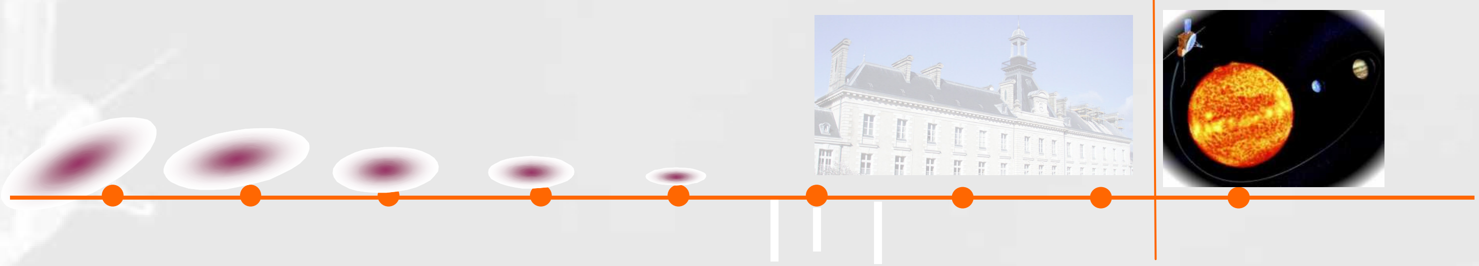
(O.Granier)

Les lois de Newton

(mécanique du point matériel)

Olivier GRANIER



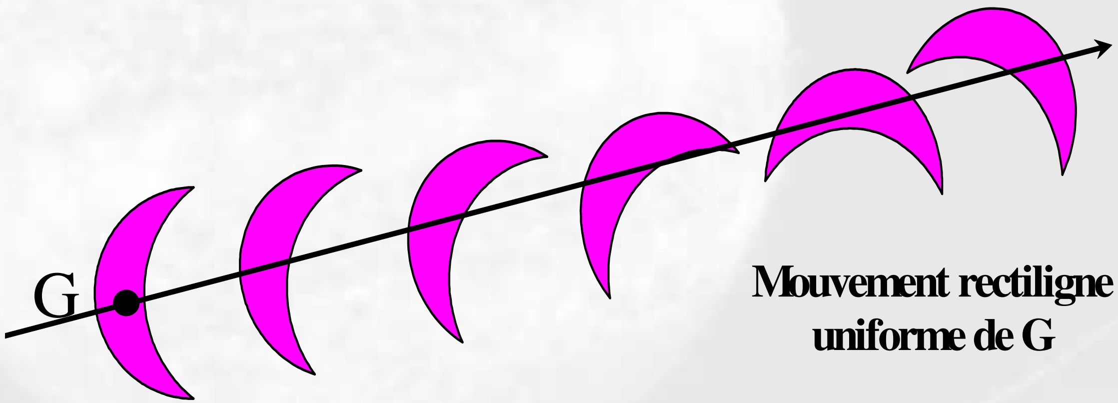
- **Objet de la dynamique** : **déterminer les causes des mouvements.**
  - Galilée (physicien italien, 1564 – 1642)
  - Kepler (astronome allemand, 1571 – 1630)
  - Newton (physicien anglais, 1642 – 1727)
  - Einstein (physicien américain, 1879 – 1955)
  - Schrödinger (physicien autrichien, 1887 – 1961)
- **Mécanique newtonienne → 3 grands principes**
  - Le principe fondamental de la dynamique
  - Le principe d'inertie
  - Le principe de l'action et de la réaction

I - NOTION DE REFERENTIELS GALILEENS

1 - Principe d'inertie :

Enoncé par Galilée :

« Le centre d'inertie d'un système isolé ou pseudo-isolé persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme dans lequel il se trouve. »



Dans quels référentiels est valable le principe d'inertie ?

Dans les référentiels galiléens !

2 - Référentiels galiléens :

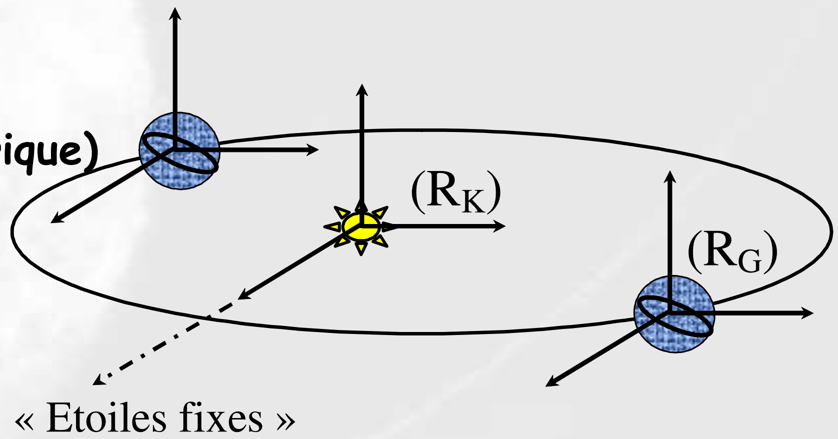
« On appelle *référentiel galiléen* un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié, c'est-à-dire dans lequel un point matériel soumis à une force constamment nulle est caractérisé par un mouvement rectiligne uniforme ou par le repos. »

<u>Exemples de référentiels galiléens</u> :

- Référentiel de Kepler : (Héliocentrique)

*** Origine : le centre d'inertie du Soleil

*** Trois axes dirigés vers trois étoiles lointaines « fixes »



(Référentiel de Copernic : centré sur le centre d'inertie du système solaire)

Utilisés pour : - Mouvements des planètes

- Mouvements des sondes interplanétaires

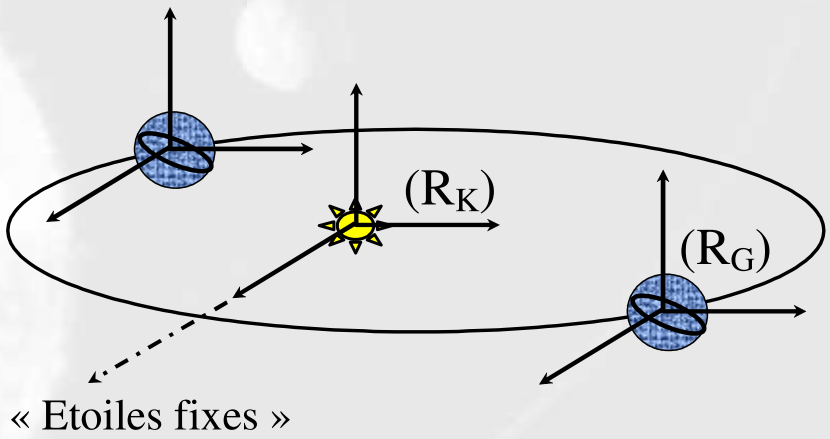
- **Référentiel géocentrique :**

*** Origine : le centre d'inertie de la Terre

*** Trois axes dirigés vers trois étoiles lointaines « fixes »

(R_G) a un mouvement de translation quasi-circulaire par rapport à (R_K).

Utilisé pour l'étude des mouvements des satellites autour de la Terre



- **Référentiel terrestre (ou du laboratoire) :**

En 1ère approximation, ces référentiels sont galiléens.

II - PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

➢ 1 - Notion de force

4 interactions fondamentales :

→ Interaction gravitationnelle

→ Interaction électromagnétique

→ Interaction faible

→ Interaction forte

Document :

Définition d'une force :

« On appelle force la grandeur vectorielle décrivant une interaction capable de produire un mouvement ou encore de créer une déformation. »

Exemples :

→ Forces de contact

→ Forces à distance

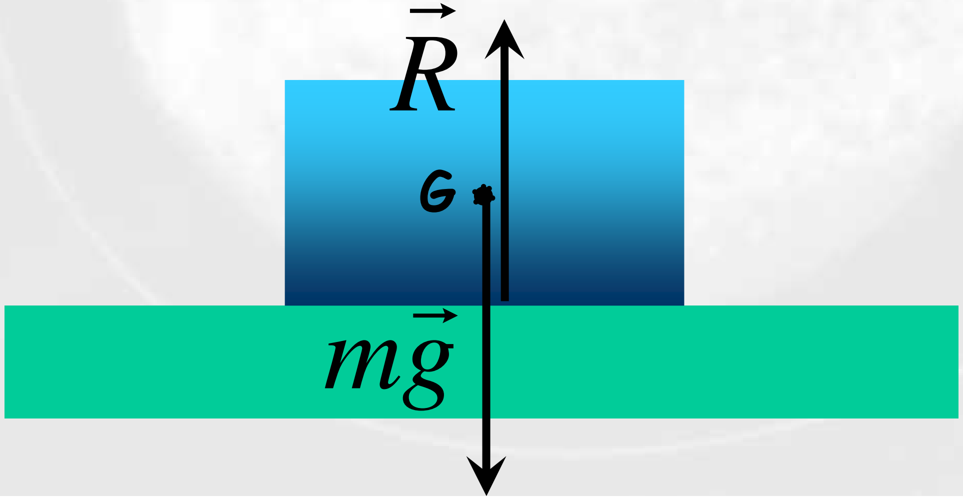
Olivier GRANIER

Forces de contact

- **Réaction du support :**

La force que subit un objet posé sur un sol en provenance du support s'appelle la réaction du support. Cette force est répartie sur toute la surface de contact support-objet. On peut représenter cette action par une force, résultante de toutes les actions exercées sur la surface.

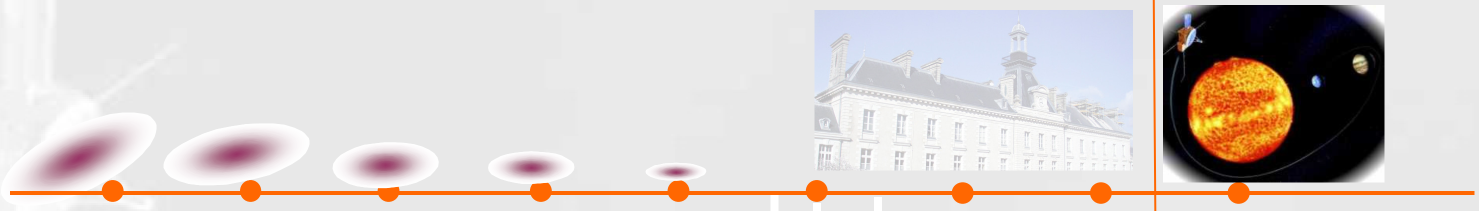
Cas d'une surface horizontale :



L'objet étant à l'équilibre :

$$\vec{R} = -m\vec{g}$$

Remarque : d'après le principe de l'action et de la réaction, l'action de l'objet sur le support est égale au poids de l'objet.



- Forces de frottements :

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz ou liquide), il subit de la part du fluide des forces de frottements, que l'on peut modéliser par :

* Forces de frottements « visqueux » (à faible vitesse) :

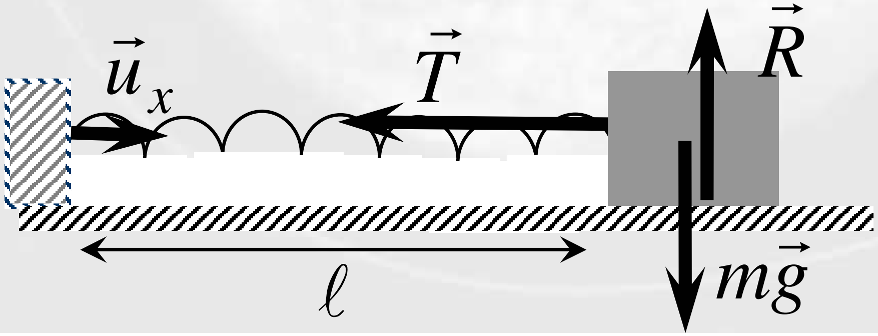
$$\vec{f} = -km\vec{v}$$

Où m est la masse du solide, $\vec{v}$ sa vitesse et k une constante positive.

* Forces de frottements de type « quadratique » (à plus grande vitesse) :

$$\vec{f} = -km\vec{v}^{\,2}$$

- Tension d'un ressort :



$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_x$$

ℓ_0 : longueur à vide du ressort

Olivier GRANIER

- **Forces à distance**
  - **Force électrique :**

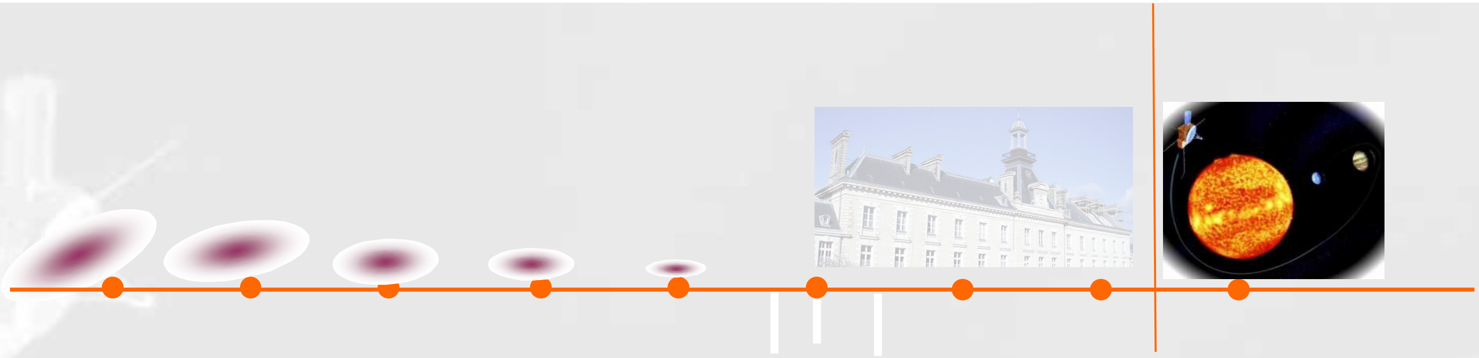
Une particule M(m) et de charge électrique q est placée dans un champ électrique noté $\vec{E}$. La force qui s'exerce sur la particule est :

