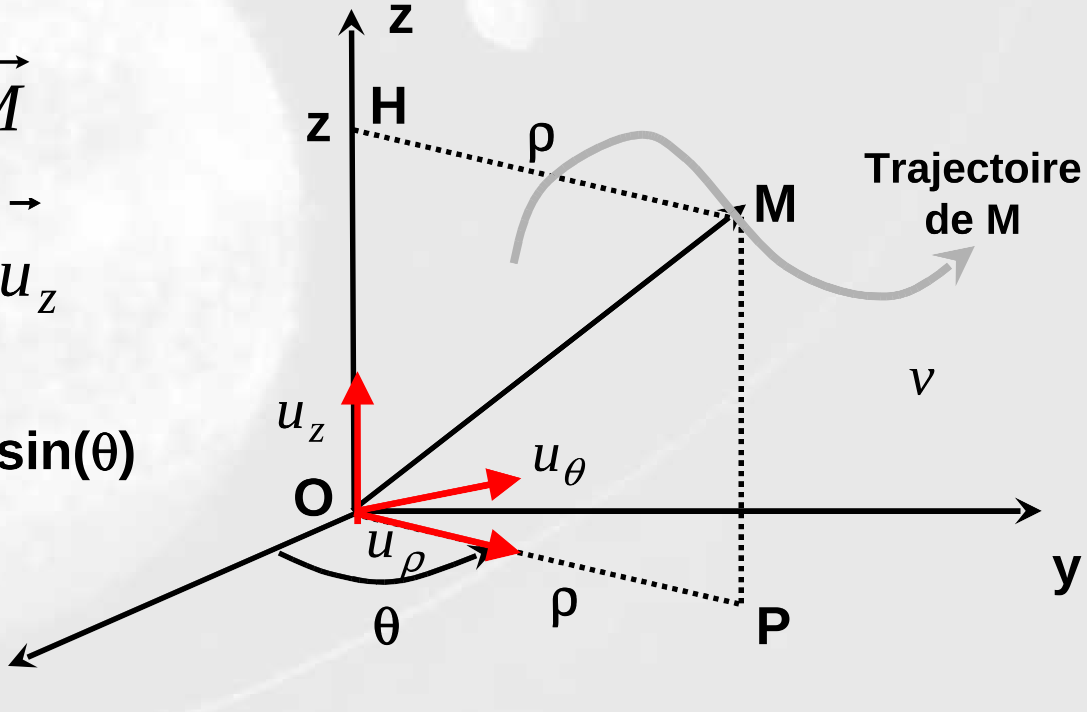


➢ Systèmes de coordonnées :

* c - Coordonnées cylindriques : (ρ,θ,z) sont les coordonnées cylindriques de M

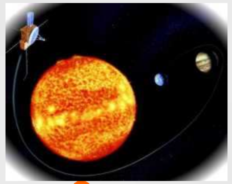
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z$$



x = ρ cos(θ) ; y = ρ sin(θ)

Avec : $\theta \in [0, 2\pi]$



➢ **6 - Le temps** : le temps est une notion absolue, c'est-à-dire indépendante du référentiel d'étude : ainsi, deux observateurs liés à des référentiels différents attribuent les mêmes dates aux mêmes événements.

En mécanique relativiste (Einstein, 1905), le temps perd son caractère absolu (phénomène de dilatation des durées) :

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} t_0$$

t_0 : durée de vie propre de la particule (au repos)

v : vitesse de la particule dans le laboratoire

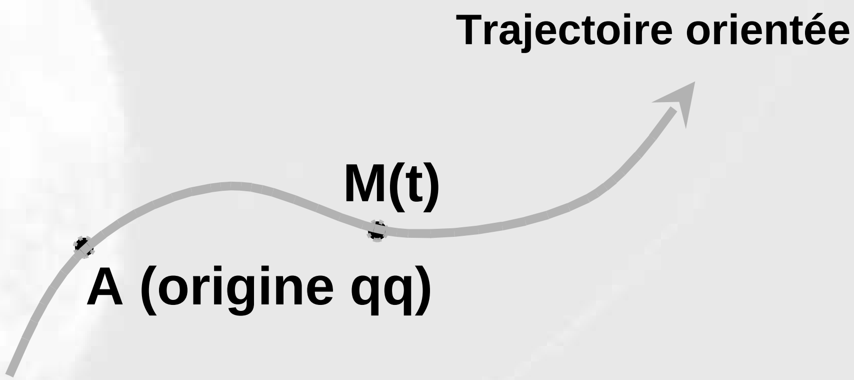
c : vitesse de la lumière dans le vide

t : durée de vie observée par un observateur lié au laboratoire

➢ 7 - Trajectoire :

L'ensemble des positions occupées par un mobile en fonction du temps est une courbe appelée trajectoire.

$$s = \overset{\frown}{AM}$$



est l'abscisse curviligne de M.

