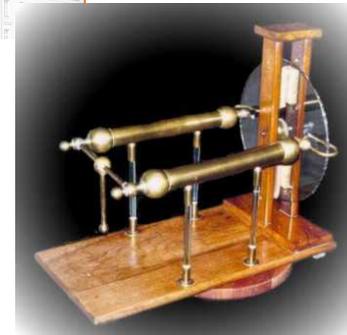
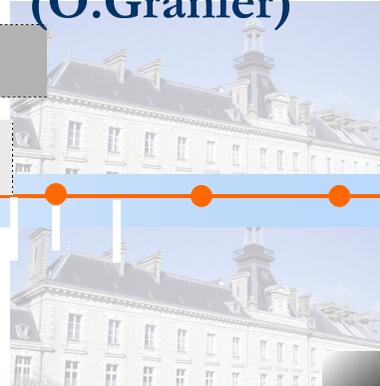


(O.Granier)



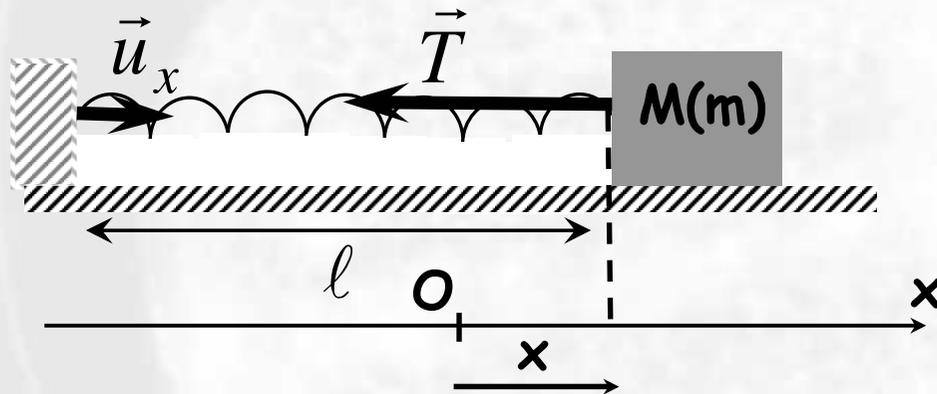
# Oscillateurs mécaniques (mécanique du point matériel)

## A – Etude en régime libre



➤ 1 - Un 1<sup>er</sup> exemple simple : système {masse - ressort horizontal} :

\* En l'absence de frottements : le PFD ou une étude énergétique conduisent à :



$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t = C \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Simulation Java





➤ **Un 1er exemple simple : système {masse - ressort horizontal} :**

\* **En présence de frottement fluide en  $-hm\vec{v}$  :**

**Le PFD s'écrit alors, en projection sur l'axe (Ox) :**

$$m\ddot{x} = -kx - hm\dot{x} \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + h\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

**On pose :**  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  ;  $h = 2\lambda = 2\sigma\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$

**$\sigma$  est le facteur d'amortissement de l'oscillateur et Q le facteur de qualité.**

**Alors :**  $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

**Différents régimes, selon les valeurs prises par  $\sigma$  (ou  $Q = 1/2\sigma$ ) : régime pseudo-périodique, régime apériodique ou régime apériodique.**

Simulation Cabri





➤ 2 - Méthode de résolution de l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On recherche des solutions de la forme  $\exp(rt)$ , avec  $r$  appartenant a priori au corps des complexes. On aboutit au polynôme caractéristique :

$$r^2 + 2\sigma\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Dont le discriminant est :

$$\Delta = 4\omega_0^2 (\sigma^2 - 1)$$

$\Delta < 0$  soit  $\sigma < 1$ : régime pseudo-périodique ( $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ )

$\Delta > 0$  soit  $\sigma > 1$ : régime apériodique ( $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ )

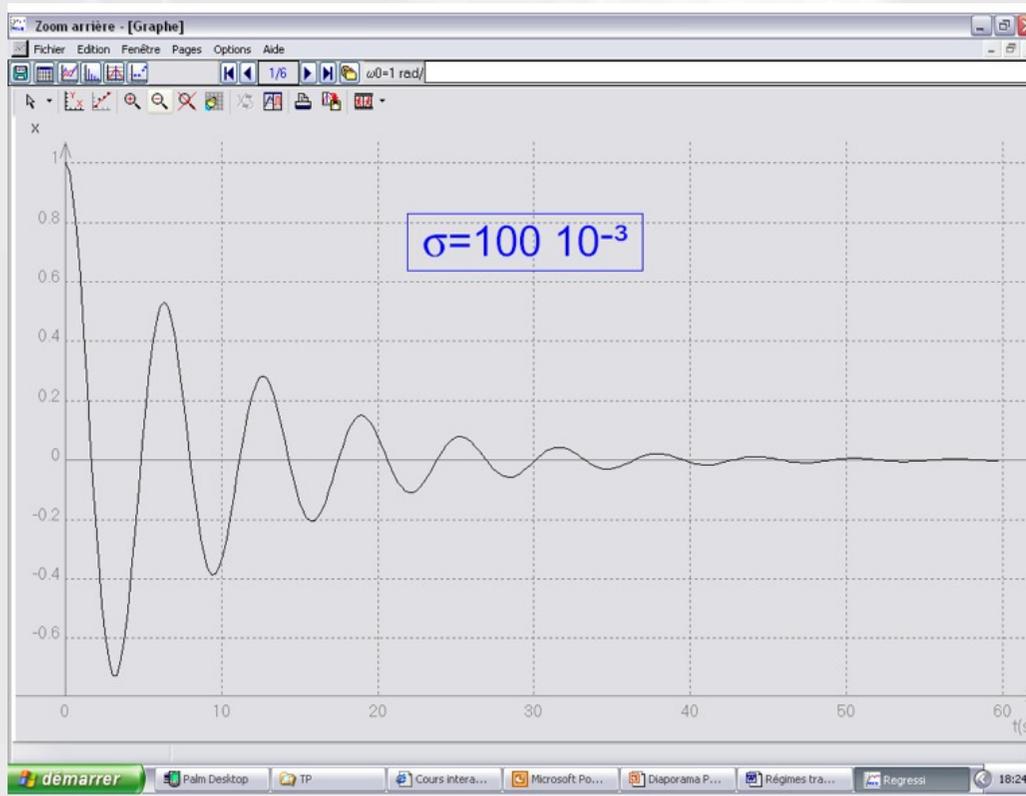
$\Delta = 0$  soit  $\sigma = 1$ : régime apériodique critique (racine unique,  $r = -\omega_0$ )





Régime pseudo-périodique : ( $\sigma < 1$ )

(CI :  $x(0)=x_0$  et vitesse initiale nulle)



$$x(t) = x_0 e^{-\sigma\omega_0 t} \left( \cos(\omega t) + \frac{\sigma\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

$$x(t) = C e^{-\sigma\omega_0 t} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$C = x_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma\omega_0}{\omega} \right)^2} ; \quad \tan \varphi = \frac{\sigma\omega_0}{\omega}$$

(avec  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2}$ )

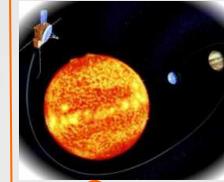
(Pseudo-pulsation)

Simulation Maple



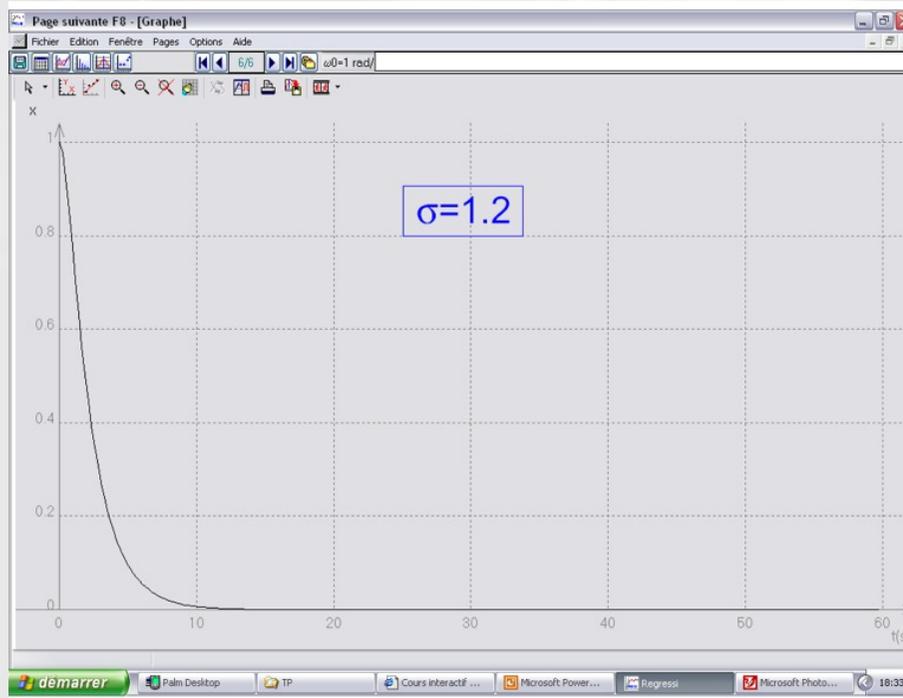
Simulation Regressi





Régime apériodique : ( $\sigma > 1$ )

(CI :  $x(0)=x_0$  et vitesse initiale nulle)



$$r_1 = -\sigma\omega_0 + \omega_0\sqrt{\sigma^2 - 1} ; r_2 = -\sigma\omega_0 - \omega_0\sqrt{\sigma^2 - 1}$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{\sigma^2 - 1}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\sigma\omega_0 t} \left( ch(\omega t) + \frac{\sigma\omega_0}{\omega} sh(\omega t) \right)$$

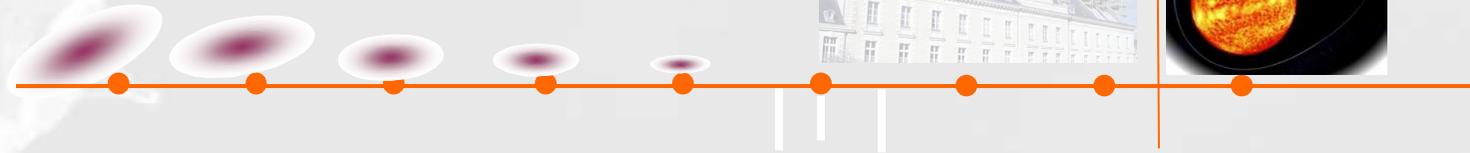
$$x(t) = \frac{x_0}{2} e^{-\sigma\omega_0 t} \left( \left( 1 - \frac{\sigma\omega_0}{\omega} \right) e^{-\omega t} + \left( 1 + \frac{\sigma\omega_0}{\omega} \right) e^{\omega t} \right)$$