$$\vec{f} = q\vec{E}$$

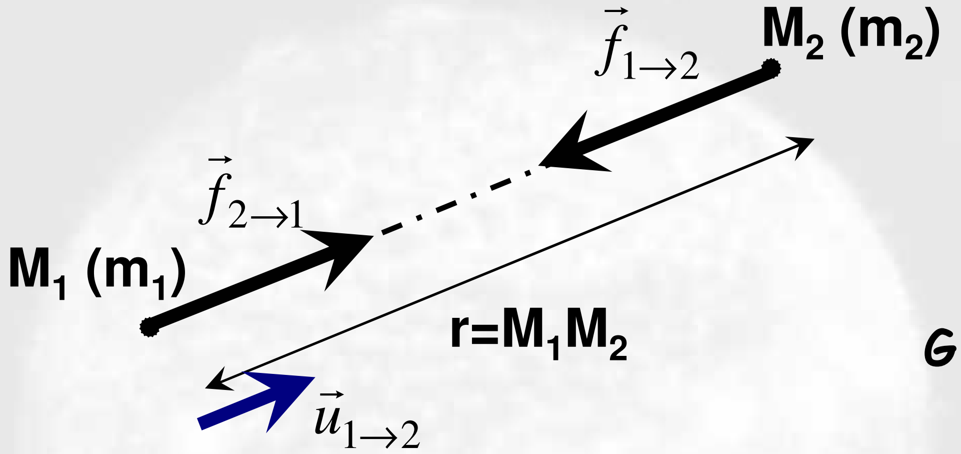
- **Force magnétique :**

Une particule M(m) de vitesse $\vec{v}$ et de charge électrique q est placée dans un champ magnétique noté $\vec{B}$. La force qui s'exerce sur la particule est :

$$\vec{f} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$



- **Force gravitationnelle :**

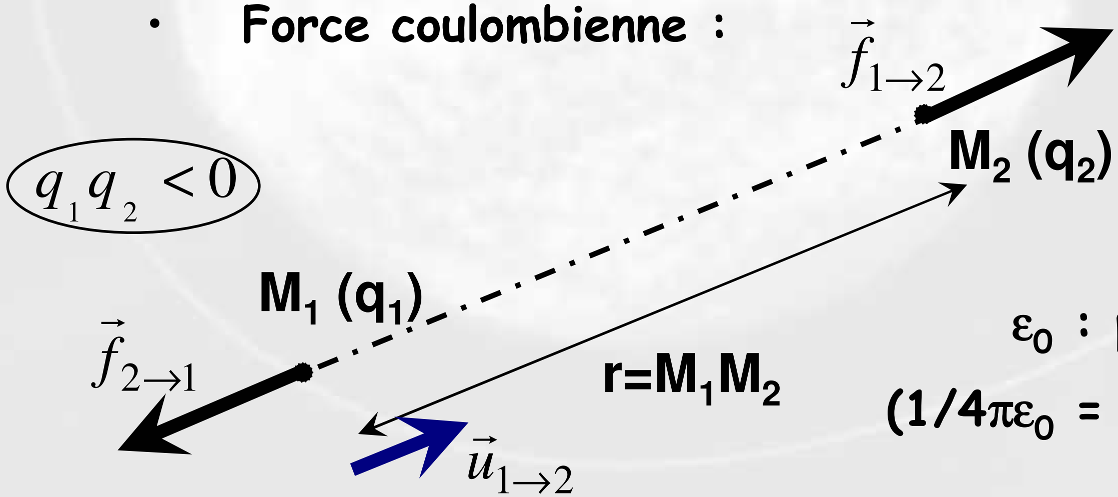


$$\vec{f}_{1\to 2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{1\to 2}$$

$$\vec{f}_{1\to 2} = -\vec{f}_{2\to 1}$$

G : constante de gravitation universelle

- **Force coulombienne :**



$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{1\to 2}$$

$$\vec{f}_{1\to 2} = -\vec{f}_{2\to 1}$$

ε_0 : permittivité du vide

($1/4\pi\varepsilon_0$ = 9.10^9 USI)

➢ 2 - Notion de quantité de mouvement

M (m) : point matériel M de masse m, de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen (R).

La quantité de mouvement de M (m) est : $\vec{p} = m\vec{v}$

Importance de cette grandeur : elle prend en compte la vitesse mais aussi « l'inertie » du corps (sa masse).

➢ 3 - Principe fondamental de la dynamique

M (m) : point matériel M de masse m, de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen (R).

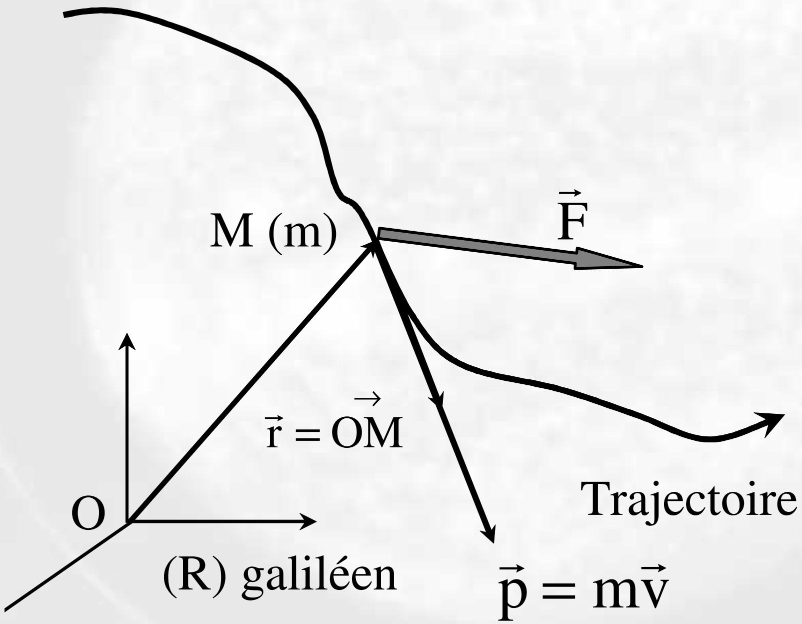
Soit $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement de M dans (R).

Soit $\vec{a}$ l'accélération de M dans (R).

$\vec{F}$: somme vectorielle des forces qui s'exercent sur M (m).

Enoncé du « PFD »

« La dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la somme vectorielle des forces qui lui sont appliquées. »



$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

(si m est une constante)

Remarque : le PFD englobe le principe d'inertie.

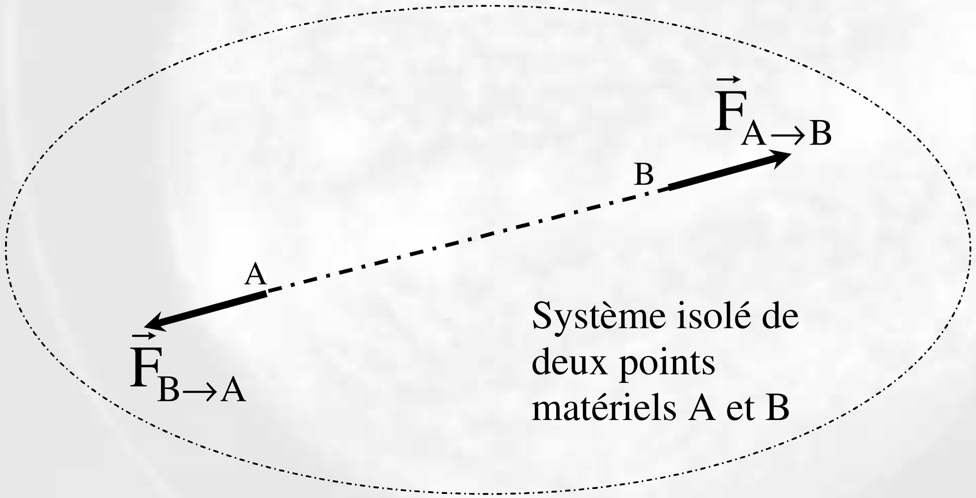
Remarque : ne trouvez-vous pas miraculeusement simple le PFD puisqu'il ne fait intervenir que la dérivée seconde de la position , pondérée par une constante m ?