La fonction s = s(t) est appelée équation horaire du mouvement

➢ 8 - Vitesse associée à un mouvement :

Quelques propriétés des fonctions vectorielles :

* $$\frac{d}{dt}\left(\lambda(t)\vec{A}(t)\right)=\frac{d\lambda(t)}{dt}\vec{A}(t)+\lambda(t)\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$$

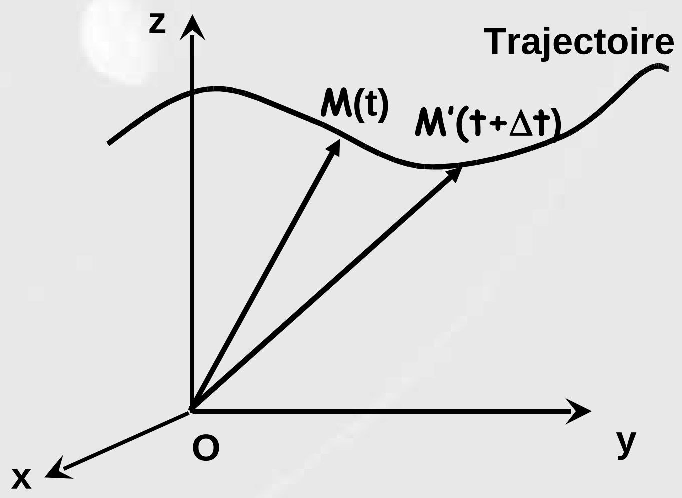
* $$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}(t).\vec{B}(t)\right)=\frac{d\vec{A}(t)}{dt}.\vec{B}(t)+\vec{A}(t).\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

* $$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}(t)\wedge\vec{B}(t)\right)=\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\wedge\vec{B}(t)+\vec{A}(t)\wedge\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

➢ Vecteur vitesse :

La figure précise les notations :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est le rayon vecteur du point M.

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et est dirigé dans le sens du mouvement (d'après la définition même)

➢ Coordonnées du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

Les vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont indépendants du temps, donc :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$$

➢ Coordonnées du vecteur vitesse en coordonnées polaires :

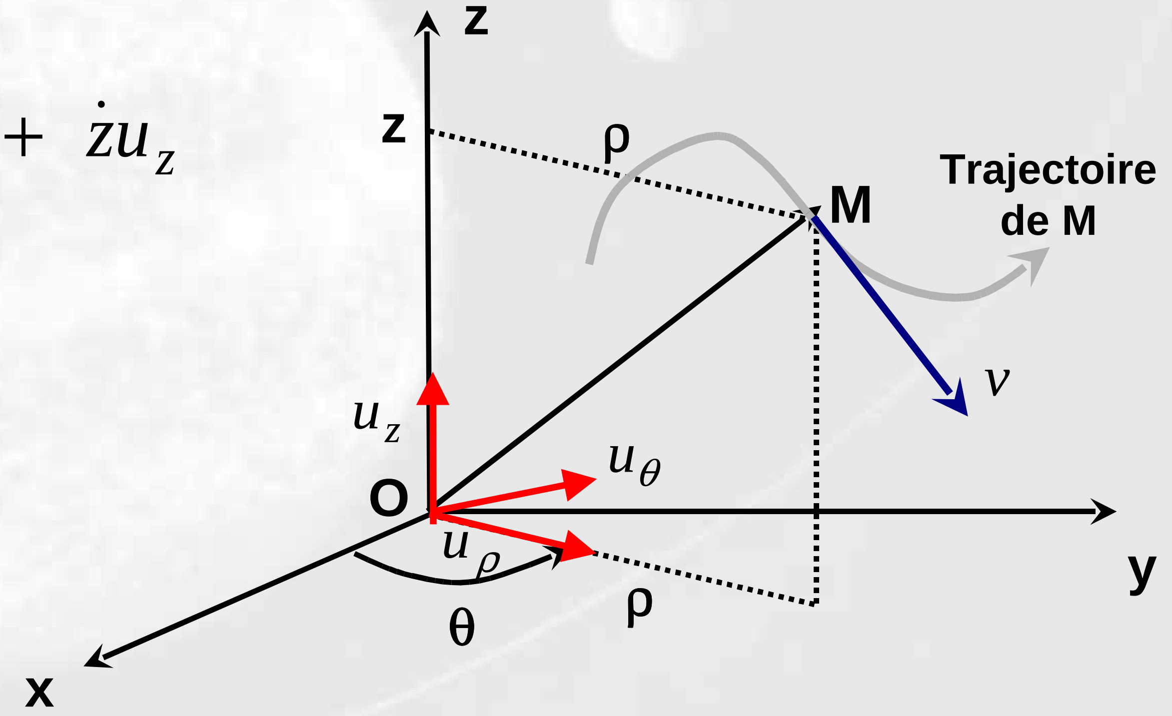
$$\vec{v} = \underbrace{\dot{r}\,\vec{u}_r}_{\text{Vitesse radiale}} + \underbrace{r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}_{\text{Vitesse orthoradiale}}$$