Simulation Maple

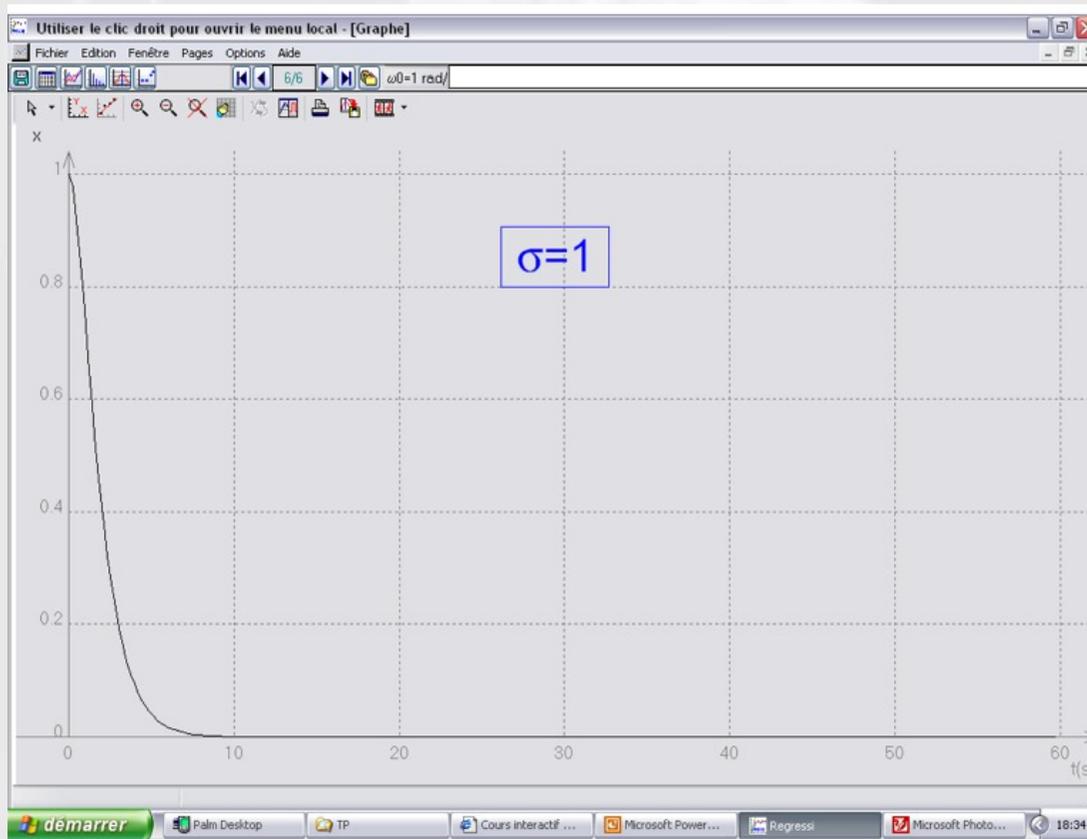


Simulation Regressi





**Régime apériodique critique :** ( $\sigma = 1$ ) (CI :  $x(0) = x_0$  et vitesse initiale nulle)



$$x(t) = x_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}$$

Simulation Maple

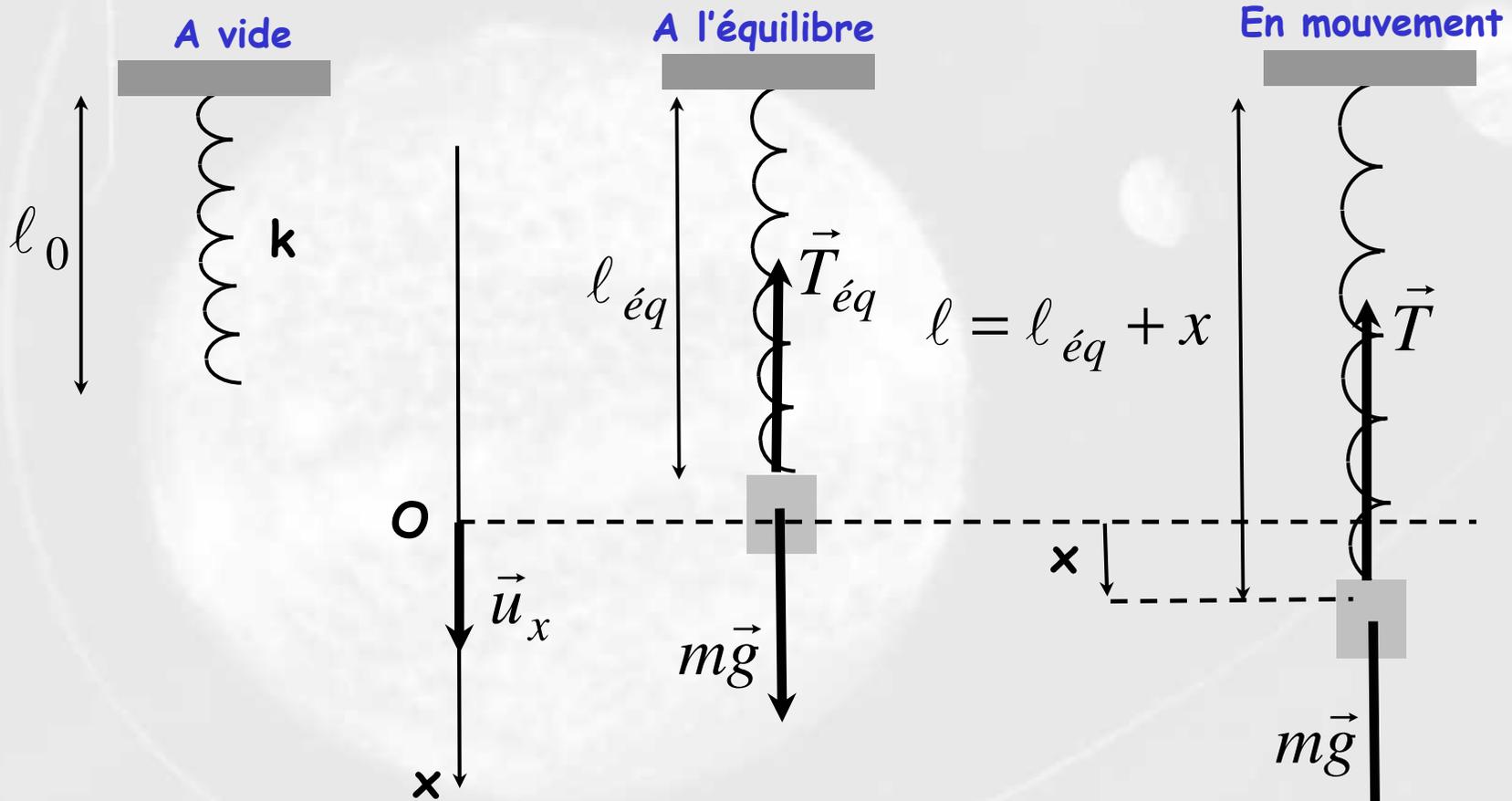


Simulation Regressi





➤ 3 - Autres exemples d'oscillateurs : Le ressort vertical



$$\vec{T}_{\text{éq}} = -k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)\vec{u}_x \quad ; \quad \vec{T} = -k(\ell_{\text{éq}} + x - \ell_0)\vec{u}_x$$



### En l'absence de frottements :

A l'équilibre :  $m\vec{g} + \vec{T}_{\acute{e}q} = \vec{0}$  ;  $-k(\ell_{\acute{e}q} - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x = \vec{0}$  ;  $\ell_{\acute{e}q} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

En mouvement :  $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$  ;  $-k(\ell_{\acute{e}q} + x - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$

En tenant compte de la relation obtenue à l'équilibre :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{Avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

### En présence de frottements fluides :

Par un raisonnement similaire, on obtient :

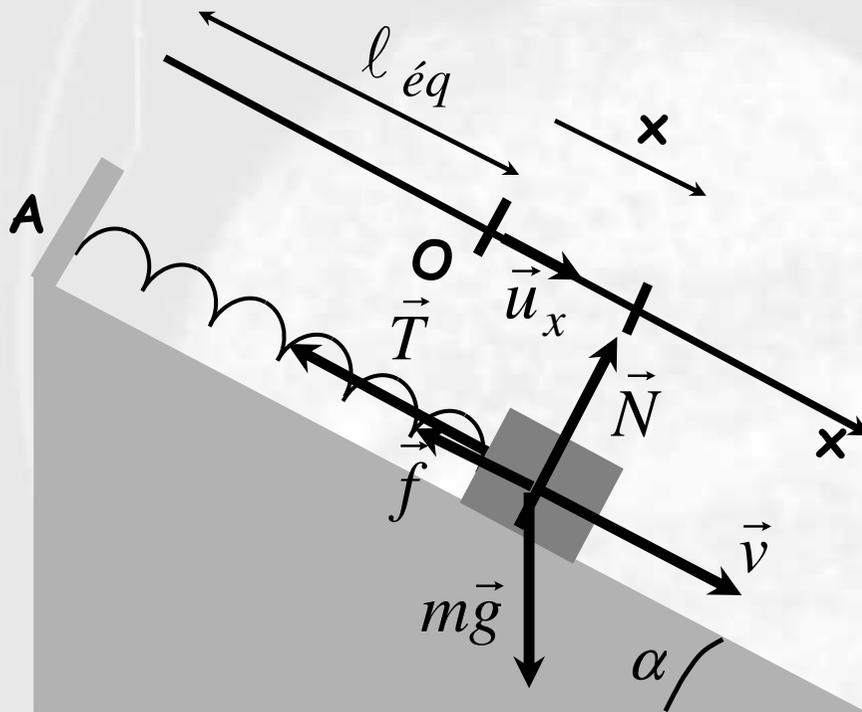
$$m\vec{g} + \vec{T} - hm\vec{v} = m\vec{a} \quad ; \quad -k(\ell_{\acute{e}q} + x - \ell_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x - hm\dot{x}\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$$