Pourquoi ne pas songer à faire intervenir la position et ses dérivées successives jusqu'à l'infini , chacune pondérée par une constante de dimension appropriée, comme dans la formule suivante ?

$$\vec{F} = \alpha\,\vec{r} + \beta\,\frac{d\vec{r}}{dt} + m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \gamma\,\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} + ...$$

➢ 4 - Principe de l'action et de la réaction

« Le principe de l'action et de la réaction dit que les forces qu'exercent l'un sur l'autre deux points matériels sont coaxiales, de même intensité et de sens opposés :



$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

et coaxiales

Une illustration amusante des trois lois de Newton :

➤ 5 - Un premier exemple d'application ; la chute libre

• Le poids d'un corps :

M (m) : $\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{g}$ est appelé vecteur accélération de la pesanteur.

A Nantes : g = 9,81 m.s $^{-2}$

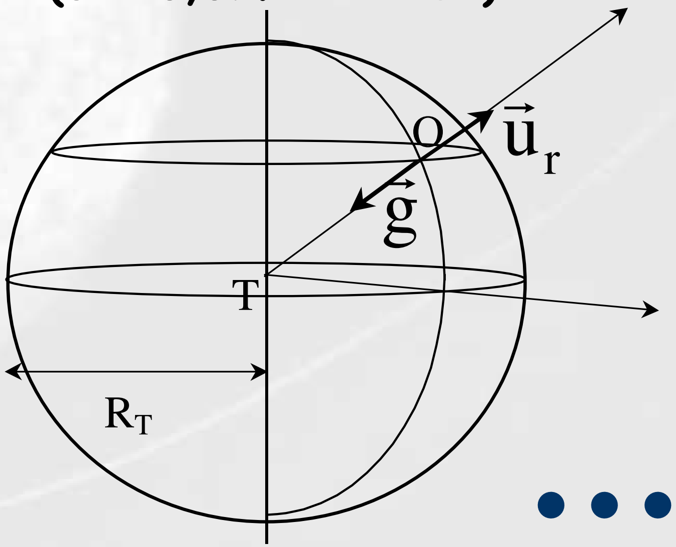
Si on néglige la rotation propre de la Terre :

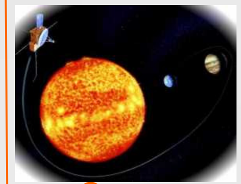
G : constante de gravitation universelle (G = 6,67.10 $^{-11}$ SI)

M_T = 6.10 ^{24} kg (masse de la Terre)

R_T = 6370 km (rayon de la Terre)

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{R_T^2}\vec{u}_r$$





6 - Mouvement d'un projectile dans le vide

Voir l'exercice n°1 et le fichier Maple sur la parabole de sûreté

Prise en compte de la résistance de l'air

→ Force de frottement visqueux ($f = - kmv$)

→ Force de frottement quadratique ($f = - kmv^2$)

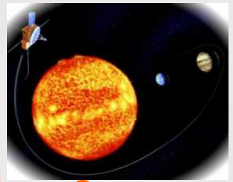
Notions de « vitesse limite » v_{lim}

Chute libre sur la Lune

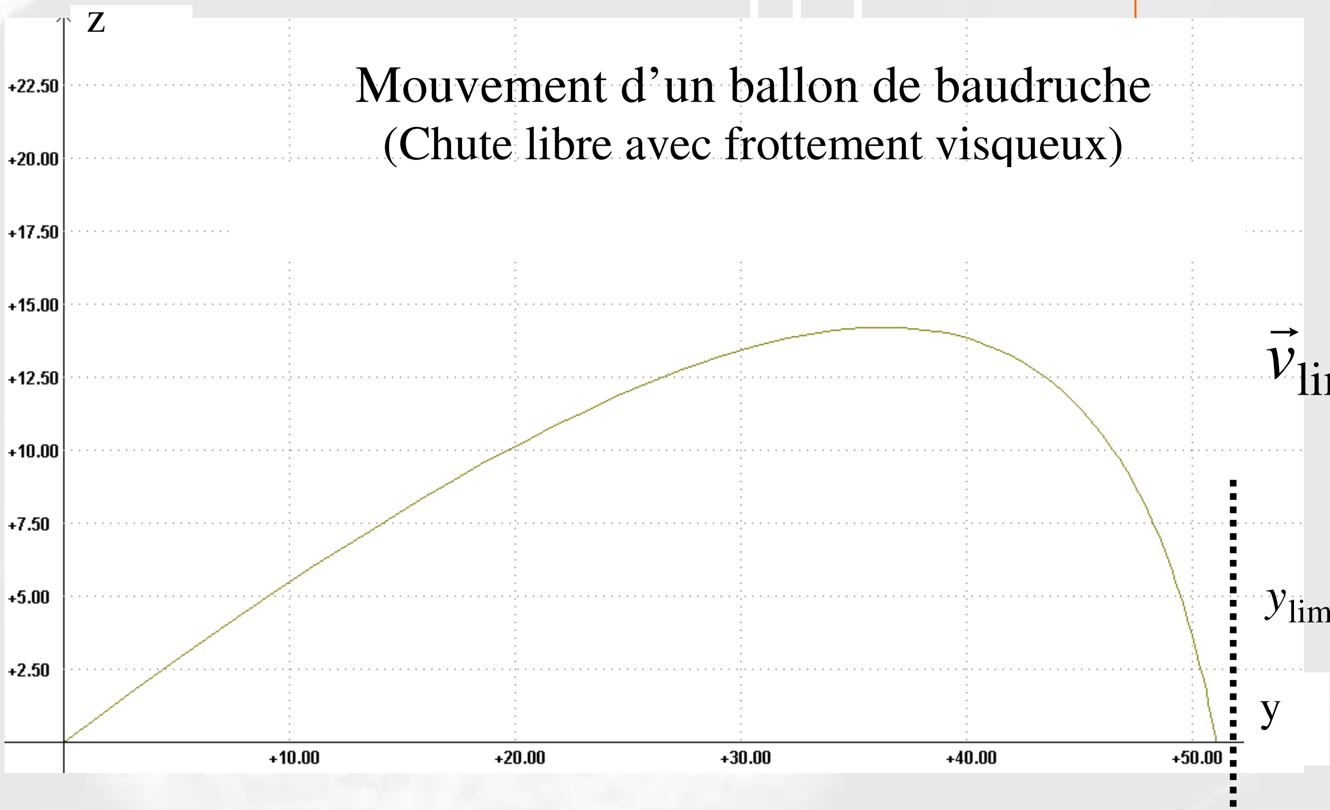
Exercices d'application :

→ Mouvements horizontal puis vertical d'une bille dans un milieu visqueux.