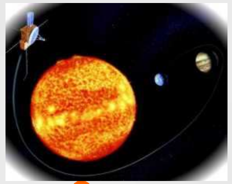
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r \end{cases}$$

➢ **Coordonnées du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :**

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_\rho \end{cases}$$





9 - Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Le vecteur accélération caractérise le rythme de variation du vecteur vitesse.

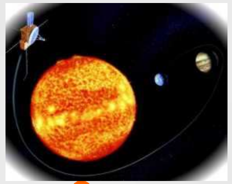
En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

- **En coordonnées polaires et cylindriques :**

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r}_{\text{Accélération radiale}} + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{u}_\theta}_{\text{Accélération orthoradiale}}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$



➢ 10 - Mouvements rectilignes :

La trajectoire est une portion de droite : vecteur vitesse et vecteur accélération sont portés par cette droite, souvent choisie comme axe (Ox) par exemple.

Vecteurs vitesse et accélération dans le même sens : mouvement accéléré

Vecteurs vitesse et accélération en sens contraire : mouvement retardé

Vecteur accélération constant : mouvement uniformément varié (exemple : chute libre où $a = g$, g étant l'accélération de la pesanteur (g = 9,8 m.s^{-2})

Exemple : mouvement rectiligne sinusoïdal ($x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$)

x_m : amplitude du mouvement ; ω : pulsation du mouvement ($\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, avec T la période et f=1/T la fréquence du mouvement) et φ est la phase.

11 - Mouvements de rotation :

r = OM = R = cste

θ est fonction du temps ; on note $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

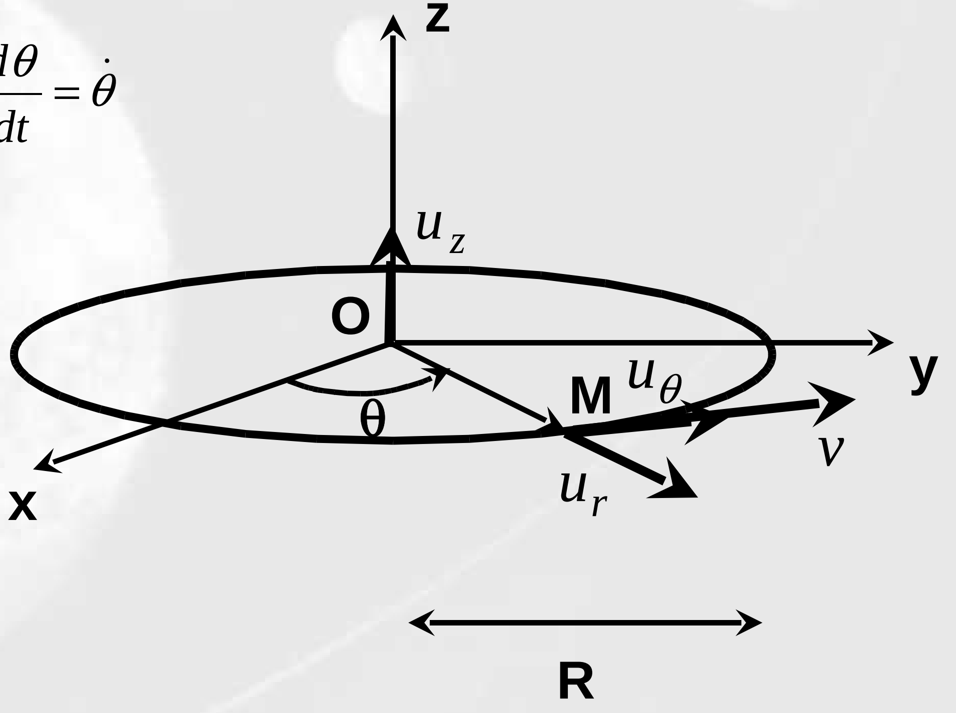
la vitesse angulaire de M.