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{Avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } 2\sigma\omega_0 = h)$$





Ressort sur un plan incliné :



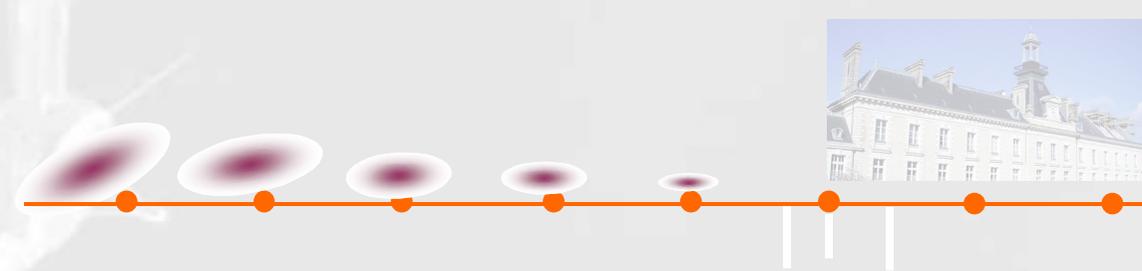
$$-k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0)\vec{u}_x + mg \sin \alpha \vec{u}_x = \vec{0}$$

$$d'où : \ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k}$$

En présence d'une force de frottement fluide de la forme  $-hm\vec{v}$ , l'équation différentielle vérifiée par la variable  $x$  peut encore s'écrire sous la forme canonique :

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$





Oscillateurs couplés :

Enoncé du problème : (fichier au format pdf)



Simulation Regressi 

Simulation Java  
(oscillateurs couplés) 

Simulation Maple 





Le pendule simple :

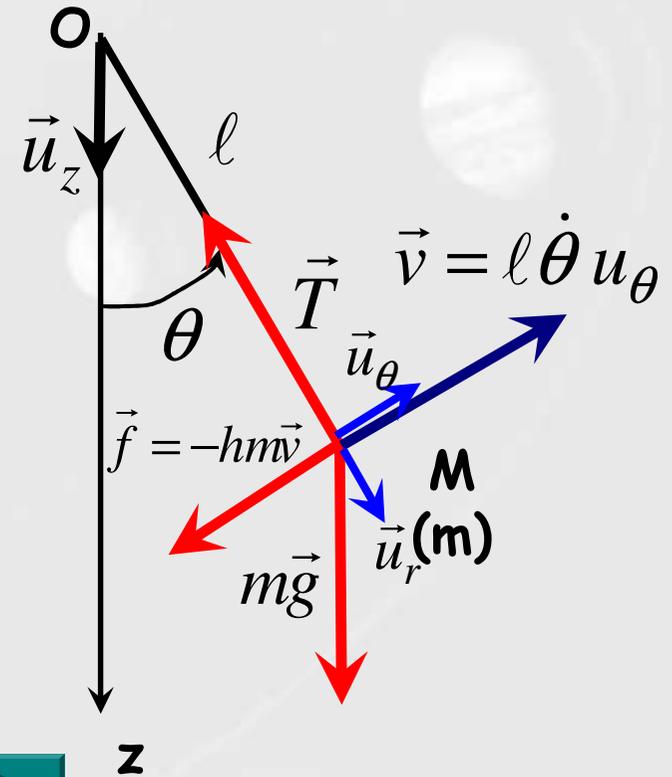
En présence d'une force de frottement fluide  $-hm\vec{v}$  :

PFD sur  $\vec{u}_\theta$  :  $ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - hm(l\dot{\theta})$

Soit :  $\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \ddot{\theta} + 2\sigma\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$

Si l'angle  $\theta$  reste « petit », alors on retrouve l'équation habituelle :

$$\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = \ddot{\theta} + 2\sigma\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$



Simulation Regressi



Simulation Java  
(pendule amorti)



Simulation Maple



Simulation Java  
(pendule chaotique)





#### ➤ 4 - Notion d'espace des phases :

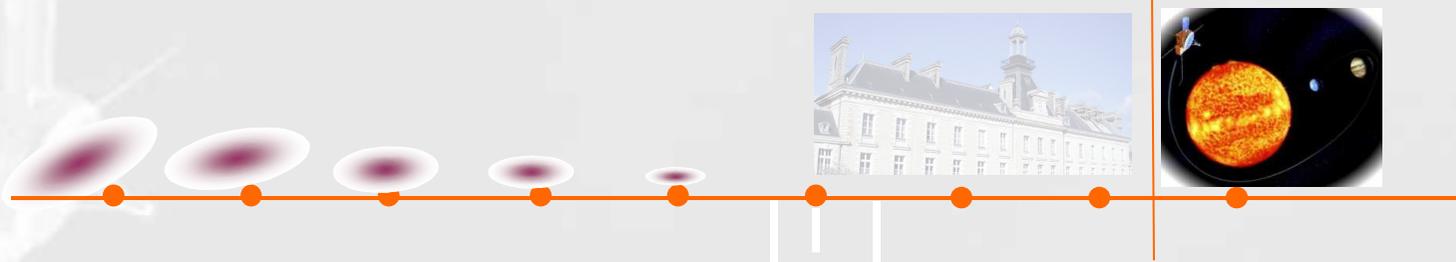
Cet espace est le produit de l'espace ordinaire par l'espace des vitesses. En d'autres termes, un point matériel  $M$  est repéré dans cet espace par les coordonnées  $(x, y, z)$  de son vecteur position ainsi que par celles de son vecteur vitesse, notées  $(v_x, v_y, v_z)$ .

On se limite aux cas où un point matériel  $M$  est animé, dans l'espace ordinaire, d'un mouvement à une dimension, le long de l'axe  $(Ox)$ .

Dans l'espace des phases, le point représentatif de l'état de  $M$  se déplace alors dans une région à deux dimensions.

Ce point, de coordonnées  $(x, v)$ , décrit lors du mouvement de  $M$  une courbe appelée "courbe des phases". Cette "trajectoire" de  $M$  dans l'espace des phases a pour origine le point  $M_0(x_0, v_0)$  correspondant à l'état initial de  $M$ .





La position du point matériel est complètement déterminée par la donnée des conditions initiales et par la connaissance des équations du mouvement.

Comme l'évolution de la particule est univoque, **deux trajectoires dans l'espace des phases ne peuvent pas se croiser**. Si cela était possible, en prenant ce point d'intersection comme conditions initiales, on pourrait obtenir deux solutions distinctes des équations du mouvement, ce qui est interdit pour des raisons mathématiques.

### Exemples de courbes des phases :

\*\*\* initialement en mouvement,  $M$  n'est soumis à aucune force.

\*\*\* initialement immobile,  $M$  est soumis à une force constante  $F$ .

\*\*\* initialement en mouvement,  $M$  est soumis à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse :  $F = -hmv$  ( $a$  : constante positive).





\*\*\* initialement immobile hors d'équilibre,  $M$  est soumis à une force de rappel proportionnelle à son élongation :  $F = -kx$  ( $k$  : constante positive).

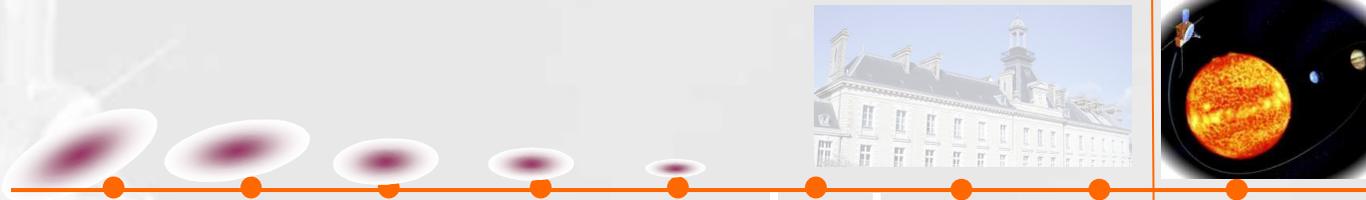
La courbe des phases peut se retrouver en écrivant l'intégrale <sup>1ère</sup> du mouvement.

Quelle est l'équation de la courbe des phases dans le plan  $(x, v/\omega_0)$  ?

\*\*\* Déterminer, par la même loi de conservation, la courbe de phase pour un pendule simple (masse  $m$  et longueur  $L$ ).

Quelle est l'équation de la courbe des phases dans le plan  $(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$  ?





## ➤ 5 - Portrait de phase d'un oscillateur :

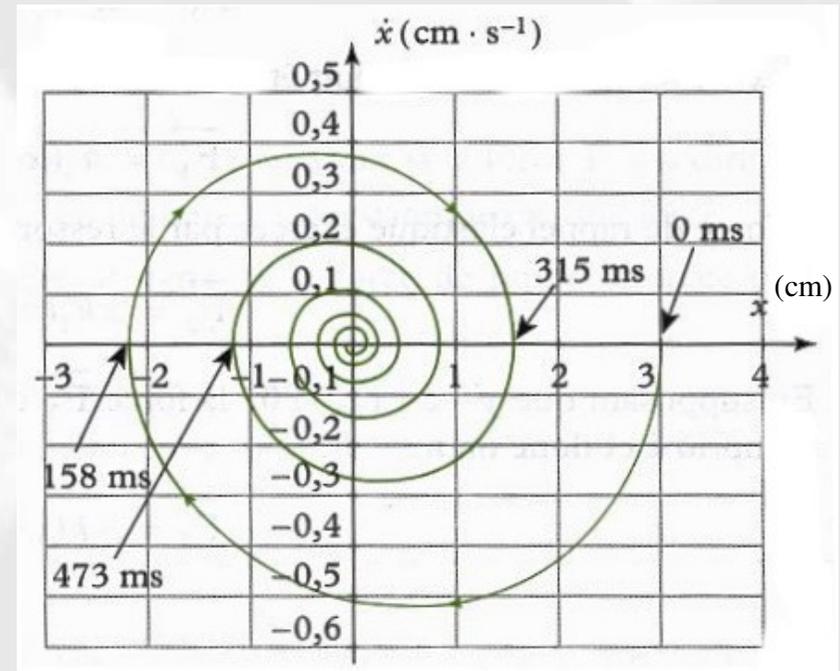
**Lecture de portrait de phase (ex 5) :** on considère le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'une masse  $m = 500 \text{ g}$  soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur  $k$ ) et à une force de frottement fluide ( $-\lambda \vec{v}$ ,  $\vec{v}$  étant la vitesse de la masse  $m$  et on note  $x$  l'écart à la position d'équilibre). L'étude est réalisée dans le référentiel galiléen du laboratoire.