→ Mouvement d'un ballon de baudruche



Mouvement d'un ballon de baudruche
(Chute libre avec frottement visqueux)



$$\vec{v}_{\lim} = \frac{1}{k}\vec{g}$$

$$y_{\lim} = \frac{1}{k} v_0 \cos\alpha$$

$$y = \frac{1}{k} v_0 \cos\alpha \left(1 - e^{-kt}\right) \quad ; \quad z = -\frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{g}{k}\right)\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Simulation Java : ▶ **Simulation Cabri :** ▶

Résolution avec MAPLE

Equations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} \dfrac{dv_y}{dt} = -k\, v_y \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -kv_z - g \end{cases}$$

m = 1 kg ; k = 10 USI ; v_0 = 1 m.s^{-1} ; g = 9,8 m.s^{-2}

Fichier MAPLE : ▶ (chute libre 1)

Chute libre avec frottement quadratique : résolution numérique avec MAPLE

Equations différentielles du mouvement :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -km\,v^2\,\frac{\vec{v}}{v} + m\,\vec{g} \qquad \textbf{D'où} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dv_y}{dt} = -k\,v_y^2 \\[2ex] \dfrac{dv_z}{dt} = -k\,v_z^2 - g \end{array} \right.$$

m = 1 kg ; k = 0,8 USI ; g = 9,8 m.s^{-2}

Fichier MAPLE : (chute libre 2)

➢ 7 - Théorème du Centre d'inertie :

• Centre d'inertie d'un système de points matériels :

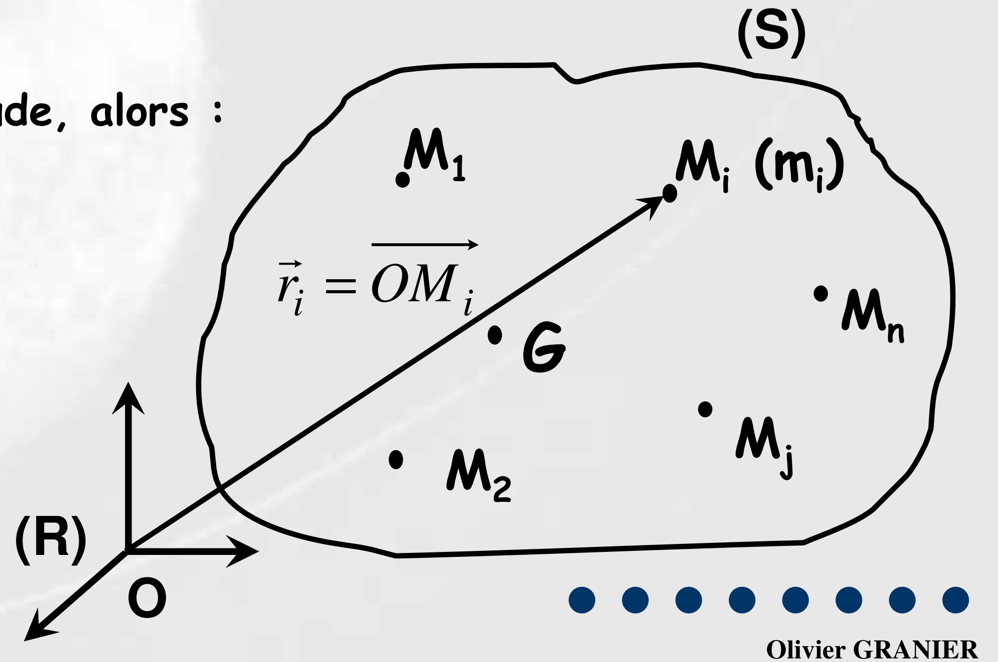
« Le centre d'inertie G d'un système de points matériels M_i de masse m_i est le barycentre des points M_i affectés des coefficients m_i, soit :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$$

Si O est l'origine du référentiel d'étude, alors :

$$\overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}_i = -\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM}_i$$

D'où $$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i}{m_T}$$



• Quantité de mouvement totale du système :

La quantité de mouvement totale du système de points matériels est (dans le référentiel d'étude (R)) :

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v_i} \qquad \text{avec} \qquad \vec{v}_i = \frac{d(\overrightarrow{OM_i})}{dt}$$

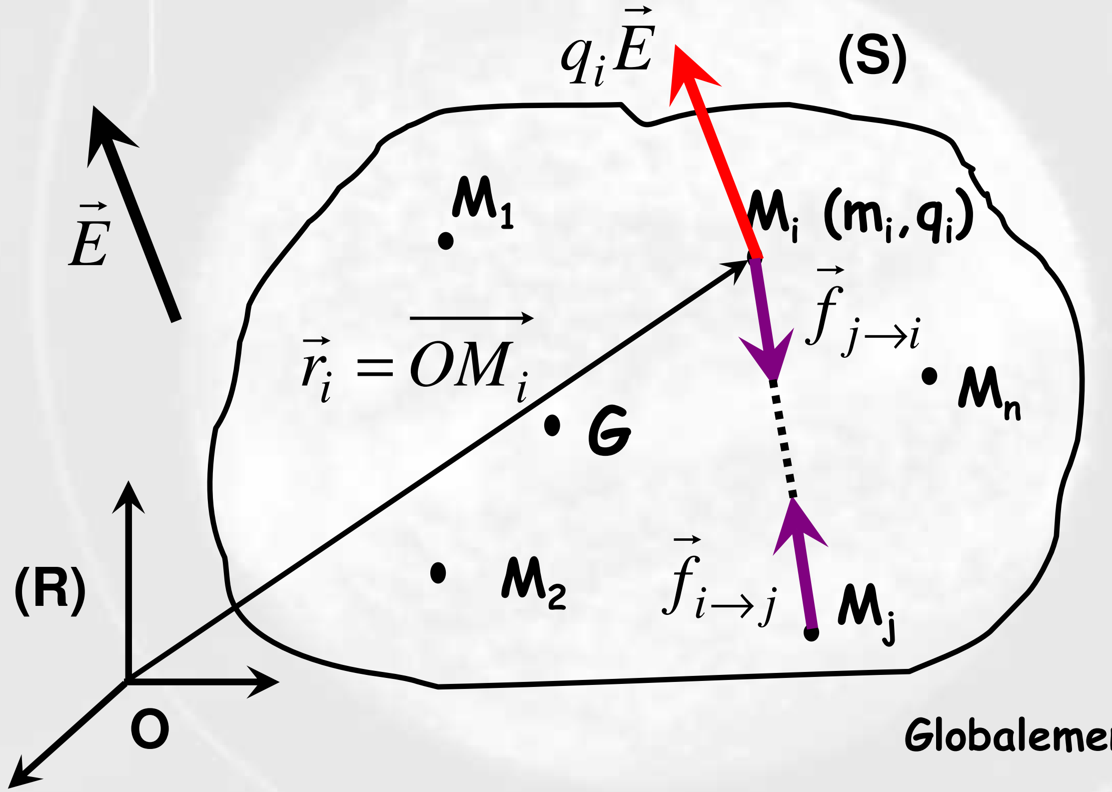
Elle est reliée à la vitesse du centre d'inertie G dans (R) :

$$\vec{p} = \sum_i m_i \frac{d(\overrightarrow{OM_i})}{dt} = \sum_i \frac{d(m_i \overrightarrow{OM_i})}{dt} = \sum_i m_i \frac{d(\overrightarrow{OG})}{dt} = m_T \frac{d(\overrightarrow{OG})}{dt}$$

