(O.Granier)

Energie

(mécanique du point matériel)

Olivier GRANIER

➢ 1 - Énergie cinétique :

(Dans toute la suite, on considère un point matériel M (m), de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel (R) galiléen.)

L'énergie cinétique du point matériel est :

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2}$$

E_c s'exprime dans le SI en Joule : $1\ J = 1\ kg.m^2.s^{-2}$

Autres unités d'énergie :

$$\begin{cases} 1\ eV = 1{,}6.10^{-19}\ J \\ 1\ kW.h = 3{,}6.10^{6}\ J = 3{,}6\ MJ \\ 1\ cal = 4{,}18\ J \end{cases}$$

➢ 2 - Théorème de l'énergie cinétique :

Le PFD appliqué au point matériel dans le référentiel (R) supposé galiléen donne :

$$\vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

On multiplie scalairement cette équation par le vecteur vitesse :

$$\vec{f}.\vec{v} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right).\vec{v} \quad or \qquad m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right).\vec{v} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^{\,2}\right) = \frac{dE_c}{dt}$$

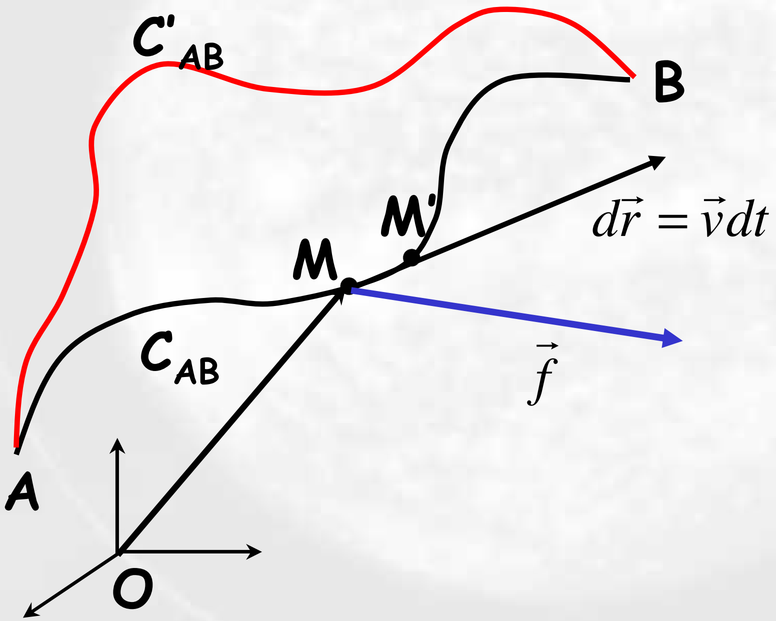
Par conséquent : $\boxed{\vec{f}.\vec{v} = \frac{dE_c}{dt}}$ *ou* $\boxed{\vec{f}.\vec{v}\,dt = dE_c}$

Interprétation : entre les instants t et t+dt, l'énergie cinétique de M varie d'une quantité qui dépend de la force et du déplacement $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ du point, appelée travail de la force $\vec{f}$ lors du déplacement $d\vec{r}$ et notée $\delta W_{\vec{f}}$.

Travail élémentaire d'une force :

$$\delta W_{\vec{f}} = \vec{f}.\vec{v}\,dt = \vec{f}.d\vec{r}$$

Travail total d'une force lors d'un déplacement de A à B :



$$W_{\vec{f},C_{AB}} = \int_{C_{AB}} \vec{f}.\vec{v}\,dt = \int_{C_{AB}} \vec{f}.d\vec{r}$$

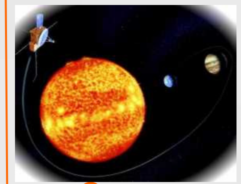
Le travail dépend a priori du trajet choisi pour aller de A à B :

$$W_{\vec{f},C'_{AB}} \neq W_{\vec{f},C_{AB}}$$

Si la force est constante, alors :

$$W_{\vec{f},C_{AB}} = \int_{C_{AB}} \vec{f}.d\vec{r} = \vec{f}.\left[\overrightarrow{OM}\right]_A^B = \vec{f}.\overrightarrow{AB}$$

(Remarque : le travail de deux forces est additif)



Puissance instantanée d'une force :

$$P_{\vec{f}} = \frac{\delta W_{\vec{f}}}{dt} = \vec{f}.\vec{v}$$

(Une puissance s'exprime en Watt (W) dans le SI)

Enoncé du théorème de l'énergie cinétique :

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des travaux des forces $\vec{F}$ qui lui sont appliquées :

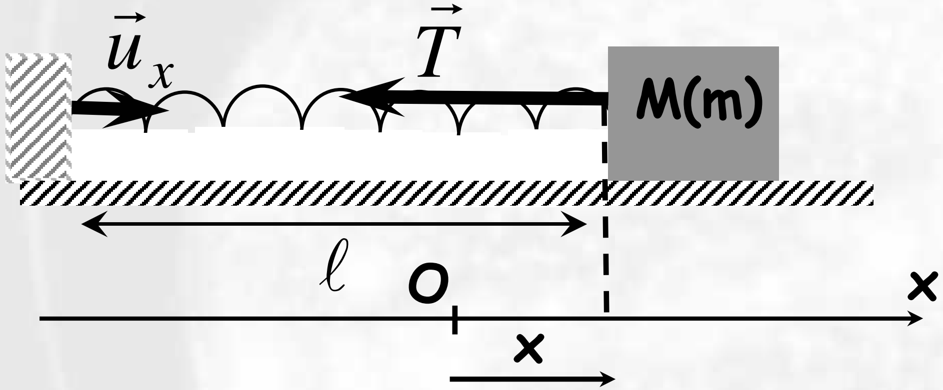
- **Sous forme élémentaire (entre t et t+dt) :** $dE_c = \delta W_{\vec{F}} = \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}.\vec{v}\ dt$

- **Sous forme intégrée :** $\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{\vec{F}} = \int_{C_{AB}} \vec{F}.d\vec{r}$

On parle également du théorème de la puissance cinétique : $P_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{v} = \dfrac{dE_c}{dt}$

3 - Exemples de forces conservatives :

La tension d'un ressort :



Le travail élémentaire de la tension lors d'un déplacement $d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x$ s'écrit :

$$\delta W_{\vec{T}} = \vec{T}.d\vec{r} = -k(\ell - \ell_0).\vec{u}_x.dx\,\vec{u}_x = -kx.dx$$

Ce travail peut s'écrire sous la forme d'une différentielle :

$$\delta W_{\vec{T}} = -kx.dx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

On pose :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{(à une constante près)}$$

Simulation Java

Alors : $\boxed{\delta W_{\vec{T}} = -dE_P \qquad et \qquad W_{\vec{T}} = -\Delta E_P}$

E_p est appelée énergie potentielle élastique de la masse m (elle est définie à une constante près).