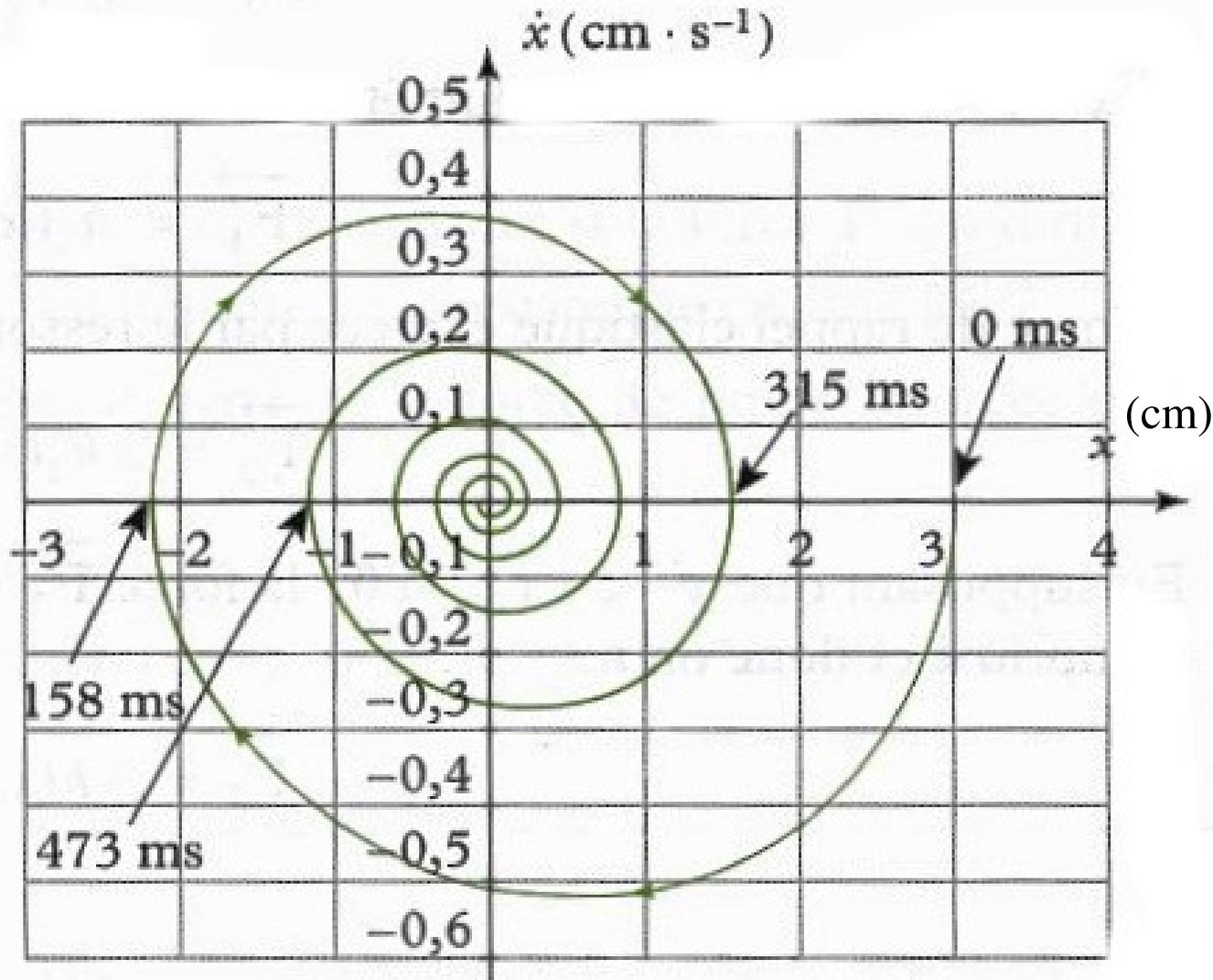
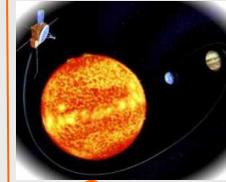
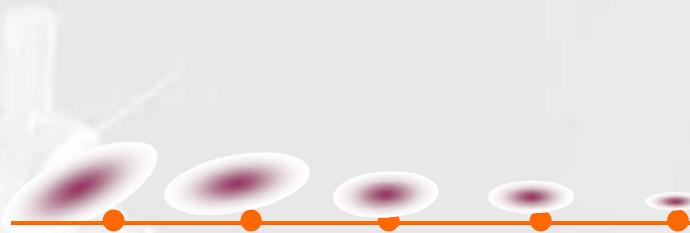
a) Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.

b) Déterminer, par lecture graphique :

- \* La valeur initiale de la position  $x_0$ .
- \* La valeur finale de la position  $x_f$ .
- \* La pseudo période  $T_a$ .
- \* Le décrément logarithmique  $\delta$ .

c) En déduire la pulsation propre  $\omega_0$ , le facteur de qualité  $Q$  de l'oscillateur, la raideur  $k$  du ressort et le coefficient de frottement fluide  $\lambda$ .







a) **Régime pseudo-périodique** : présence de frottements, la courbe de phase n'est pas fermée. Elle se termine en un point d'équilibre stable (ici le point O), appelé **attracteur**.

b)  $x_0 = 3 \text{ cm}$  ;  $x_f = 0 \text{ cm}$  (attracteur) ;  $T_a = 315 \text{ ms}$  ;

$$\delta = \ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = \ln\left(\frac{3 \cdot 10^{-2}}{1,6 \cdot 10^{-2}}\right) = 0,628 \quad ; \quad x(t + T_a) = e^{-\delta} x(t) = e^{-\sigma \omega_0 T_a} x(t)$$

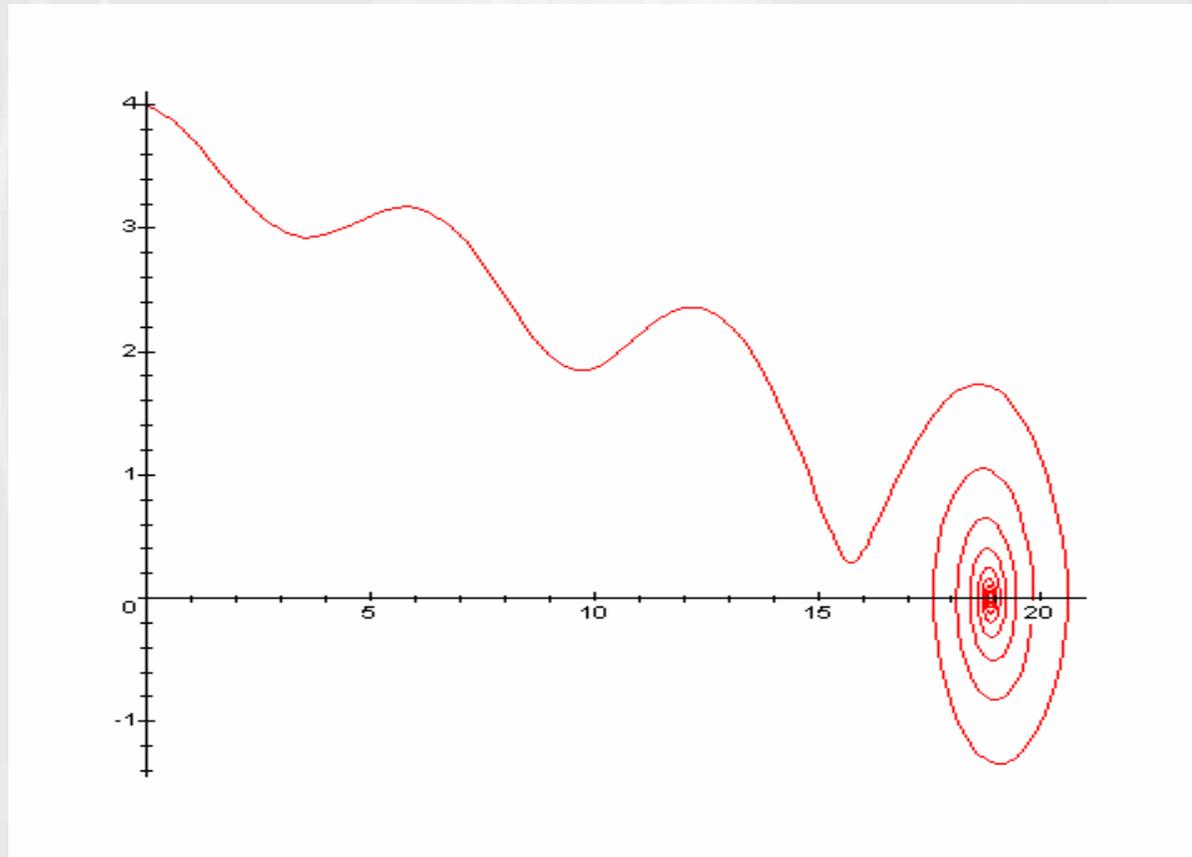
c)  $Q = 5$  ;  $\omega_0 = 20,05 \text{ rad.s}^{-1}$  ;  $\sigma = \frac{1}{2Q} = 0,1$

$$k = m\omega_0^2 = 201 \text{ N.m}^{-1} \quad ; \quad \lambda = m \frac{\omega_0}{Q} = 2 \text{ Nm}^{-1} \cdot \text{s}$$





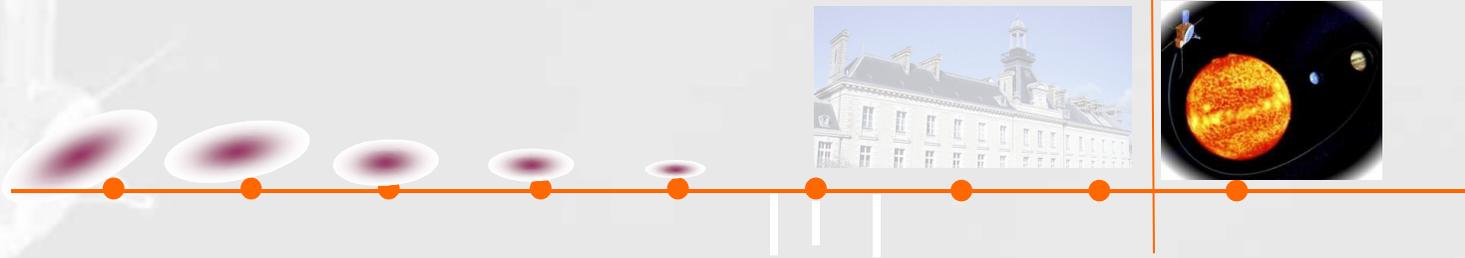
➤ **Portrait de phase d'un pendule simple :**