Soit : $$\vec{p} = m_T \vec{v}_G$$

« La quantité de mouvement d'un système de points matériels est égale à la quantité de mouvement d'un point fictif situé au centre d'inertie du système et possédant toute la masse de celui-ci. »

- **Forces intérieures et forces extérieures :**



$q_i\vec{E}$: force extérieure qui s'exerce sur le point M_i

$\vec{f}_{j\to i}$: force intérieure exercée par le point (j) sur le point (i)

$$\vec{f}_{i\to j} = -\vec{f}_{j\to i}$$

Globalement : $\displaystyle\sum_i \left(\sum_{j\neq i} \vec{f}_{j\to i} \right) = \vec{0}$

• Théorème du centre d'inertie :

Le PFD appliqué à un point matériel donne :

$$m_i \frac{d(\vec{v}_i)}{dt} = \vec{F}_{i,ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \to i}$$

Où $\vec{F}_{i,ext}$ désigne la résultante des forces extérieures qui s'exercent sur le point (i).

En sommant sur tous les points du système :

$$\sum_i \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = m_T \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,ext} + \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \to i} \right) = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$$

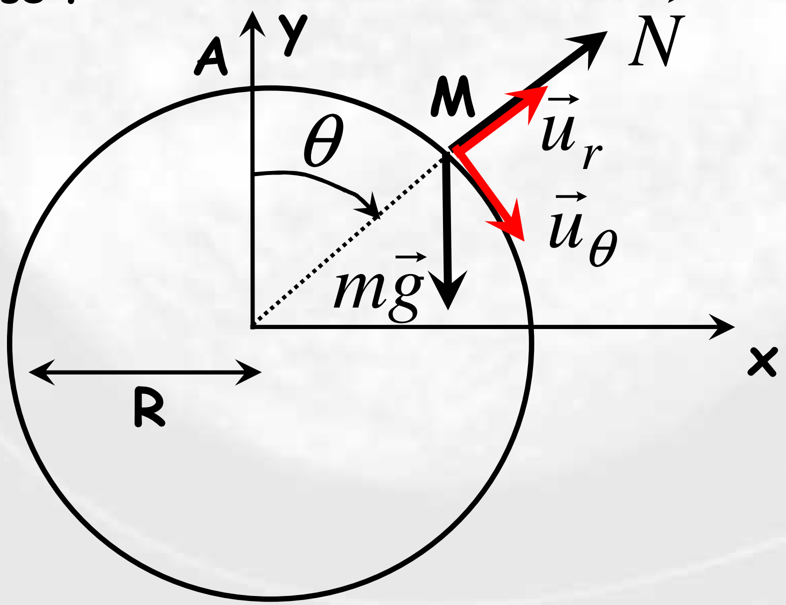
$$\boxed{m_T \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_{ext}}$$

« Le mouvement du centre d'inertie d'un système de points matériels est celui d'un point qui aurait la masse totale du système et auquel serait appliquée la somme des forces extérieures au système. »

➢ 8 - Applications du PFD : point mobile sur une sphère

• <u>Enoncé du problème</u> : un point matériel M de masse m est placé au sommet A d'une sphère de rayon R. On déplace légèrement le point matériel pour qu'il quitte la position A avec une vitesse quasiment nulle et glisse sans frottement le long de la sphère.

Déterminer la position où le mobile quitte la sphère. Quelle est alors sa vitesse ?

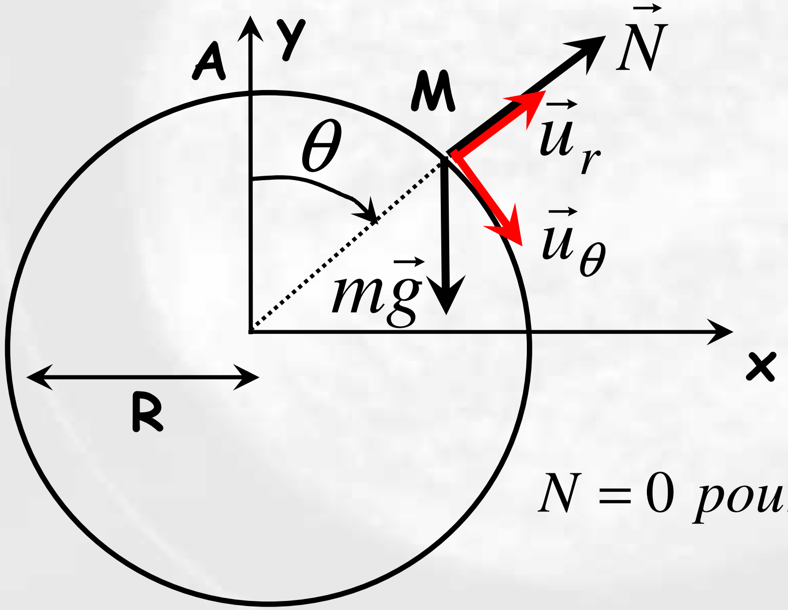


Dans les applications qui suivent, le référentiel d'étude est le référentiel (R) du laboratoire (référentiel « terrestre »), supposé galiléen.

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \quad ; \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$m\vec{g} = mg(-\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta) \quad ; \quad \vec{N} = N\,\vec{u}_r$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$



$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N & (sur\ \vec{u}_r) \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta & (sur\ \vec{u}_\theta) \end{cases}$$

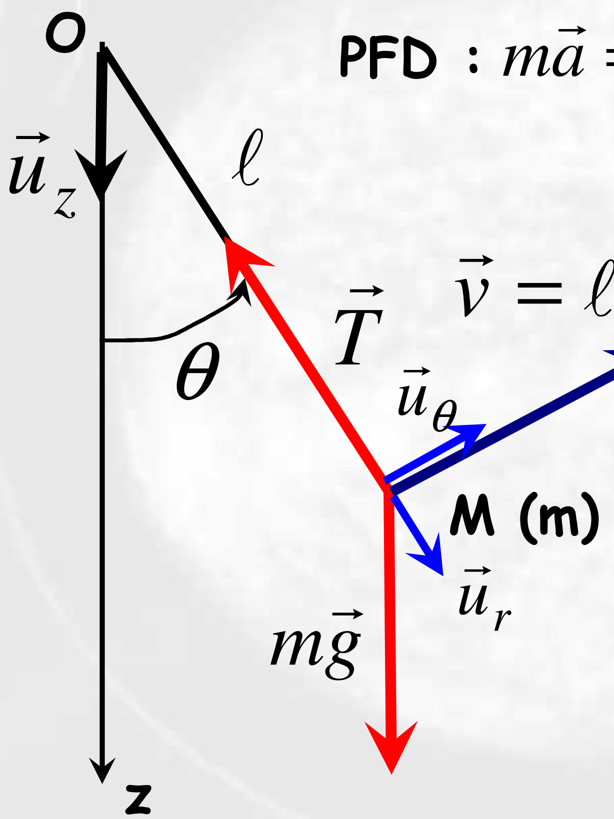
$$N = mg(3\cos\theta - 2)$$

$$N = 0\ pour\ \cos\theta = \frac{2}{3},\ soit\ \theta = 48°\ et\ alors\ v = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