Le mouvement est dit uniforme si :

ω = cste

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + R\dot{\omega}\,\vec{u}_\theta$$



Mouvement uniforme : $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{R}\vec{u}_r$

(accélération centripète uniquement)

12 - Mouvement hélicoïdal :

<u>Exercice 7 (hélice circulaire)</u> : dans un référentiel $\Re(Oxyz)$, un point M décrit une hélice circulaire dont l'équation en coordonnées cylindriques est :

$$x = R\cos\theta \quad ; \quad y = R\sin\theta \quad ; \quad z = h\theta$$

où R et h sont des constantes. On suppose la vitesse angulaire constante. A l'instant $t = 0$ le point M est en A de coordonnées cylindriques (R, 0, 0).

a) Calculer dans $\Re$ les composantes du vecteur vitesse. Donner sa norme. Montrer que la vitesse fait un angle constant a avec l'axe Oz.

b) Calculer les composantes du vecteur accélération.

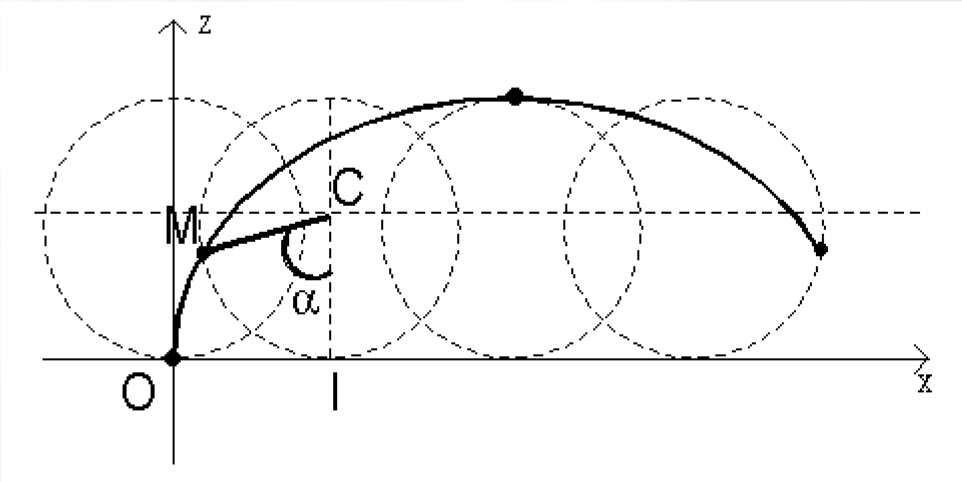
c) Evaluer la distance parcourue sur l'hélice à l'instant t.

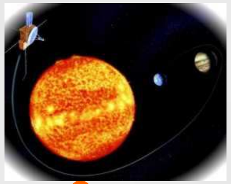
Animation cabri :

Animation JJ.Rousseau :

➢ 13 - Mouvement cycloïdal (exercice n°5)

Une roue de rayon r et de centre C roule sans glisser sur l'axe (Ox) en restant dans le plan (Ozx). Le repère cartésien (O; ex, ez) est lié à $\Re$ le référentiel d'étude. Soit M un point lié à la roue, situé sur la circonférence. A l'instant t = 0, M est confondu avec l'origine O. La vitesse de C est constante et est égale à v.





a) Comment exprimer la condition : " la roue ne glisse pas " ?

b) Déterminer en fonction de v, t et r à l'instant t :

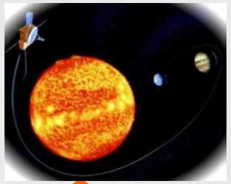
* la position de M dans le repère (O; ex, ez)

* le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ de M

* le vecteur accélération $\vec{a}_M$ de M, sa norme et sa direction

c) Déterminer $\vec{v}_M$ et $\vec{a}_M$ lorsque M est en contact avec l'axe (Ox).

Animation JJ.Rousseau :



➢ 14 - Spirale exponentielle (exercice n°12)

Dans le plan (*xOy*) d'un repère, un point P de coordonnées polaires r et θ décrit la spirale d'équation polaire $r = a \exp(\omega t)$, avec $\omega t = \theta$.

a) Définir en fonction de r et ω les composantes polaires du vecteur vitesse .

b) Définir en fonction de r et ω les composantes polaires du vecteur accélération.

c) Montrer que l'angle α que fait le vecteur vitesse avec l'axe (Ox) est $\theta + \pi/4$.

d) Pour $r = 2 \exp(\theta)$ et $\omega = 1$ rad.s^{-1}, on trace la courbe ci-contre que vous recopierez ; on considère le point P d'abscisse 600 et d'ordonnée - 300. Placer sur la feuille de copie, les coordonnées r et θ, les vecteurs unitaires u_r et u_θ . Déterminer les coordonnées cartésiennes du point N pour lequel $\theta = 3\pi/2$ et placer le point sur la courbe.

Fichier Maple :