Fichier Maple  
➡  
(Pendule simple)

Simulation Java  
(pendule chaotique) 





## Trampoline (ex n°2) :

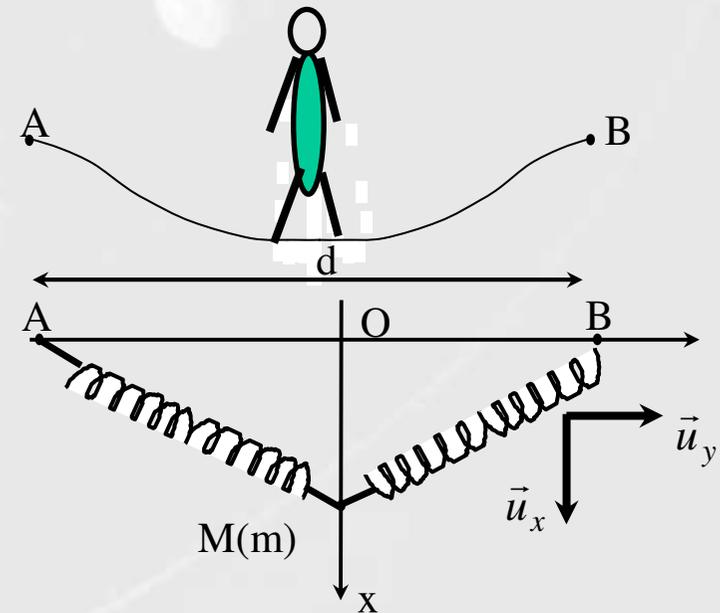
On considère la modélisation d'un trampoline à l'aide de deux ressorts de longueur à vide  $l_0$  et de raideur  $k$ . Un homme, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$  monte sur le trampoline qui s'enfonce ; son mouvement est vertical le long de l'axe  $(Ox)$ .

Données :  $k = 3\,300 \text{ N.m}^{-1}$  ;  $l_0 = 1 \text{ m}$  ;  $m = 80 \text{ kg}$  ;  $d = 5 \text{ m}$

Dans les deux premières questions, on suppose que l'homme reste en contact avec le trampoline : il est solidaire du trampoline.

a) Déterminer la distance d'enfoncement  $x_{\text{éq}}$  à l'équilibre lorsque l'homme monte sur le trampoline. En déduire l'allongement des ressorts.

b) L'oscillateur obtenu est-t-il harmonique ?





a) Bilan des forces à l'équilibre : **Le poids** :  $mg \vec{u}_x$

La tension du ressort de droite :  $\vec{T}_d = k(MB - \ell_0) \frac{\vec{MB}}{MB}$

$$\vec{MB} = -x\vec{u}_x + (d/2)\vec{u}_y ; MB = \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad , \text{ d'où :}$$

$$\vec{T}_d = k \left( \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \ell_0 \right) \left[ \frac{-x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{u}_x + \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{u}_y \right]$$

$$\text{De même : } \vec{T}_g = k \left( \sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \ell_0 \right) \left[ \frac{-x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{u}_x - \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \vec{u}_y \right]$$

(tension du ressort de gauche)





A l'équilibre :  $mg \vec{u}_x + \vec{T}_d + \vec{T}_g = \vec{0}$

En projection sur l'axe (Ox) :

$$mg - 2kx_{\text{éq}} \left( 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x_{\text{éq}}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \right) = 0$$

Une résolution numérique conduit à  $x_{\text{éq}} = 19,8 \text{ cm}$ . L'allongement des ressorts est alors :

$$\sqrt{x_{\text{éq}}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \ell_0 = 1,5 \text{ m}$$

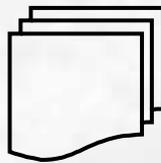


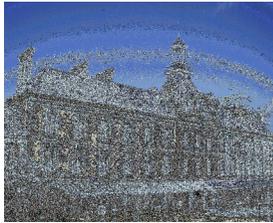


En mouvement, le PFD appliqué à la masse  $m$  donne, en projection sur  $(Ox)$  :

$$m\ddot{x} = -2kx \left( 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \right) + mg$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre non linéaire : l'oscillateur n'est pas harmonique.





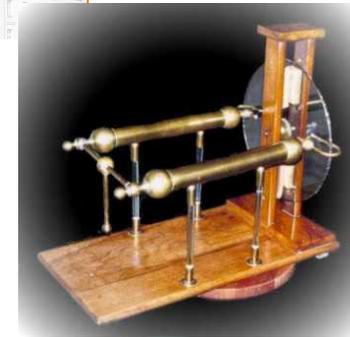
PCSI 1 (O.Granier)

Lycée  
Clemenceau

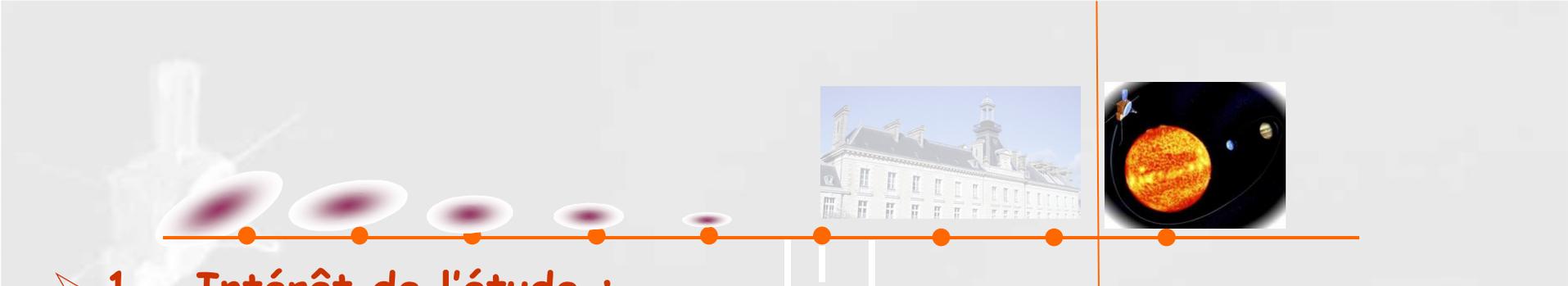


*Année scolaire 2003 - 2004*

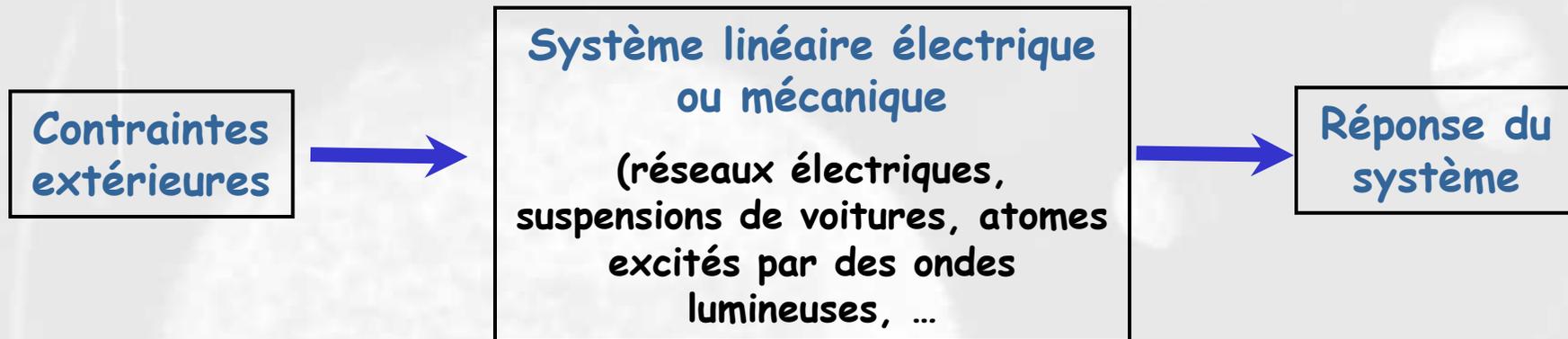
# Oscillateurs mécaniques (mécanique du point matériel)



## B – Etude en régime sinusoïdal forcé



➤ 1 - Intérêt de l'étude :



L'analyse harmonique (ou fréquentielle) d'un système est son étude au moyen de sa réponse harmonique  $s(t)$ , c'est-à-dire de sa réponse en régime permanent sinusoïdal lorsqu'il est soumis à une entrée sinusoïdale  $e(t)$  dont on fait varier la pulsation  $\omega$ .





Une 1<sup>ère</sup> étude a été faite en cours de SI et les notions suivantes ont été abordées :

Fonction de transfert complexe - Gain - phase - Diagramme de Bode - dB - Filtre du 1<sup>er</sup> ordre - Filtre du 2<sup>ème</sup> ordre - Pulsation de coupure - Asymptotes - Coefficient d'amortissement  $\xi$  ( $= \sigma$  !) - Pulsation propre - Résonance - Bande passante.