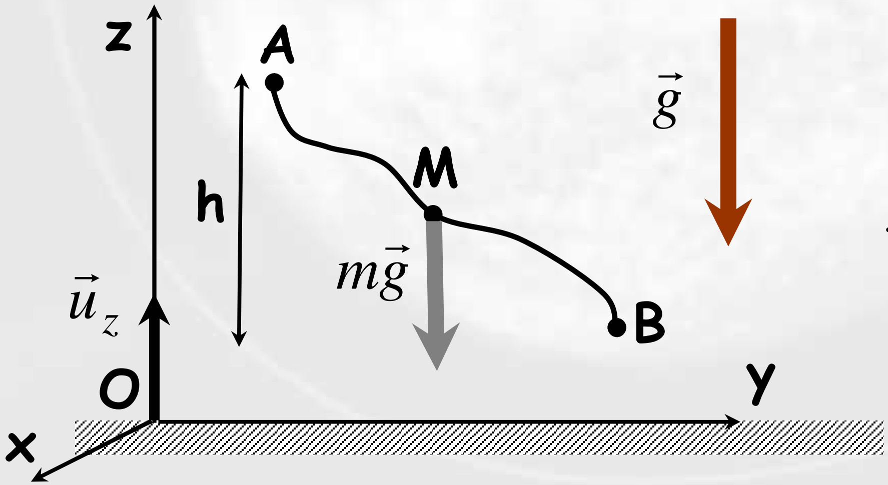
Relation entre la force et l'énergie potentielle : en dérivant l'énergie potentielle par rapport au déplacement x, on obtient :

$$\frac{dE_p}{dx} = kx \qquad soit \qquad T = -\frac{dE_p}{dx} \qquad et \qquad \boxed{\vec{T} = -\frac{dE_p}{dx}\,\vec{u}_x}$$

Cette relation entre la force et l'énergie potentielle est générale.

➢ **Le poids d'un corps :**

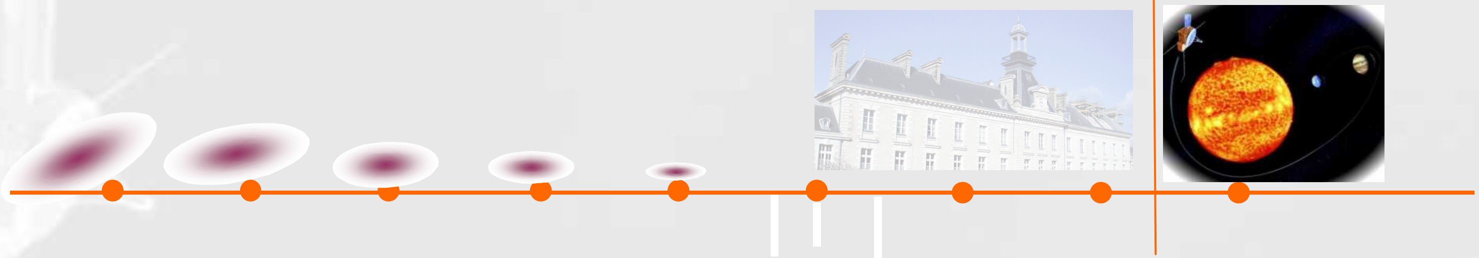
Le travail du poids d'un corps M(m) lors d'un déplacement $d\vec{r}$ s'écrit :



$$\delta W_{m\vec{g}} = m\vec{g}.d\vec{r}$$

$$\begin{cases} d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z \\ \vec{g} = -g\,\vec{u}_z \end{cases}$$

$$\delta W_{m\vec{g}} = -mgdz = -d(mgz) = -dE_P$$



On définit ainsi $E_P = mgz$ comme étant l'énergie potentielle de pesanteur du point M.

Elle ne dépend que de la cote de z. Le travail total du poids de M pour aller de A à B est ainsi :

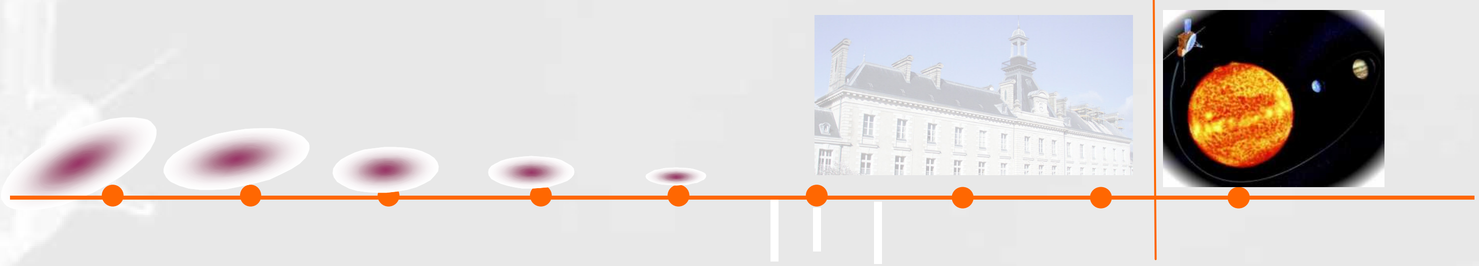
$$W_{m\vec{g},AB} = mgh$$

Ce travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la dénivellation entre les points A et B.

Relation entre la force et l'énergie potentielle : en dérivant par rapport à la cote z, on obtient :

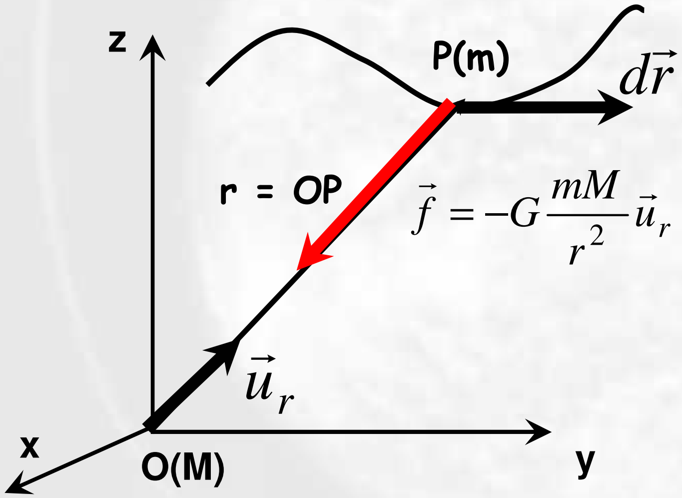
$$\frac{dE_p}{dz} = mg \quad soit \quad -mg = -\frac{dE_p}{dz} \quad et \quad \boxed{m\vec{g} = -\frac{dE_p}{dz}\vec{u}_z}$$

Remarque : si l'axe (Oz) est orienté vers le bas, alors $E_P = -mgz$. Il faut donc bien préciser l'orientation choisie pour l'axe (Oz) ! Un bon moyen de vérifier si l'expression utilisée est correcte consiste à vérifier que l'énergie potentielle de pesanteur augmente toujours avec l'altitude.