Une simulation de loopings

(l'exercice au format pdf)

➢ 9 - Applications du PFD : oscillations d'un pendule simple



PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$

$$\vec{v} = \ell\,\dot{\theta}\,u_\theta$$

$$\begin{cases} -m\ell\,\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ m\ell\,\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

Pour de faibles oscillations ($\sin\theta = \theta$) :

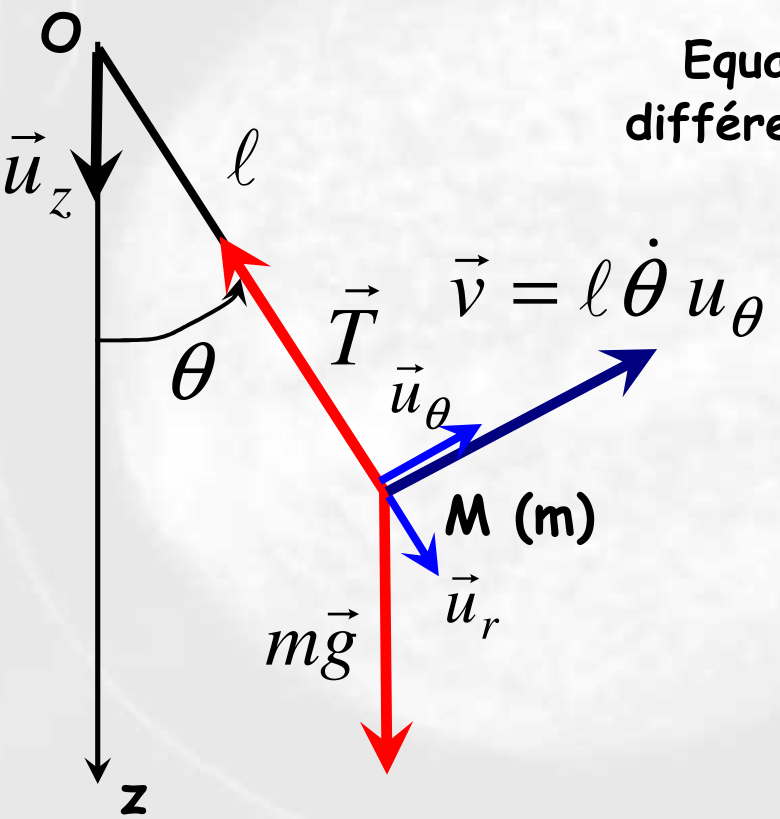
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta \;;\; \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \;;\; T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t)$$

(ω_0 : pulsation du mouvement)

Olivier GRANIER

Résolution par le logiciel Maple :



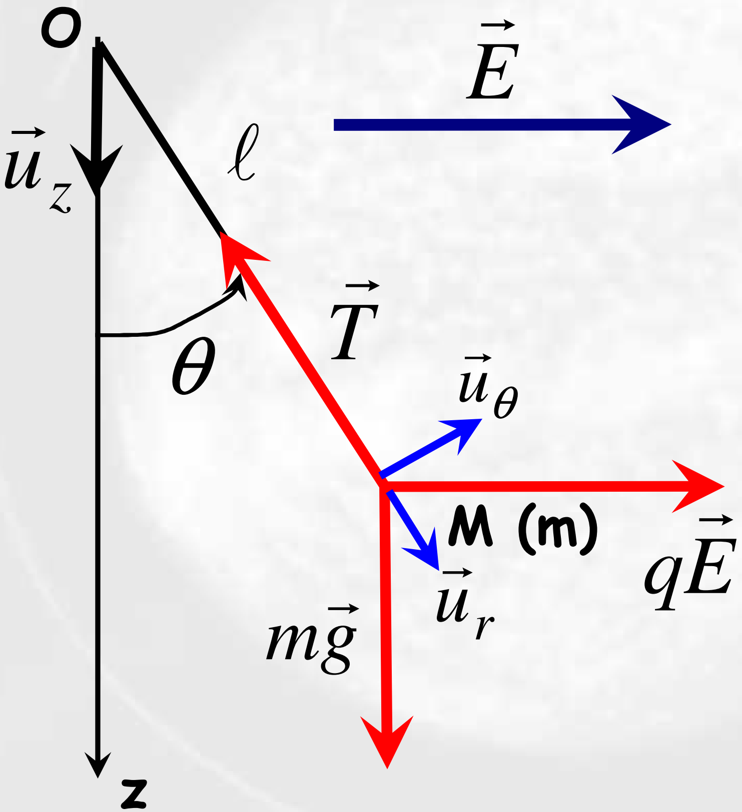
Equations différentielles

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

Fichier Maple :

(pendule simple)

➢ 10 - Applications du PFD : oscillations d'un pendule dans un champ électrique



PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$

En projection selon $\vec{u}_\theta$:

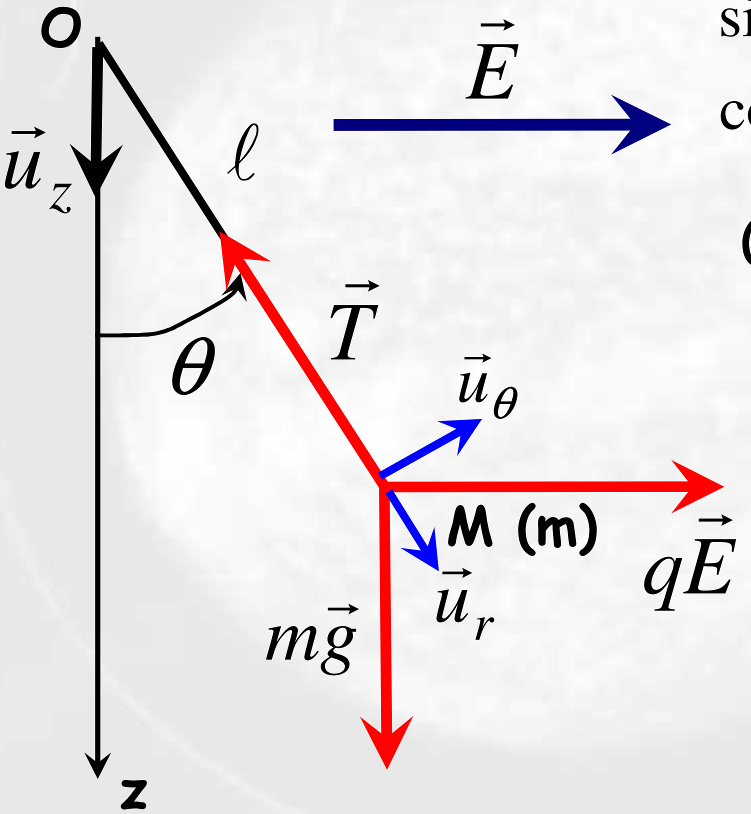
$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + qE\cos\theta$$

Soit : $$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta + \frac{qE}{m\ell}\cos\theta$$

L'angle θ_0 d'équilibre vérifie :

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \textbf{soit} \quad \tan\theta_0 = \frac{qE}{mg}$$

Cas des petites oscillations : on pose $\theta = \theta_0 + \varepsilon \ (\varepsilon << \theta_0)$. Alors :



$$\sin\theta = \sin(\theta_0 + \varepsilon) \approx \sin(\theta_0) + \varepsilon\cos(\theta_0)$$