Le pont de Tacoma



Oscillations forcées



(Ressort vertical)

Simulation Regressi



(mise en évidence du régime transitoire)





## ➤ 2 - Description et équation de l'oscillateur étudié :

Dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m\ddot{x} = mg - hm\dot{x} - k(\ell_{\text{éq}} + x - x_A - \ell_0)$$

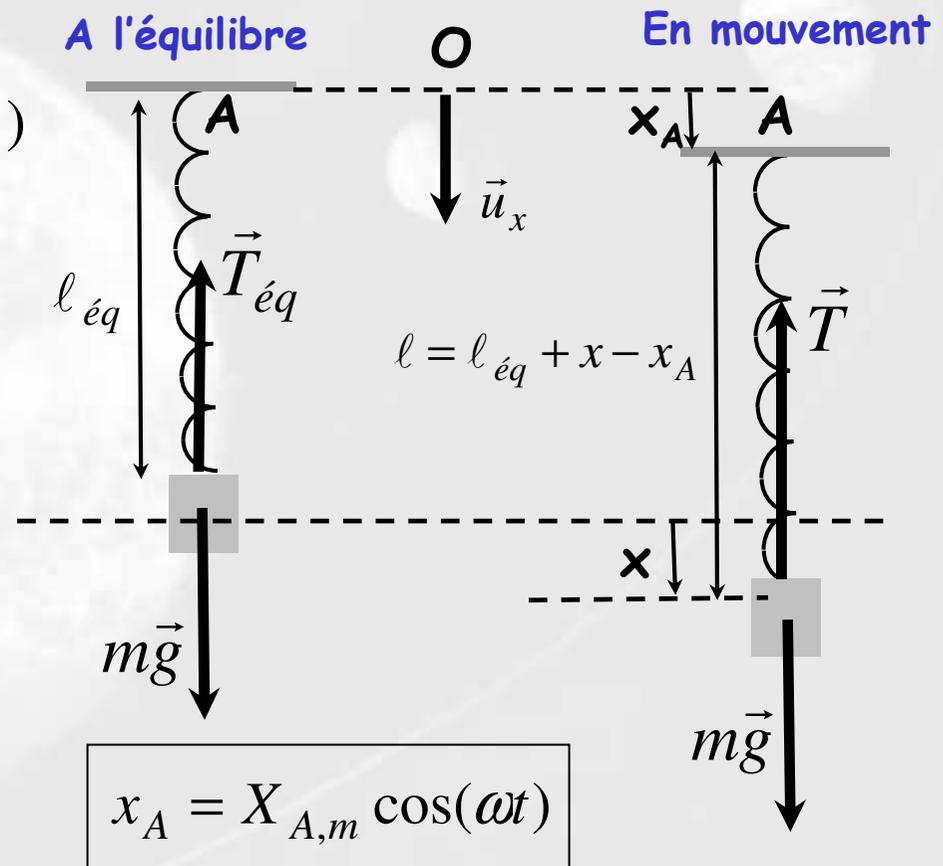
En utilisant la condition d'équilibre :

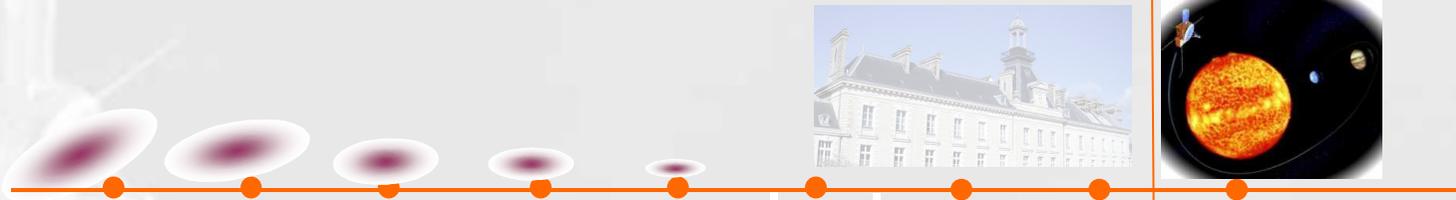
$$\ddot{x} + h\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_A$$

Soit, avec :

$$h = 2\sigma\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2x_A$$





Cette équation est formellement identique à celle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit série (RLC) alimenté par un GBF (voir cours d'électricité) :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t), \text{ soit, avec } q = Cu_C :$$

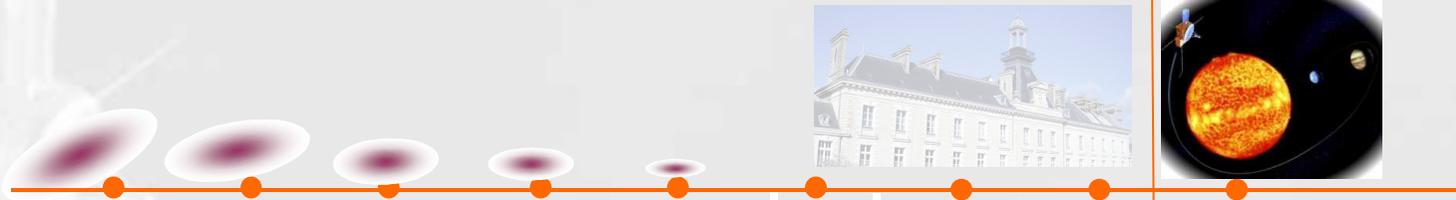
$$\ddot{u}_C + \frac{R}{L}u_C + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}e(t)$$

**Méthode de résolution choisie : la même qu'en électricité !**

$$\underline{x}_A = X_{A,m} e^{i\omega t} \quad ; \quad \underline{x} = X_m e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (x = X_m \cos(\omega t + \varphi))$$

$$\underline{\dot{x}} = i\omega \underline{x} \quad \text{et} \quad \underline{\ddot{x}} = i\omega \underline{\dot{x}} = (i\omega)^2 \underline{x} = -\omega^2 \underline{x}$$





➤ 3 - Détermination de la réponse en amplitude  $x(t)$  :

$$\ddot{x} + 2\sigma\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A$$

$$-\omega^2 \underline{x} + 2\sigma\omega_0 (i\omega \underline{x}) + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 \underline{x}_A$$

$$\left[ (\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega \right] \underline{x} = \omega_0^2 \underline{x}_A$$

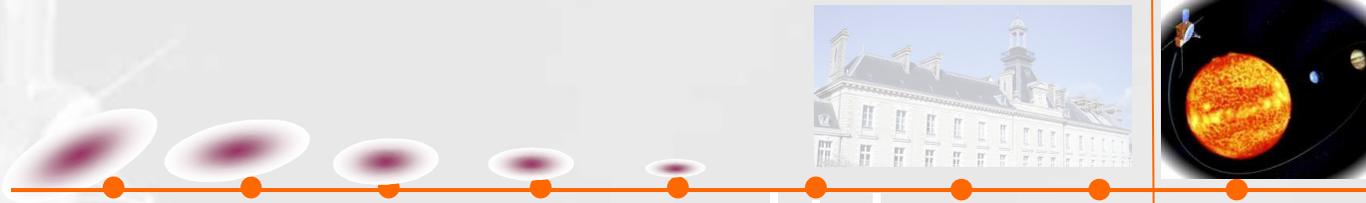
Soit :

$$\underline{x} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega} \underline{x}_A$$

Ou encore :

$$X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega} X_{A,m}$$





## Etude de l'amplitude maximale $X_m(\omega)$ :

En prenant le module de l'expression précédente :

$$X_m = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2 \omega_0^2 \omega^2}} X_{A,m}$$

Etude mathématique :  $\lim_{\omega \rightarrow 0} X_m = X_{A,m}$  ;  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} X_m = 0$

On note :  $D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2 \omega_0^2 \omega^2$

Alors  $X_m(\omega)$  sera extrême si  $D(\omega)$  l'est aussi. On calcule ainsi une dérivée plus simple :

$$\frac{dD(\omega)}{d\omega} = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\sigma^2 \omega_0^2 \omega = 4\omega \left( -(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\sigma^2 \omega_0^2 \right) = 0$$



On obtient ainsi :  $\omega = 0$  ou  $-(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\sigma^2 \omega_0^2 = 0$

Soit, en oubliant la solution non harmonique (correspondant à  $\omega = 0$ ) :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 (1 - 2\sigma^2)$$

Cette pulsation de « résonance d'amplitude » (c'est à dire correspondant à une **réponse harmonique en amplitude maximale**) n'existe que si :

$$1 - 2\sigma^2 > 0 \quad \text{soit}$$

$$\sigma < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Elle vaut alors :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\sigma^2}$$

Et l'amplitude maximale à la « **résonance d'amplitude** » est :

$$X_m(\omega_r) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}} X_{A,m}$$





Les formules précédentes deviennent, en utilisant le **facteur de qualité Q** à la place du coefficient d'amortissement  $\sigma$  ( $Q = 1/2\sigma$ , et noter que  $\sigma$  s'identifie au coefficient  $\xi$  utilisé en SI) :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{avec} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$X_m(\omega_r) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} X_{A,m}$$

**Remarque :** pour de **faibles amortissements** ( $\sigma$  «faible» et Q «grand»), alors :

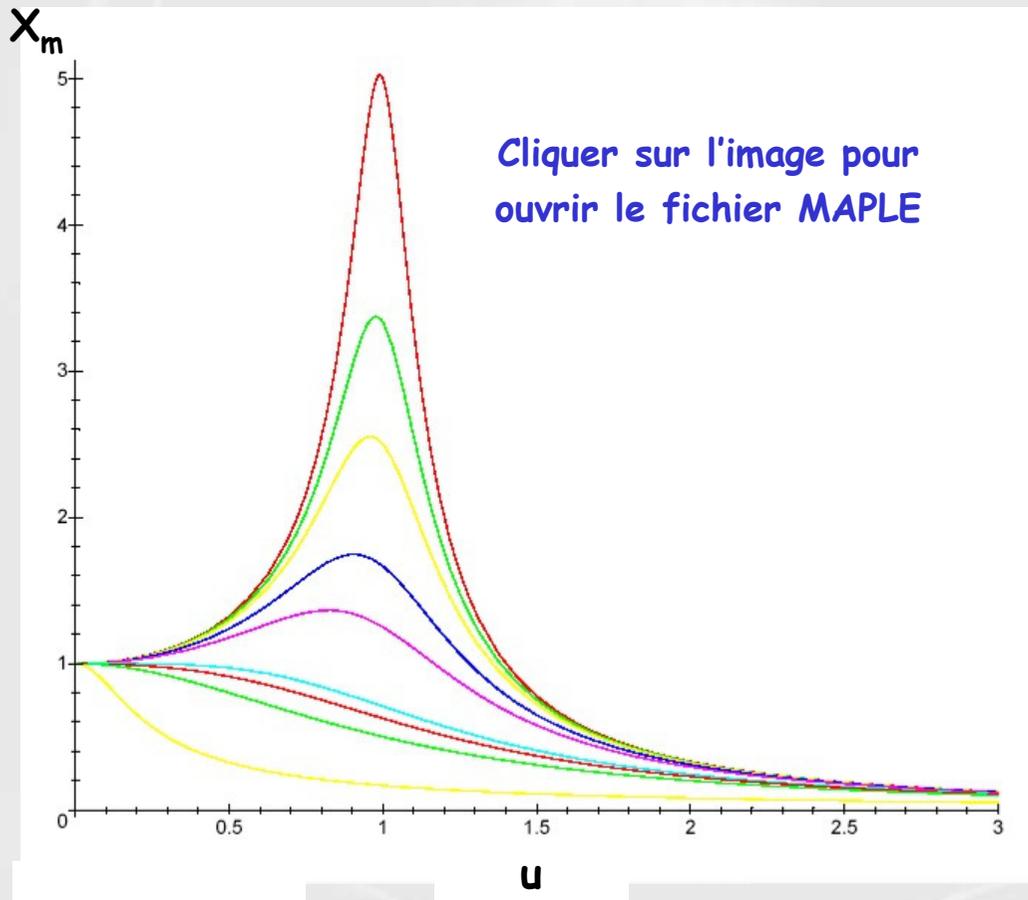
$$\omega_r \approx \omega_0 \quad \text{et} \quad X_m(\omega_r) \approx QX_{A,m}$$

Ainsi, si  $Q=10$ , l'amplitude lors de la résonance vaut 10 fois celle de l'excitation : la résonance est dite «aiguë» et peut causer la destruction du système oscillant.