➢ La force gravitationnelle :

On considère une masse M immobile en O et un point matériel P(m) mobile. Le travail élémentaire de la force gravitationnelle subie par le point P est :



$$\delta W_{\vec{f}} = \vec{f}.d\vec{r} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r.d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = d(r\,\vec{u}_r) = (dr)\,\vec{u}_r + r\,d(\vec{u}_r)$$

$$\vec{u}_r.d\vec{r} = (dr)\,\vec{u}_r^2 + r\,\vec{u}_r.d(\vec{u}_r) = (dr) + r\,\vec{u}_r.d(\vec{u}_r)$$

$$Mais\quad :\quad \vec{u}_r.d(\vec{u}_r) = d\left(\frac{1}{2}\vec{u}_r^2\right) = d\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad (\vec{u}_r^2 = 1)$$

$$D'où\quad :\quad \delta W_{\vec{f}} = -G\frac{mM}{r^2}dr = -d\left(-G\frac{mM}{r}\right)$$

On définit alors l'énergie potentielle gravitationnelle E_P telle que :

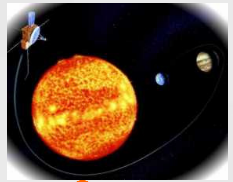
$$E_P = -G\frac{mM}{r} \qquad alors \qquad \delta W_{\vec{f}} = -dE_P$$

Par convention, on choisit une énergie potentielle nulle à l'infini.

Relation entre la force et l'énergie potentielle : en dérivant $E_p(r)$ par rapport à la variable r, on obtient :

$$\frac{dE_P}{dr} = G\frac{mM}{r^2} \qquad soit \qquad f = -\frac{dE_P}{dr} \qquad et \qquad \boxed{\vec{f} = -\frac{dE_P}{dr}\vec{u}_r}$$

On retrouve, là encore, une relation identique à celles vues pour les deux forces précédentes (la variable est ici la distance r).



➢ La force coulombienne :

On considère une charge Q immobile en O et un point matériel P(m,q) mobile. La force coulombienne subie par le point P est :

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\vec{u}_r$$

Ainsi, les résultats obtenus avec la force gravitationnelle peuvent être transposés pour la force coulombienne en faisant l'analogie formelle suivante :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Leftrightarrow -G \quad ; \quad qQ \Leftrightarrow mM$$

L'énergie potentielle coulombienne est alors :

$$E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} \quad alors \quad \delta W_{\vec{f}} = -dE_P \quad et \quad \vec{f} = -\frac{dE_P}{dr}\vec{u}_r$$

➢ 4 - Généralisation :

➢ Energie potentielle et force conservative :

On dit qu'une force $\vec{f}$ dérive d'une énergie potentielle E_P si le travail de la force peut s'écrire comme :

$$\delta W_{\vec{f}} = \vec{f}.d\vec{r} = -dE_P \qquad ou \qquad W_{\vec{f}} = -\Delta E_P$$

Cette force est alors appelée force conservative.

Conséquence importante : « Le travail d'une force conservative est indépendant de la trajectoire suivie et ne dépend que des positions initiale et finale et est égale à la diminution de l'énergie potentielle ($-\Delta E_P$). »

Ainsi, pour calculer le travail de la force, il suffira juste de connaître la fonction E_P et calculer sa diminution.


Relation entre la force et la dérivée de l'énergie potentielle

Si $E_P(x)$ dépend d'une des variables cartésiennes (par exemple, x) :

$$\delta W_{\vec{f}} = \vec{f}(x).d\vec{r} = f(x)\vec{u}_x.(dx\,\vec{u}_x) = f(x)dx = -dE_P$$

D'où : $$f(x) = -\frac{dE_P}{dx} \qquad et \qquad \boxed{\vec{f}(x) = -\frac{dE_P}{dx}\,\vec{u}_x}$$

Si $E_P(r)$ dépend de la variable r = OM :

$$\delta W_{\vec{f}} = \vec{f}(r).d\vec{r} = f(r)dr = -dE_P$$

D'où : $$f(r) = -\frac{dE_P}{dr} \qquad et \qquad \boxed{\vec{f}(r) = -\frac{dE_P}{dr}\,\vec{u}_r}$$

Ce sont ces relations qu'il faut désormais utiliser pour passer de la force à l'énergie potentielle, et vice versa.

Exemples :

$$E_P(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{3}ax^3 \qquad ; \qquad \vec{f}(x)\ ?$$

$$E_P(x) = \ ? \qquad ; \qquad \vec{f}(x) = -\frac{k}{x}\vec{u}_x + bx\,\vec{u}_x$$

$$E_P(r) = \ ? \qquad ; \qquad \vec{f}(r) = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r + \frac{c}{r^3}\,\vec{u}_r$$

➢ Energie mécanique et intégrale première du mouvement :

Soit un point matériel M soumis à une force conservative $\vec{f}$. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué dans un référentiel galiléen donne :

$$dE_c = \delta W_{\vec{f}} = -dE_P \qquad soit \qquad dE_c + dE_P = 0$$

$$d(E_c + E_P) = 0$$

On définit alors : $E_m = E_c + E_P$, l'énergie mécanique du point matériel M.

Elle est constante puisque $dE_m = 0$:

$$E_m = E_c + E_P = E_{m0} = cste\ du\ mouvement$$

Si le point matériel est soumis à plusieurs forces conservatives (poids et tension d'un ressort), on définira alors l'énergie mécanique comme :

$$E_m = E_c + E_{P,pesanteur} + E_{P,ressort} = cste$$

« Lorsqu'un point matériel est soumis uniquement à des forces conservatives (c'est-à-dire pour lesquelles on peut définir des énergies potentielles), son énergie mécanique (somme de son énergie cinétique et des différentes énergies potentielles) reste constante lors du mouvement. »

Il y a transfert incessant entre ces deux formes « cinétique » et « potentielle » de l'énergie.

La conservation de l'énergie mécanique fait intervenir les coordonnées de M (dans les énergies potentielles) et sa vitesse (dans l'énergie cinétique) : c'est donc une équation différentielle du 1er ordre, appelée **intégrale 1ère du mouvement**.

Nous verrons en exercice qu'il est souvent préférable d'utiliser cette intégrale 1ère même si l'on souhaite déterminer la nature de la trajectoire ; en effet, on élimine les forces qui ne travaillent pas et, par dérivation, on peut revenir à l'accélération et donc au PFD.

