PCSI 1 (O.Granier)

Lycée Clemenceau

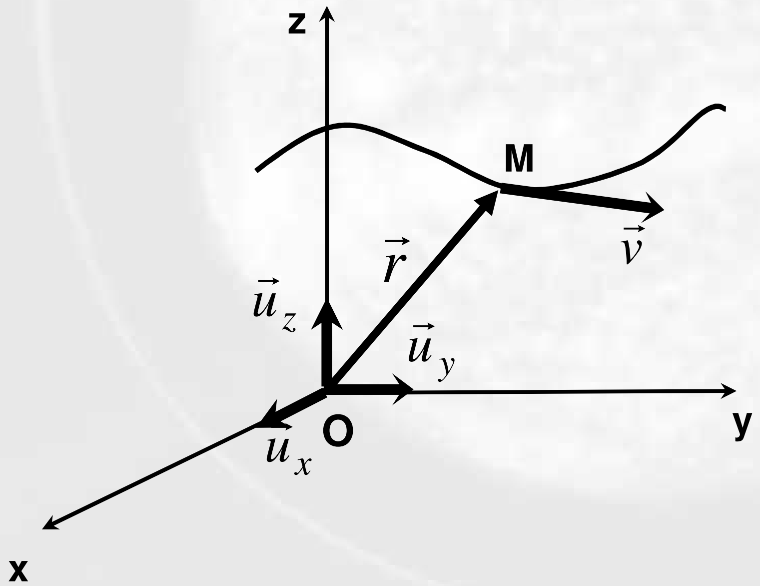
Théorème du moment cinétique

(mécanique du point matériel)

Olivier GRANIER

I - Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point :

Soit un point matériel M(m), dans un référentiel galiléen (R), de rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et de vitesse $\vec{v}$; O est l'origine du repère (Oxyz). Soit A un point quelconque, a priori mobile dans (R).



Le moment cinétique du point M, par rapport au point A et exprimé dans (R), est :

$$\boxed{\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}}$$

Propriétés :

- $\vec{\sigma}_A$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$
- $\left|\vec{\sigma}_A\right| = mv(AM)\sin(\overrightarrow{AM}, \vec{v})$

→ **Le moment cinétique dépend du point par rapport auquel on l'évalue :**

$$\vec{\sigma}_B = \overrightarrow{BM} \wedge m\vec{v} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \wedge m\vec{v} = \vec{\sigma}_A + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{v}$$

Dans la suite, A sera confondu avec l'origine O du repère (et sera donc fixe dans (R)) :

$$\boxed{\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m\vec{v}}$$

Si le mouvement de M est plan, on peut utiliser les coordonnées polaires :

$$\vec{\sigma}_o = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z \qquad (Avec\ \ \vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta)$$

II - Théorème du moment cinétique :

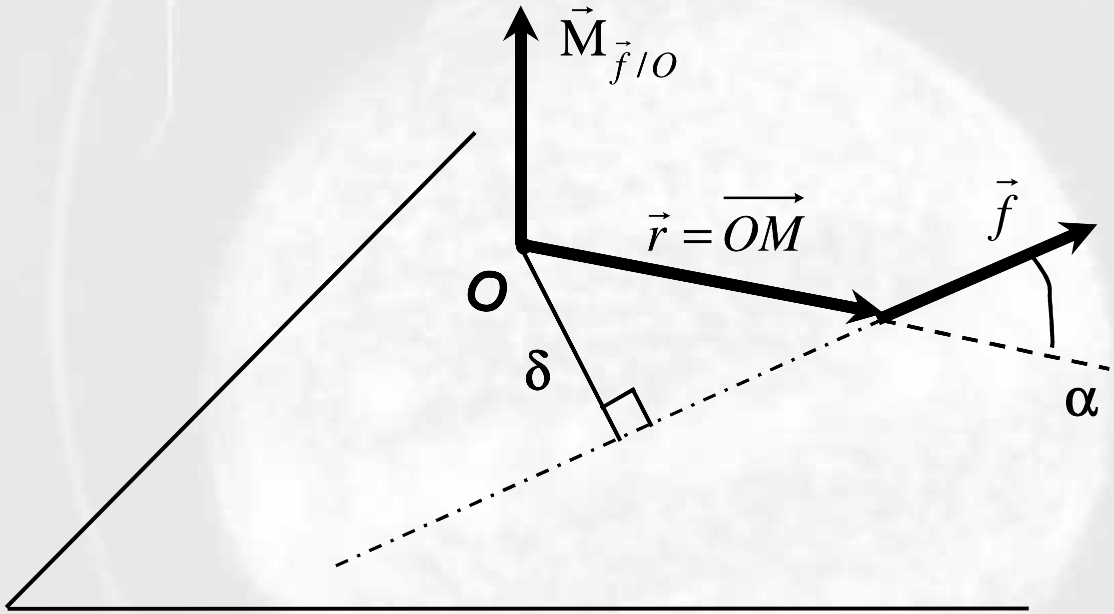
Le point M est soumis à des forces de résultante $\vec{f}$. Evaluons la dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à O :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{f}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{f} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{\mathrm{M}}_{\vec{f}/O}}$$