Tracés des courbes  $X_m(\omega)$  pour différentes valeurs de  $\sigma$  (ou  $Q$ ) :



- \* On a choisi :  $X_{A,m} = 1$
- \*  $u = \omega/\omega_0$  désigne la pulsation réduite
- \* On vérifie bien que, pour  $\sigma$  faible, la résonance est obtenue pour  $u \sim 1$  (soit  $\omega \sim \omega_0$ ).
- \* L'oscillateur constitue un **filtre passe-bas**
- \* Bande passante du filtre

Avec Regressi





## Etude du déphasage $\varphi(\omega)$ :

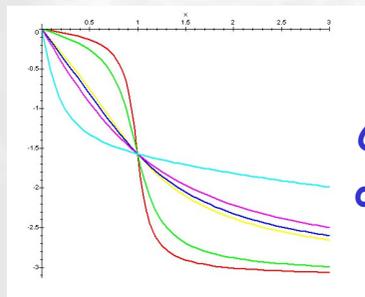
La réponse complexe est : 
$$X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega} X_{A,m}$$

Le déphasage  $\varphi$  est l'opposé de l'argument  $\theta$  du complexe  $(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega$ .

Par conséquent :

$$\left. \begin{array}{l} \tan \varphi = -\tan \theta = -\frac{2\sigma\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \sin \varphi = -\sin \theta < 0 \quad (\text{signe de } -2\sigma\omega_0\omega) \end{array} \right\} \rightarrow \text{donc } \varphi \in [-\pi, 0]$$

## Tracé des courbes $\varphi(\omega)$ :



Cliquer sur l'image pour  
ouvrir le fichier MAPLE

Avec Regressi





## Fonction de transfert complexe en amplitude :

La fonction de transfert complexe en amplitude est définie par :

$$\underline{H}_x(i\omega) = \frac{\underline{x}(t)}{\underline{x}_A(t)}$$

Soit :

$$\underline{H}_x(i\omega) = \frac{X_m}{X_{A,m}} e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega}$$

$$G_x(\omega) = \frac{X_m}{X_{A,m}} \text{ est le gain (réel) en amplitude.}$$

**Diagramme de Bode** : c'est l'ensemble des deux courbes  $G_{x,dB} = 20\log(G_x)$  et  $\varphi$  en fonction de la pulsation  $\omega$ , tracées en échelle semi-logarithmique (voir cours de SI et l'étude des filtres en électricité).



➤ 4 - Détermination de la réponse en vitesse  $v(t)$  :

En notation réelle :  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \psi)$

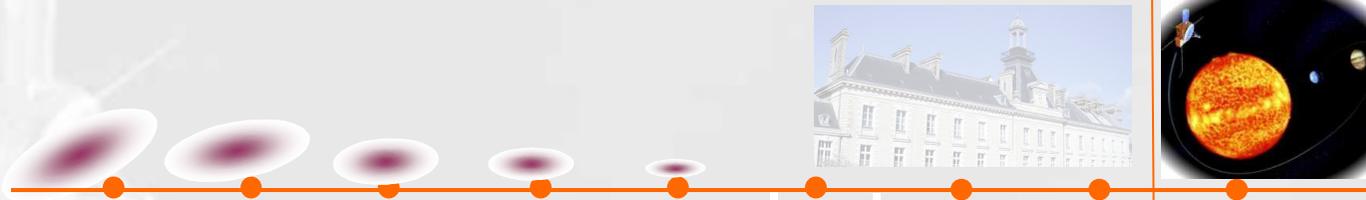
En notation complexe :  $\underline{v}(t) = V_m e^{i(\omega t + \psi)}$

La vitesse complexe  $\underline{v}$  s'obtient à partir de l'amplitude complexe  $\underline{x}$  en remarquant que  $\underline{v} = \dot{\underline{x}} = i\omega x$ . Par conséquent :

$$\underline{v} = i\omega \left( \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega_0\omega} \underline{x}_A \right) = \frac{\omega_0}{i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + 2\sigma} \underline{x}_A$$

Ou encore :

$$V_m e^{i\psi} = \frac{\omega_0}{2\sigma + i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} X_{A,m}$$



Etude de l'amplitude maximale  $V_m(\omega)$  de la vitesse :

En prenant le module de l'expression précédente :

$$V_m(\omega) = \frac{\omega_0}{\sqrt{4\sigma^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} X_{A,m}$$

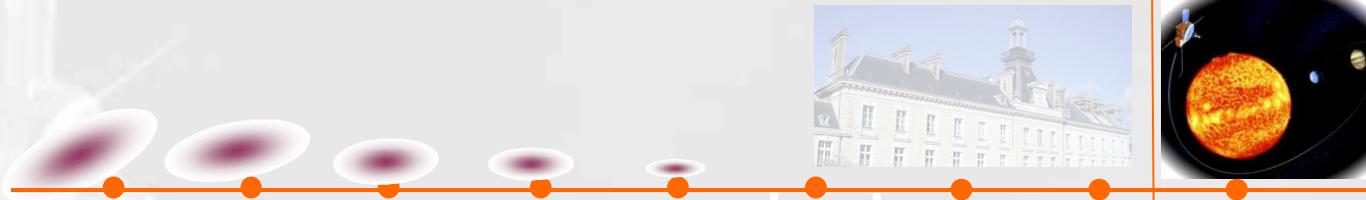
Etude mathématique :  $\lim_{\omega \rightarrow 0} V_m = 0$  ;  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} V_m = 0$

$V_m(\omega)$  sera maximale (on parle alors de **résonance de vitesse**, si le dénominateur est minimal, c'est à dire pour une pulsation telle que :

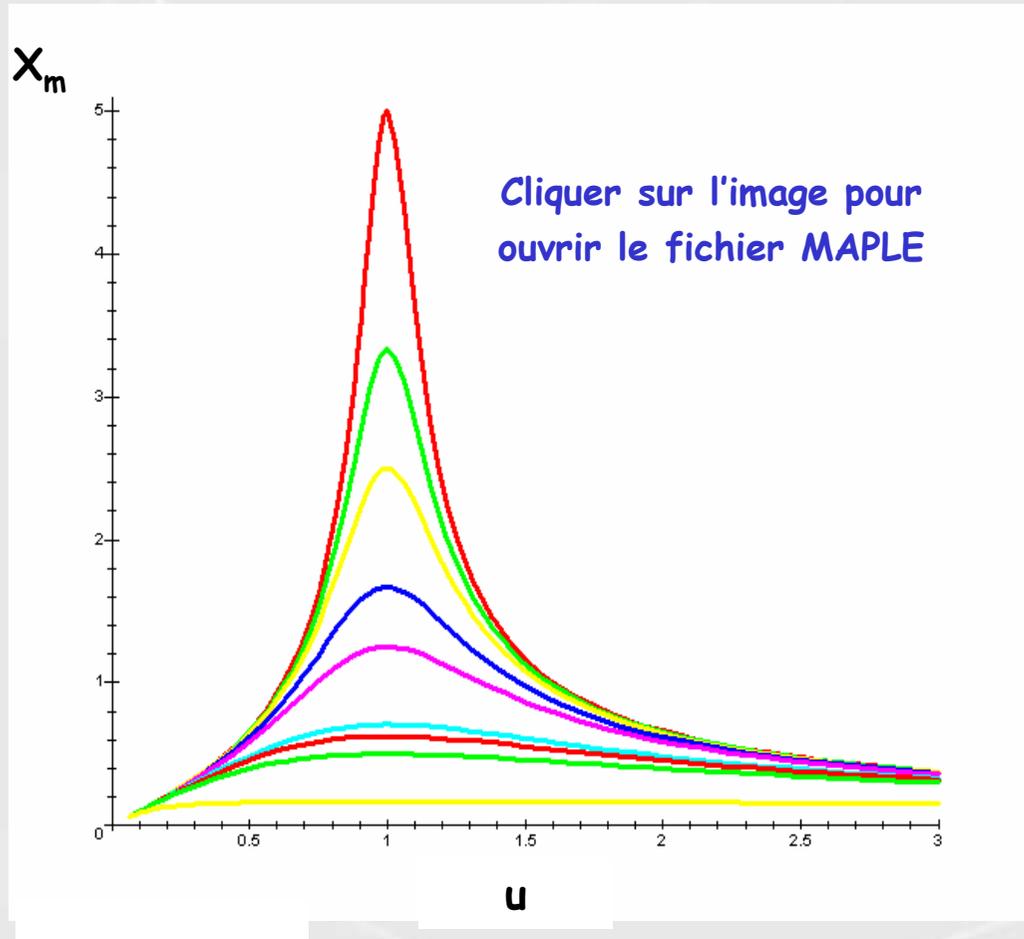
$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 0 \quad \text{soit} \quad \omega = \omega_0$$

L'amplitude de la vitesse valant alors :  $V_m(\omega_0) = \frac{\omega_0}{2\sigma} X_{A,m} = Q\omega_0 X_{A,m}$





Tracés des courbes  $V_m(\omega)$  pour différentes valeurs de  $\sigma$  (ou  $Q$ ) :



\* On a choisi :

$$X_{A,m} = 1 \text{ et } \omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}.$$

\*  $u = \omega/\omega_0$  désigne la pulsation réduite

\* Pour  $\sigma$  faible (ou  $Q$  grand), la résonance est très aiguë.

\* L'oscillateur constitue un **filtre passe-bande**.