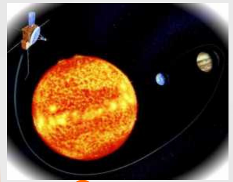


TABLEAU RECAPITULATIF

Forme intégrale

$$-\Delta E_P = -[E_P(B) - E_P(A)] = W_{\vec{f}} = \int_A^B \vec{f}.d\vec{r}$$

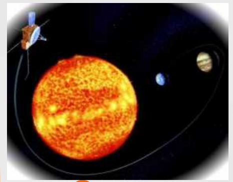
Forme différentielle

$$-dE_P = \delta W_{\vec{f}} = \vec{f}.d\vec{r}$$

Forme locale

$$\vec{f} = f(x)\,\vec{u}_x = -\frac{dE_P(x)}{dx}\,\vec{u}_x \quad ; \quad \vec{f} = f(r)\,\vec{u}_r = -\frac{dE_P(r)}{dr}\,\vec{u}_r$$

Olivier GRANIER



Energie mécanique – Intégrale 1ère du mouvement

Tension d'un ressort :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_{m0}$$

Champ de pesanteur :

$$\frac{1}{2}mv^2 \pm mgz = E_{m0}$$

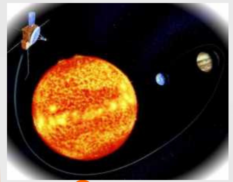
($\pm$: dépend de l'orientation de l'axe (Oz))

Champ gravitationnel :

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = E_{m0}$$

Champ coulombien :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} = E_{m0}$$



5 - Quelques exemples d'utilisation de l'intégrale 1ère du mouvement :

Vitesse de libération (interaction gravitationnelle)

Quelle vitesse initiale minimale v_{lim} faut-il communiquer à un point matériel situé à la surface de la Terre pour qu'il échappe à l'attraction gravitationnelle terrestre ?

$$E_{m0} = E_c + E_P = \frac{1}{2} m v_{\text{lim}}^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = 0$$

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

Avec $g_0 = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$**, on obtient :**

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{2R_T g_0} = 11{,}2\ km.s^{-1} \qquad (R_T = 6\,370\ km)$$

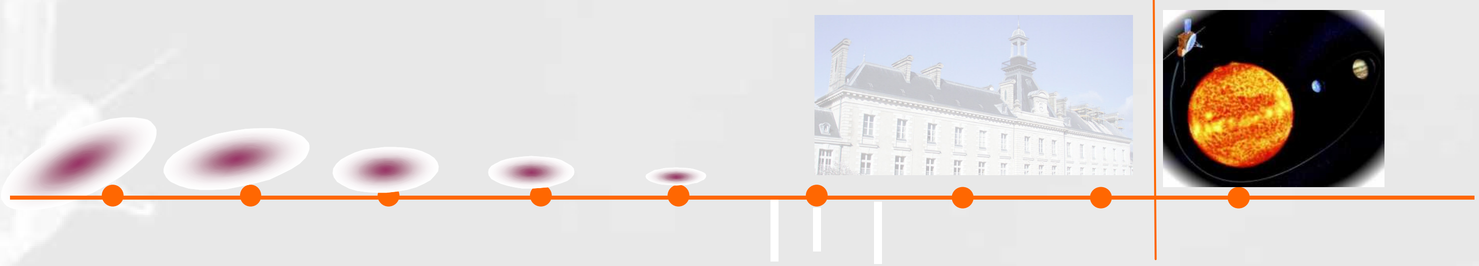
➢ Quelques exemples d'utilisation de l'intégrale 1ère du mouvement :

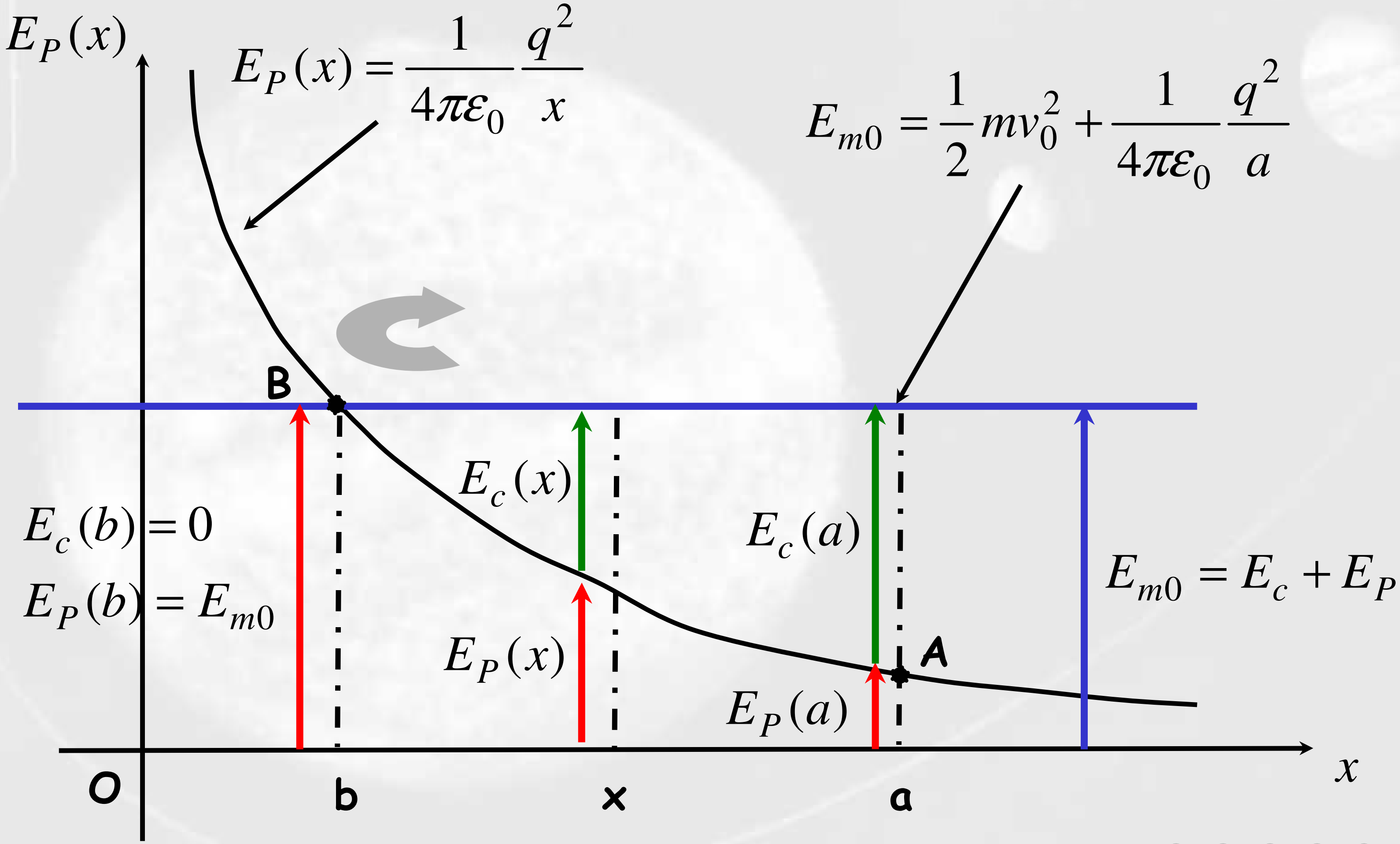
➢ Limites de trajectoire et énergie (interaction coulombienne) : (ex n°4)

Une particule fixe, de charge électrique + q (q > 0), est placée à l'origine O d'un axe (Ox) : tout le problème se déroule sur cet axe. On néglige le poids des particules.