Enoncé du théorème du moment cinétique : « La dérivée du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe O d'un référentiel galiléen (R) est égale au moment par rapport à ce même point O des forces qui s'appliquent sur lui. »

Interprétation du moment des forces par rapport à O :



$$\vec{M}_{\vec{f}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$

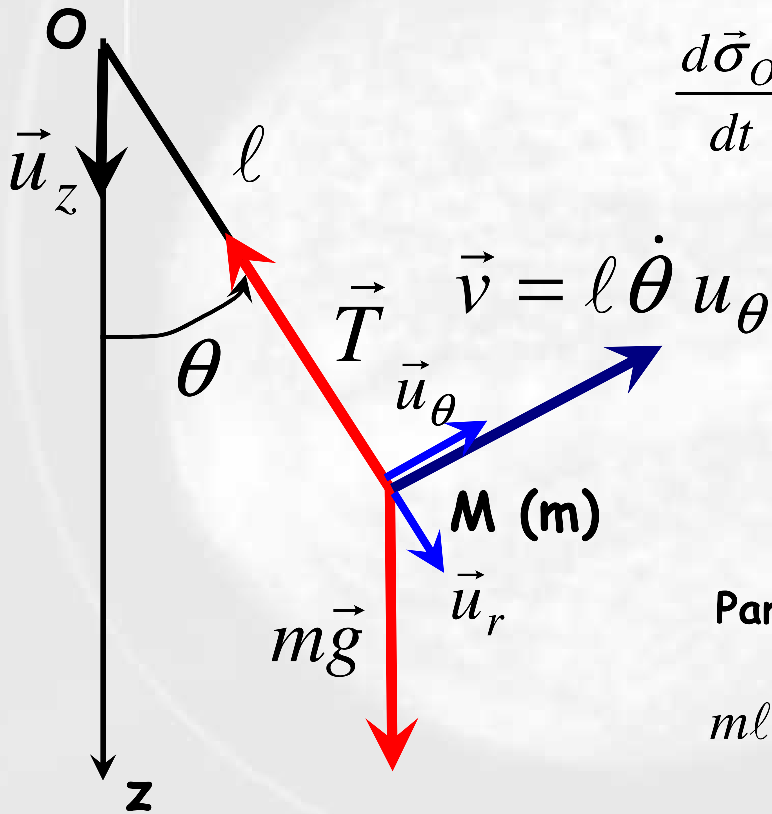
$$\left|\vec{M}_{\vec{f}/O}\right| = rf \sin\alpha = r\delta$$

δ est appelé « bras de levier » de la force $\vec{f}$. C'est la distance entre la droite d'action de la force et le point O.

Le **théorème du moment cinétique** fournit, pour une masse ponctuelle, une autre méthode pour obtenir des résultats accessibles par le PFD.

III - Un 1er exemple de résolution ; étude du pendule simple

- **1 - En l'absence de frottements :**



$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{T} + m\vec{g}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} \qquad (car\ \vec{T}\ //\ \overrightarrow{OM})$$

$$\longrightarrow \quad \vec{\sigma}_O = m\ell^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z \quad ; \quad \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = m\ell^2\ddot{\theta}\,\vec{u}_z$$

$$\longrightarrow \quad \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = \ell\,\vec{u}_r \wedge mg(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} = -mg\ell\sin\theta\,\vec{u}_z$$

Par conséquent :

$$m\ell^2\ddot{\theta}\,\vec{u}_z = -mg\ell\sin\theta\,\vec{u}_z \quad soit \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

III - Un 1er exemple de résolution ; étude du pendule simple

- **2 - En présence de frottements fluides :**

Il faut prendre en compte le moment de la force de frottements fluides par rapport à O :

$$\overrightarrow{OM} \wedge (-hm\vec{v}) = \ell\,\vec{u}_r \wedge (-hm\ell\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta) = -hm\ell^2\,\vec{u}_z$$

Le théorème du moment cinétique donne alors :

$$m\ell^2\ddot{\theta}\,\vec{u}_z = -mg\ell\sin\theta\,\vec{u}_z - hm\ell^2\,\vec{u}_z$$

Soit l'expression canonique traditionnelle :

$$\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = \ddot{\theta} + 2\sigma\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0$$

IV - Exercices

- **1 - Météorite :**
- **2 - Un satellite :**

$$\sigma_O(S) = mv(S)CS = 6{,}8.10^{13}\,kg.m^2.s^{-1} \qquad (OS\sin\alpha = CS)$$

Conservation du moment cinétique :

$$\sigma_O(A) = m(OA)v_A = \sigma_O(P) = m(OP)v_P = \sigma_O(S)$$

$$v_A = 5{,}9.10^3\,km.h^{-1} \qquad ; \qquad v_P = 36.10^3\,km.h^{-1}$$

- **3 - Le toboggan :**

Equation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} - \dfrac{g}{r}\cos\theta = 0$

Expression de la vitesse : $v = r\dot{\theta} = \sqrt{2gr(\sin\theta - \sin\theta_0)}$

Vitesse maximale : $v(\theta = \pi/2) = \sqrt{2gr(1-\sin\theta_0)} = 6\ m.s^{-1} = 21{,}7\ km.h^{-1}$