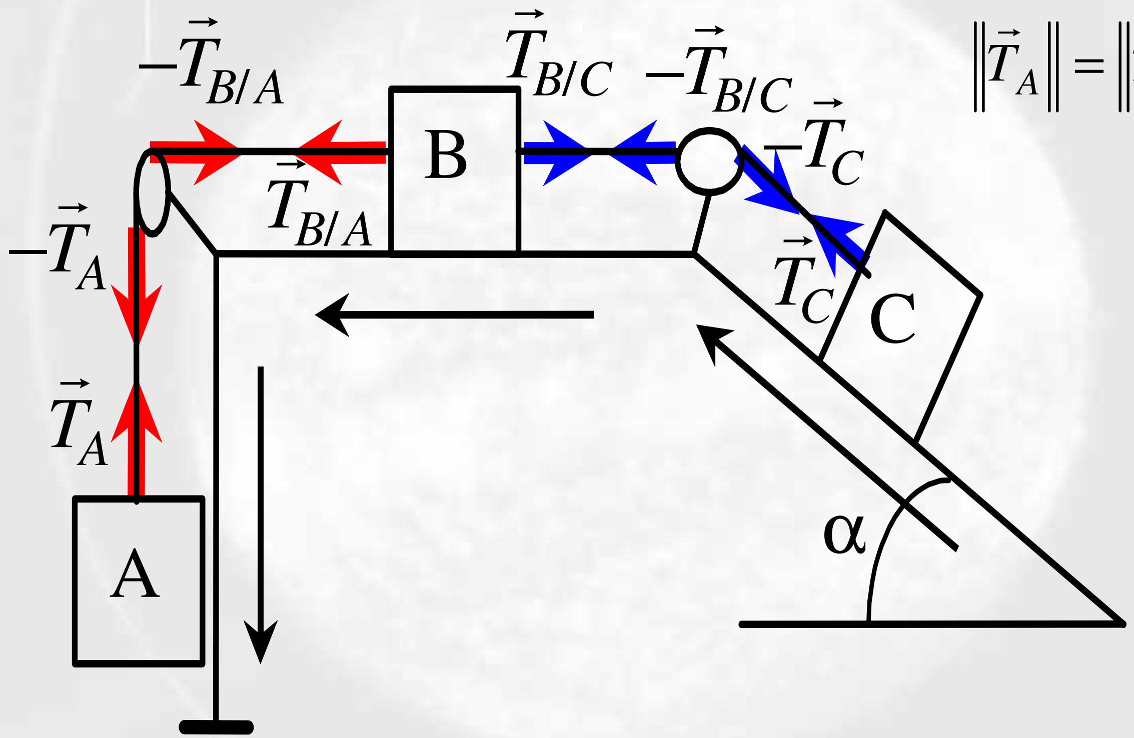
$$\cos\theta = \cos(\theta_0 + \varepsilon) \approx \cos(\theta_0) - \varepsilon\sin(\theta_0)$$

(On a utilisé $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$ et $\cos\varepsilon \approx 1$)

Soit, après simplifications :

$$\ddot{\varepsilon} + \left(\underbrace{\frac{g}{\ell}\cos\theta_0 + \frac{qE}{m\ell}\sin\theta_0}_{= \omega_0^2 \ (T_0 = 2\pi/\omega_0)} \right)\varepsilon = 0$$

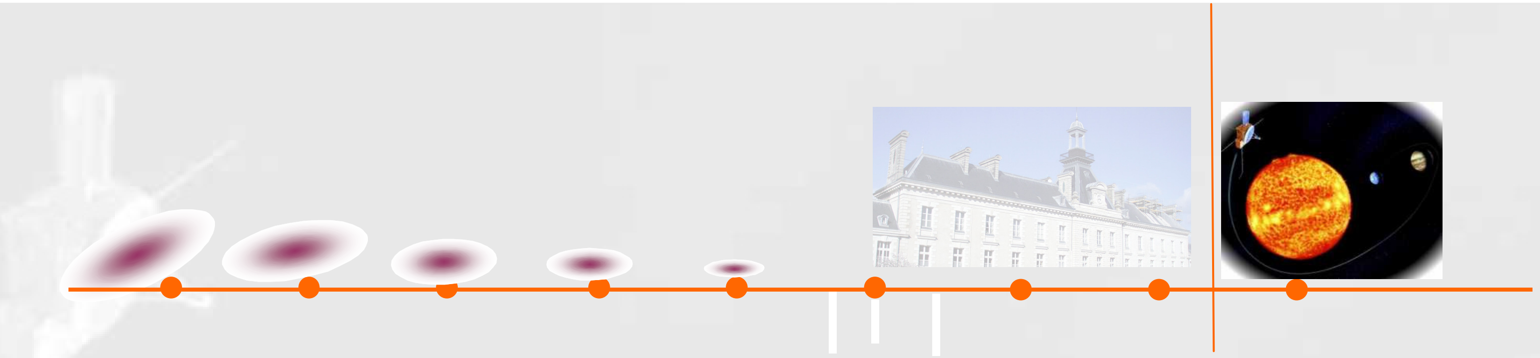
➢ 11 - Applications du PFD : tensions de fils



$$\left\|\vec{T}_A\right\| = \left\|\vec{T}_{B/A}\right\| = T_1 \;;\; \left\|\vec{T}_C\right\| = \left\|\vec{T}_{B/C}\right\| = T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{3}(2+\sin\alpha)mg$$

$$T_2 = \frac{1}{3}(1+2\sin\alpha)mg$$



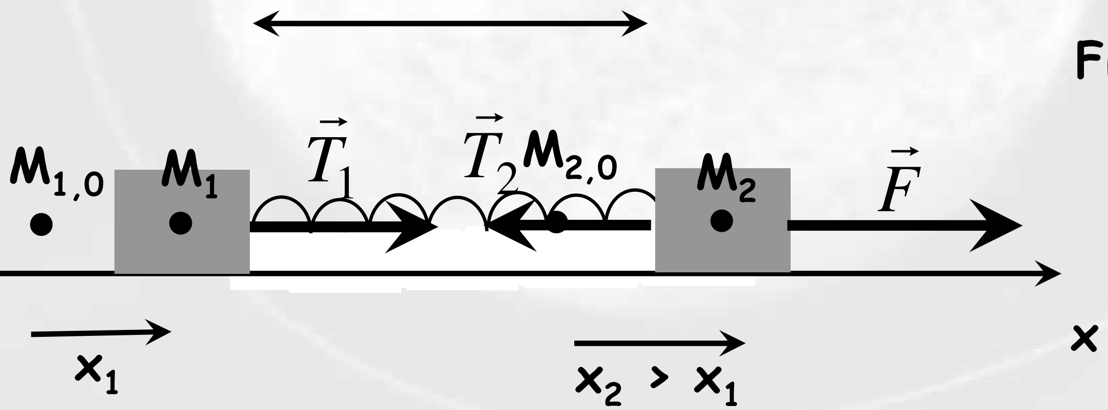
➢ 12 - Applications du PFD : oscillateurs soumis à une force constante

(résolution avec le logiciel Maple)

Equations différentielles

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + F \end{cases}$$

Longueur $l = l_0 + x_2 - x_1 > l_0$



Fichier Maple :

(oscillateurs couplés - F)