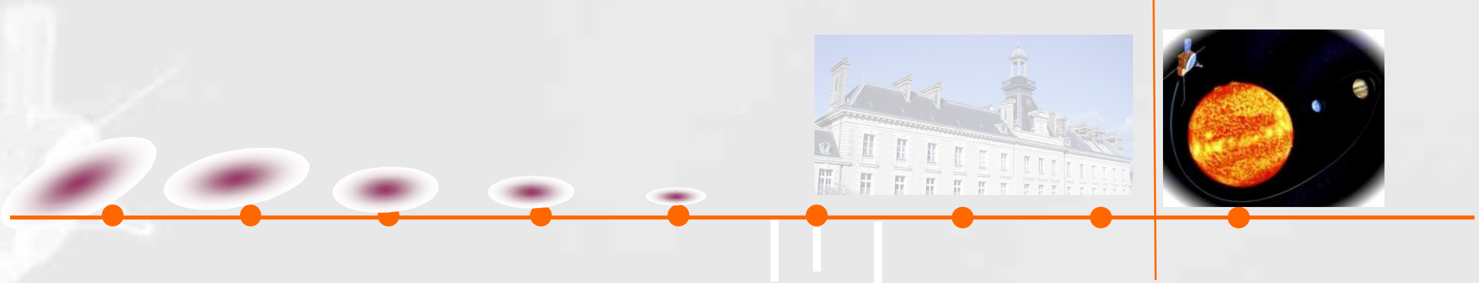
➢ a) On lance à une distance a de O une seconde particule, de charge - q et de masse m, dans une direction tendant à l'éloigner de O. Quelle vitesse initiale v_0 doit-on lui communiquer pour qu'elle échappe à l'attraction de la particule fixe en O ?

➢ b) La particule mobile a maintenant la charge + q et sa vitesse initiale est v_0 et est dirigée vers O. Montrer que cette particule ne peut atteindre O ; calculer la distance minimale d'approche b en fonction de v_0.



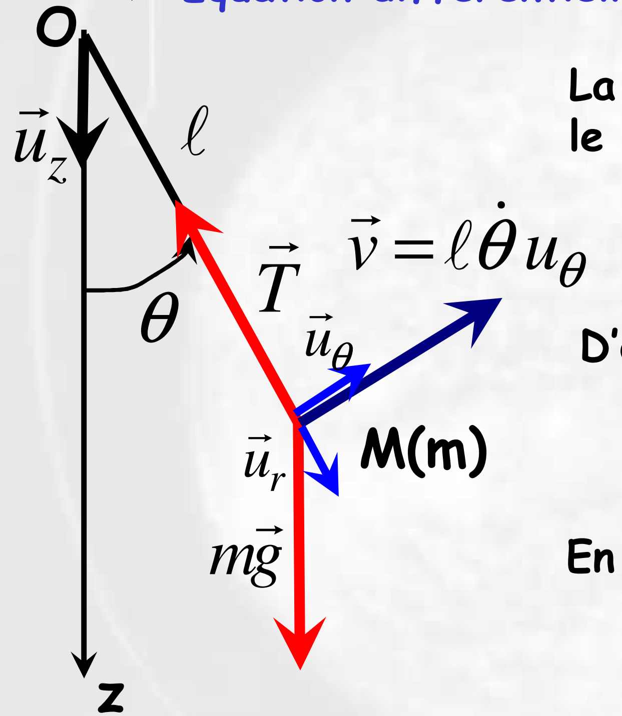


$E_P(x)$
$E_P(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x}$
$E_{m0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$
B
A
$E_c(b) = 0$
$E_P(b) = E_{m0}$
$E_c(x)$
$E_P(x)$
$E_c(a)$
$E_P(a)$
$E_{m0} = E_c + E_P$
O
b
x
a
x



➢ Quelques exemples d'utilisation de l'intégrale 1ère du mouvement :

➢ Equation différentielle du pendule (étude énergétique), ex n°6



La tension ne travaille pas (perpendiculaire au déplacement) ; le système est conservatif :

$$E_{m0} = \frac{1}{2}mv^2 - mgz \quad ; \quad v = \ell\dot{\theta} \quad ; \quad z = \ell\cos\theta$$

D'où l'intégrale 1ère du mouvement :

$$E_{m0} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta$$

Simulation Java

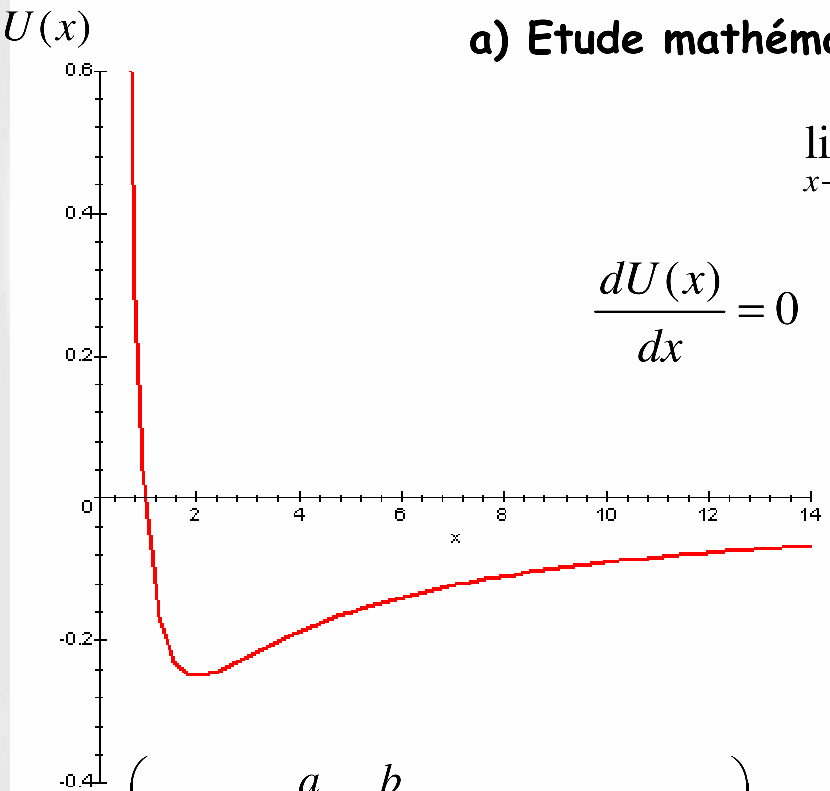
En dérivant par rapport au temps :

$$\frac{dE_{m0}}{dt} = 0 = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta$$

Soit l'équation différentielle du mouvement : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = \ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0}$

➢ Quelques exemples d'utilisation de l'intégrale 1ère du mouvement :

➢ Etats liés, états libres : (exercice n°5)



$$\left(U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} \quad (ici,\ a = 1\ et\ b = 1) \right)$$

a) Etude mathématique :

$$\lim_{x \to 0} U(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to \infty} U(x) = 0^-$$

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \quad pour \quad x_{\min} = \frac{2a}{b} \quad et \quad U_{\min} = U(r_{\min}) = -\frac{b^2}{4a}$$

b) Petits mouvements :

$$f(x) = -\frac{b^4}{8a^3}(x - x_{\min}) = -k(x - x_{\min})$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{b^4}{8ma^3} \quad ; \quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{b^4}{8ma^3}}$$

6 - Équilibre d'un point et conditions de stabilité :

Conditions d'équilibre :

On suppose que l'énergie potentielle ne dépend que de la variable x, $E_P(x)$. La force s'écrit :

$$\vec{f}(x) = -\frac{dE_P}{dx}\,\vec{u}_x$$

Une position d'équilibre correspond à une force nulle (et vitesse initiale nulle) :

$$f(x) = 0 \qquad donc \qquad \frac{dE_P}{dx} = 0$$

C'est-à-dire à un **extremum de l'énergie potentielle**.