\* Bande passante du filtre

Avec Regressi





## Fonction de transfert complexe en vitesse et bande passante :

La fonction de transfert complexe en vitesse est définie par :

$$\underline{H}_v(i\omega) = \frac{\underline{v}(t)}{\underline{x}_A(t)}$$

Soit :

$$\underline{H}_v(i\omega) = \frac{V_m}{X_{A,m}} e^{i\psi} = \frac{\omega_0}{2\sigma + i\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$G_v(\omega) = \frac{V_m}{X_{A,m}}$  est le **gain (réel) en vitesse**. Il est maximal pour  $\omega = \omega_0$  et vaut :

$$G_v(\omega_0) = \frac{\omega_0}{2\sigma} = Q\omega_0$$





**Bande passante du filtre passe-bande** : c'est l'ensemble des pulsations  $\omega$  pour lesquelles le gain en vitesse reste, par convention, supérieur au gain maximal (obtenu pour  $\omega_0$ ) divisé par  $\sqrt{2}$ .

$$G_v(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} G_v(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{2\sigma} \quad \text{pour} \quad \omega \in [\omega_{c_1}, \omega_{c_2}]$$

Les pulsations  $\omega_{c_1}$  et  $\omega_{c_2}$  sont appelées **pulsations de coupure**. Elles vérifient :

$$G_v(\omega_{c_1}) = G_v(\omega_{c_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{2\sigma} \quad (\text{Les placer sur les courbes fournies})$$

Ces pulsations de coupure vérifient ainsi l'équation :

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{4\sigma^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega_0}{2\sigma}$$



En élevant au carré et en prenant l'inverse :

$$4\sigma^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 8\sigma^2 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 4\sigma^2$$

ou

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 2\sigma$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = -2\sigma$$

La 1<sup>ère</sup> équation conduit à :  $\omega^2 - 2\sigma\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0$

Dont la seule racine positive est :  $\omega_{c_2} = \sigma\omega_0 + \omega_0\sqrt{1 + \sigma^2}$

La 2<sup>ème</sup> équation conduit à :  $\omega^2 + 2\sigma\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0$

Dont la seule racine positive est :  $\omega_{c_1} = -\sigma\omega_0 + \omega_0\sqrt{1 + \sigma^2}$

La largeur de la bande passante est :  $\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = 2\sigma\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$

Elle est d'autant plus faible (résonance aiguë) que l'amortissement est faible (et le facteur de qualité grand).



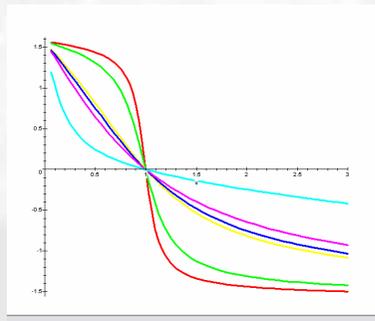
## Etude du déphasage $\varphi(\omega)$ :

La réponse complexe est :  $V_m e^{i\psi} = \frac{\omega_0}{2\sigma + i\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} X_{A,m}$

$$\left. \begin{array}{l} \tan \psi = -\frac{1}{2\sigma} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\ \cos \psi > 0 \quad (\text{signe de } 2\sigma) \end{array} \right\} \rightarrow \text{donc } \psi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Remarque :  $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$

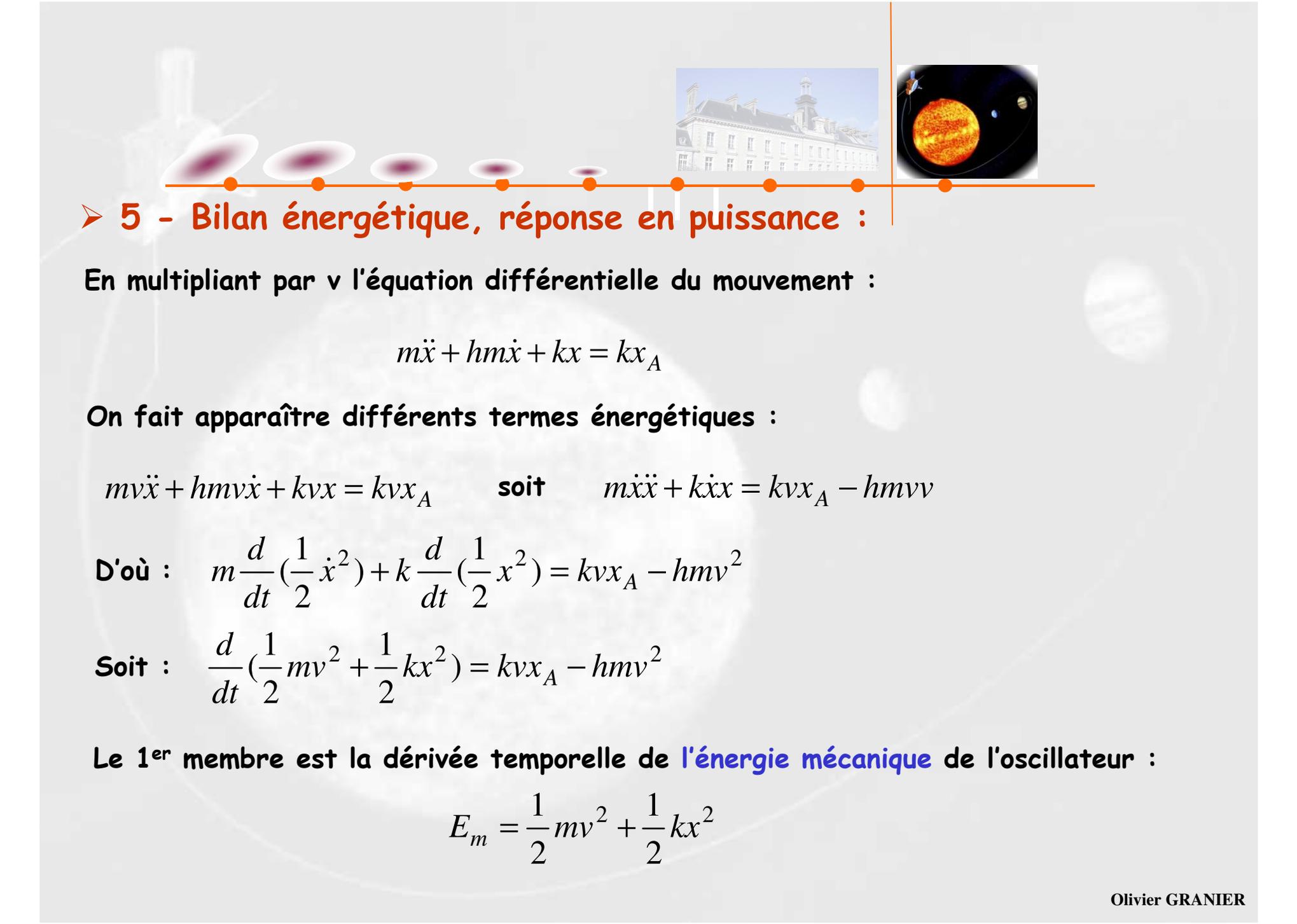
Tracé des courbes  $\varphi(\omega)$  :



Cliquer sur l'image pour ouvrir le fichier MAPLE

Avec  Regressi





➤ **5 - Bilan énergétique, réponse en puissance :**

En multipliant par  $v$  l'équation différentielle du mouvement :

$$m\ddot{x} + hm\dot{x} + kx = kx_A$$

On fait apparaître différents termes énergétiques :

$$mv\ddot{x} + hmv\dot{x} + kvx = kvx_A \quad \text{soit} \quad m\dot{x}\dot{x} + kxx = kvx_A - hmvv$$

$$\text{D'où :} \quad m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) + k \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} x^2 \right) = kvx_A - hmv^2$$

$$\text{Soit :} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = kvx_A - hmv^2$$

Le 1<sup>er</sup> membre est la dérivée temporelle de **l'énergie mécanique** de l'oscillateur :

$$E_m = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$$



Le 2<sup>nd</sup> membre est la somme de la puissance  $P_d$  dissipée par les forces de frottement et la puissance  $P_f$  fournie par l'excitation :

$$P_d = -hm\dot{v}^2 \quad \text{et} \quad P_f = kx_A \dot{v}$$

On note  $P$  la puissance instantanée totale reçue par l'oscillateur :

$$P = P_d + P_f$$

De la même manière qu'en électricité, déterminons la **puissance moyenne** sur une période :

$$\langle P \rangle = \langle P_d \rangle + \langle P_f \rangle$$

**Avec :**

$$\langle P_d \rangle = \langle -hm\dot{v}^2 \rangle = -hm \frac{1}{T} \int_0^T \dot{v}^2 dt = -hm \frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \psi) dt = -\frac{hmV_m^2}{2}$$

$$\langle P_f \rangle = \langle kx_A \dot{v} \rangle = k \frac{1}{T} \int_0^T X_{A,m} V_m \cos \omega t \cos(\omega t + \psi) dt$$



$$\langle P_f \rangle = k \frac{X_{A,m} V_m}{2T} \left[ \int_0^T \cos(2\omega t + \psi) dt + \int_0^T \cos \psi dt \right] = k \frac{X_{A,m} V_m}{2} \cos \psi$$

Or, avec :

$$V_m e^{i\psi} = \frac{\omega_0}{2\sigma + i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} X_{A,m}$$

$$\cos \psi = \frac{2\sigma}{\sqrt{4\sigma^2 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad \text{et} \quad X_{A,m} = \frac{V_m}{\omega_0} \sqrt{4\sigma^2 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

Finalemment :

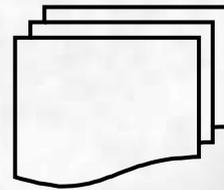
$$\langle P_f \rangle = k \frac{1}{2} 2\sigma \frac{V_m}{\omega_0} V_m = \frac{1}{2} (m\omega_0^2) \left( \frac{h}{\omega_0} \right) \frac{V_m^2}{\omega_0} = \frac{1}{2} hm V_m^2 = -\langle P_d \rangle$$



**En définitive :**

$$\langle P \rangle = \langle P_f \rangle + \langle P_d \rangle = 0$$

**En régime forcé, la puissance moyenne fournie par l'excitation est égale à la puissance moyenne dissipée en chaleur par l'oscillateur.**





➤ **6 - Autres oscillateurs :**

Exercice n°1 : modélisation d'un haut parleur

Exercice n°2 : étude d'un sismographe

Exercice n°3 : pourquoi le ciel est-il bleu par beau temps ?