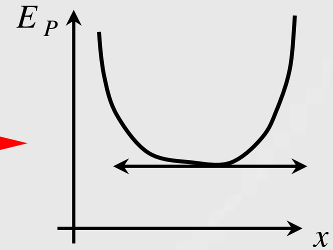
➢ Conditions de stabilité :

Une position d'équilibre **stable** va correspondre à la condition :

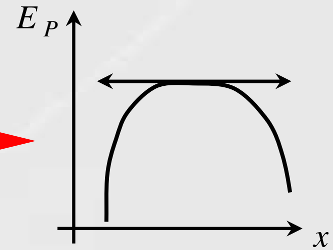
$$dx > 0 \quad alors \quad df < 0 \quad soit \quad \frac{df}{dx} < 0$$

On en déduit, en remarquant que : $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{dE_P}{dx}\right) = -\dfrac{d^2E_P}{dx^2}$

Equilibre stable : $\dfrac{d^2E_P}{dx^2} > 0$ C'est-à-dire E_P minimale →



Equilibre instable : $\dfrac{d^2E_P}{dx^2} < 0$ C'est-à-dire E_P maximale →

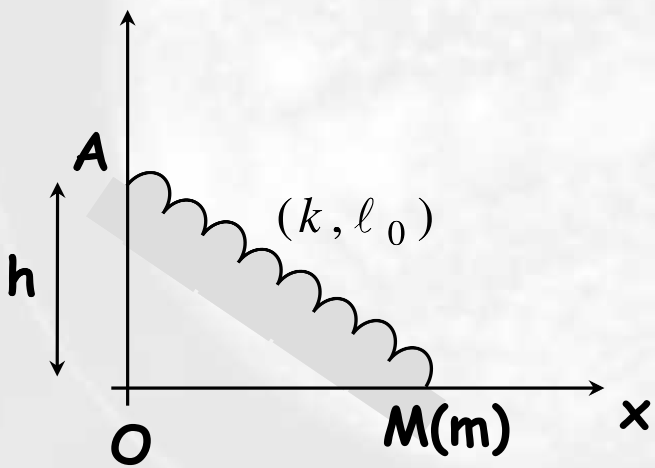


Equilibre indifférent : $\dfrac{d^2E_P}{dx^2} = 0$

➢ **Exemple :**

Un point matériel M(m) est astreint à se déplacer sans frottement le long d'un axe (Ox). Il est relié à un point A par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide $\ell_0 > h$.

Etudier l'équilibre de M (existence et stabilité).

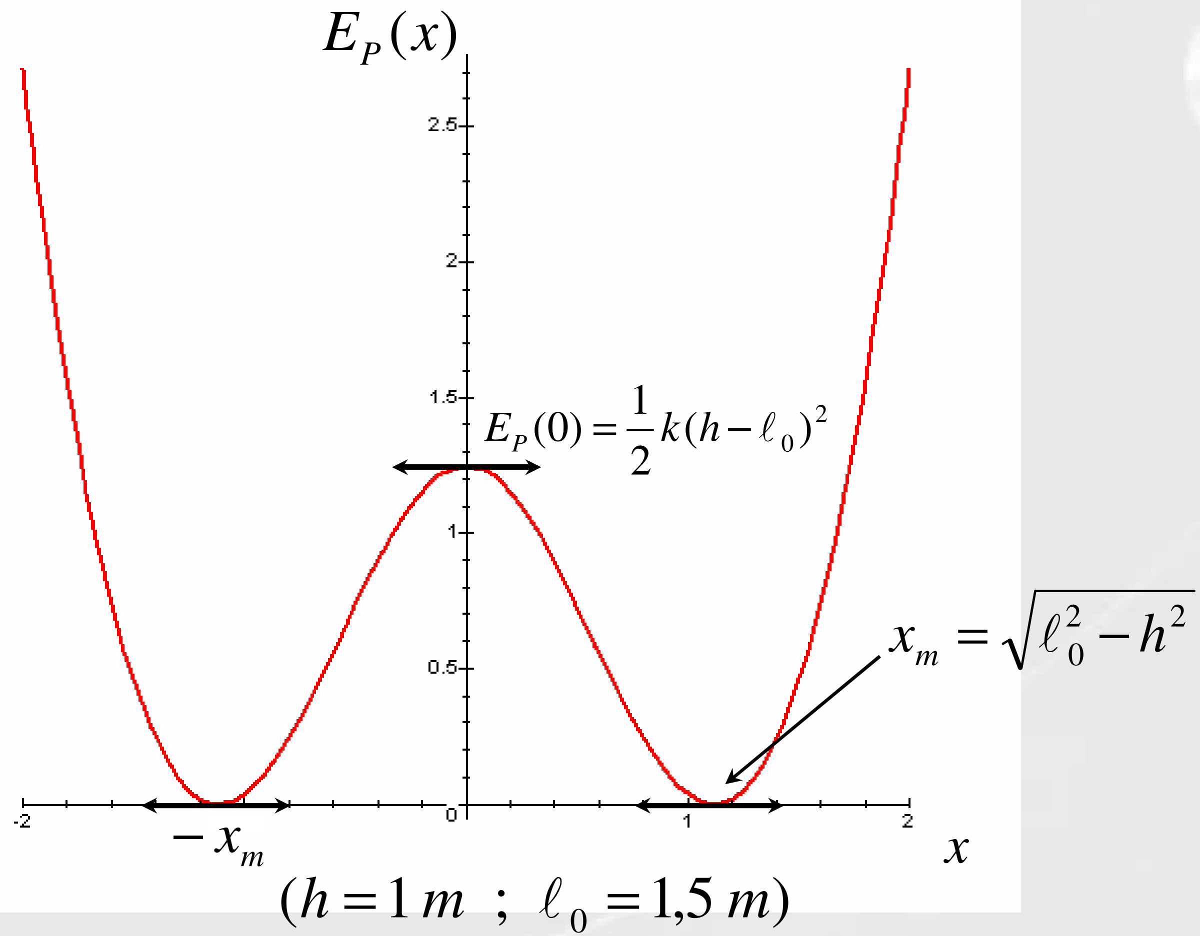


$$E_P(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{h^2 + x^2} - \ell_0\right)^2$$

$$\frac{dE_P}{dx} = k\left(\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right)\left(\sqrt{h^2 + x^2} - \ell_0\right)$$

$$\frac{dE_P}{dx} = 0 \quad pour \ :$$

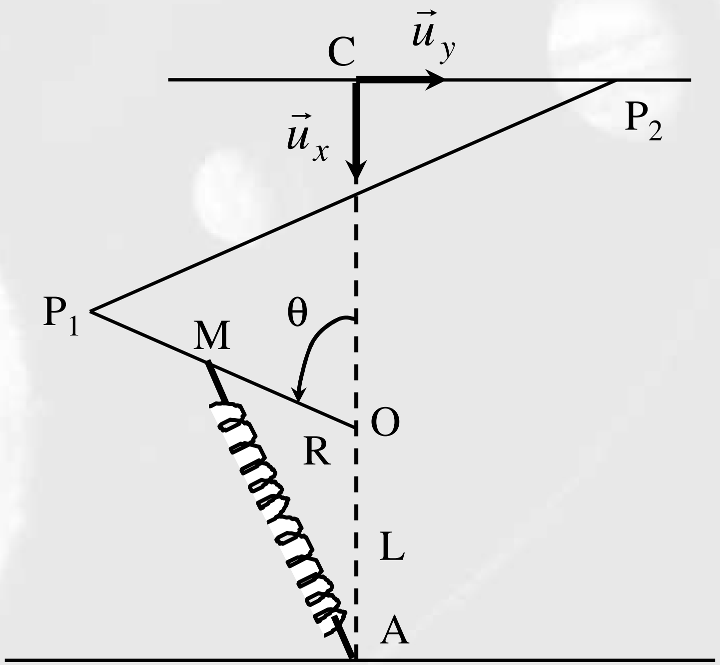
$$x = 0 \quad ou \quad x = \pm x_m = \pm\sqrt{\ell_0^2 - h^2}$$



$E_P(x)$
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-2
1
2
$E_P(0) = \frac{1}{2}k(h-\ell_0)^2$
$x_m = \sqrt{\ell_0^2 - h^2}$
$-x_m$
x
$(h = 1\,m \;\; ; \;\; \ell_0 = 1{,}5\,m)$

➢ **Exercice n°7 (la porte de garage) :**

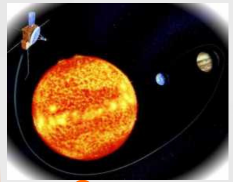
Une porte de garage P_1P_2 de longueur 2L peut se mettre en mouvement : P_2 se déplace sur l'axe (Cy) sans frottement, P_1 a un mouvement circulaire de rayon L autour de (Oz). On modélise cette porte en s'intéressant uniquement au triangle OAM (une masse m étant placée en M). La tige OM est rigide, de masse négligeable et de rayon R. Un ressort de longueur à vide et de raideur k, exerce une force de rappel sur le point M (constamment dirigée vers le point A).



a) Exprimer l'énergie potentielle du point matériel M(m) en fonction de l'angle θ.

b) Déterminer les positions d'équilibre du point matériel M(m) et discuter leur stabilité. Conclure.

Données : $m = 30\ kg\ ;\ R = 10\ cm\ ;\ L = 10R = 1\ m\ ;\ \ell_0 = 12R = 1{,}2\ m\ ;\ k = 50\,000\ N.m^{-1}$



Energie potentielle de pesanteur : $E_{p,pes} = mgR\cos\theta + cste$

Energie potentielle élastique :

$$E_{p,él} = \frac{1}{2}k(AM - \ell_0)^2$$

$$Or : \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\ ;\ AM^2 = L^2 + R^2 + 2LR\cos\theta$$

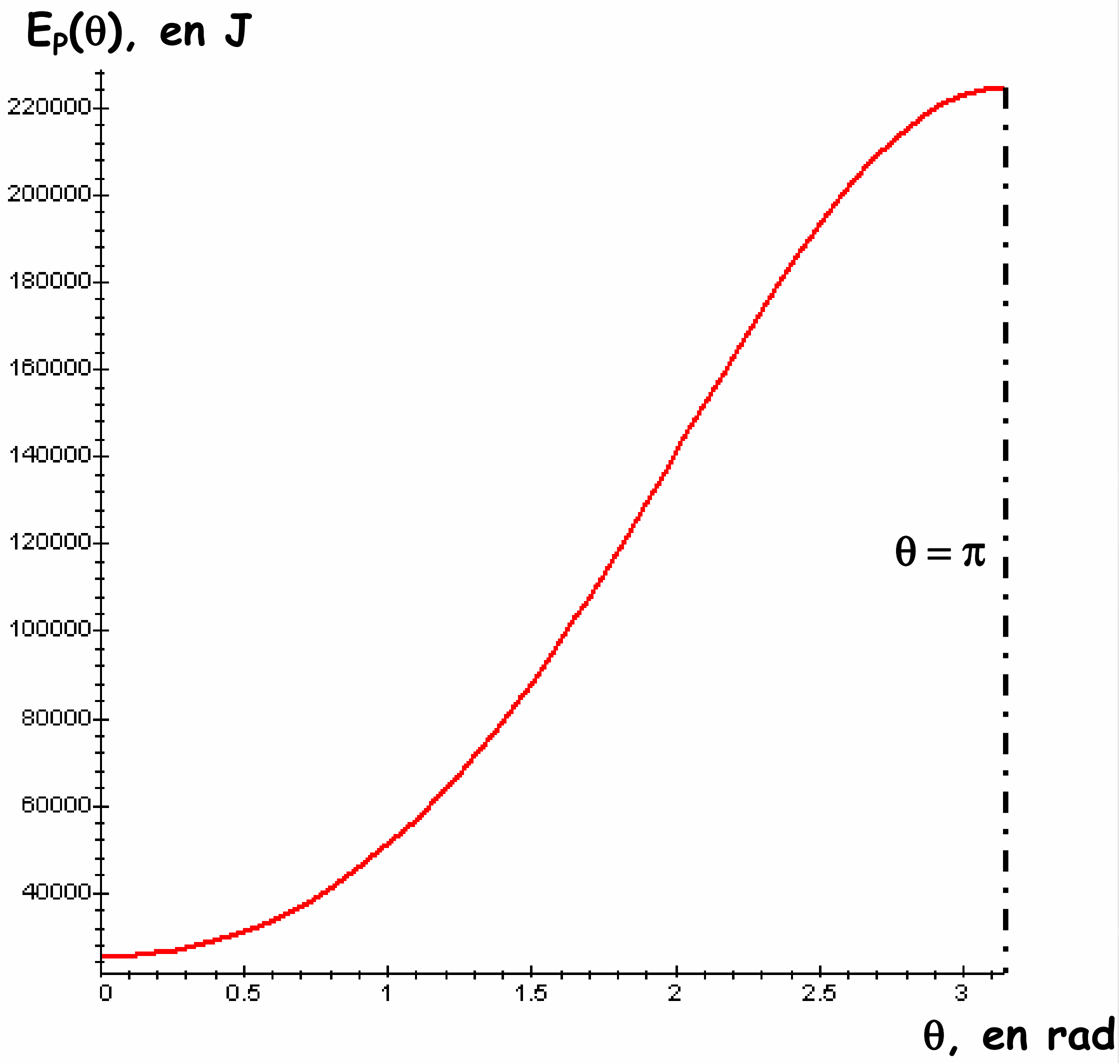
$$E_{p,él} = \frac{1}{2}k\left[(L^2 + R^2 + 2LR\cos\theta)^{1/2} - \ell_0\right]^2$$

Energie potentielle totale (en choisissant la constante nulle) :

$$E_p = E_{p,pes} + E_{p,él} = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}k\left[(L^2 + R^2 + 2LR\cos\theta)^{1/2} - \ell_0\right]^2$$

Numériquement :

$$E_p = 294{,}3\cos\theta + 25\ 000\,((101 + 20\cos\theta)^{1/2} - 12)^2$$



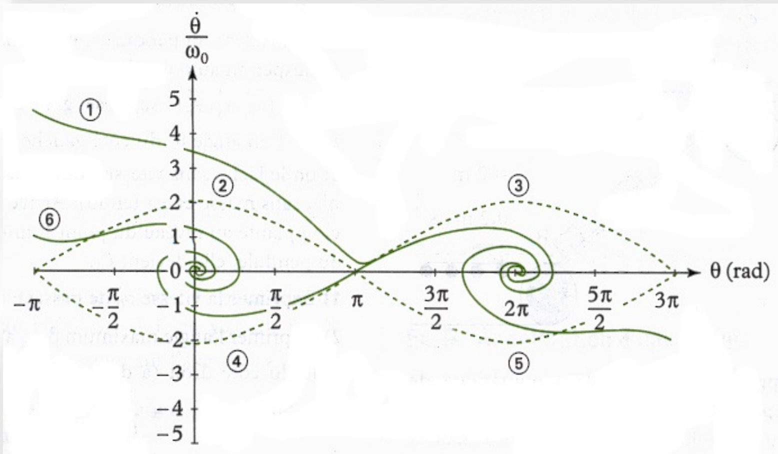
La porte de garage est donc dans une position stable en position haute (porte ouverte) et instable en position basse (porte fermée) ; de cette manière, il est facile d'ouvrir la porte.

➢ 8 - Approche du portrait de phase : (exercice n°6)

On considère un pendule simple de longueur ℓ que l'on écarte sans vitesse initiale de l'angle θ_0 par rapport à la verticale descendante.

Le pendule est soumis à des frottements fluides et son équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + h\,\dot{\theta} + \omega_0^2\,\sin\theta = 0$$



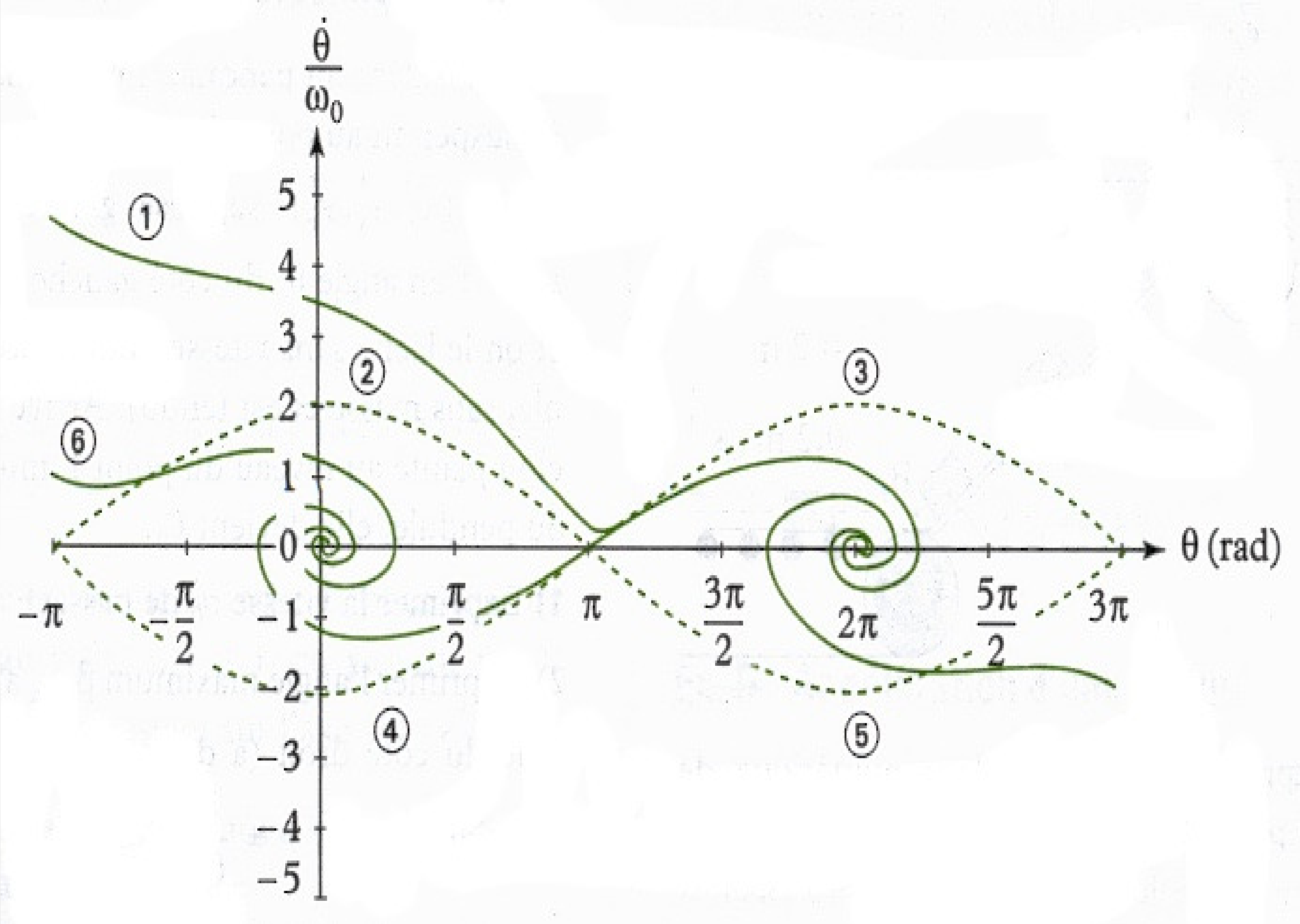
Son portrait de phase est donné sur la figure, avec :

$$\omega_0 = 5\ rad.s^{-1} \quad et \quad h = 0{,}5\ s^{-1}$$

* A quoi voit-on qu'il y a des frottements ?

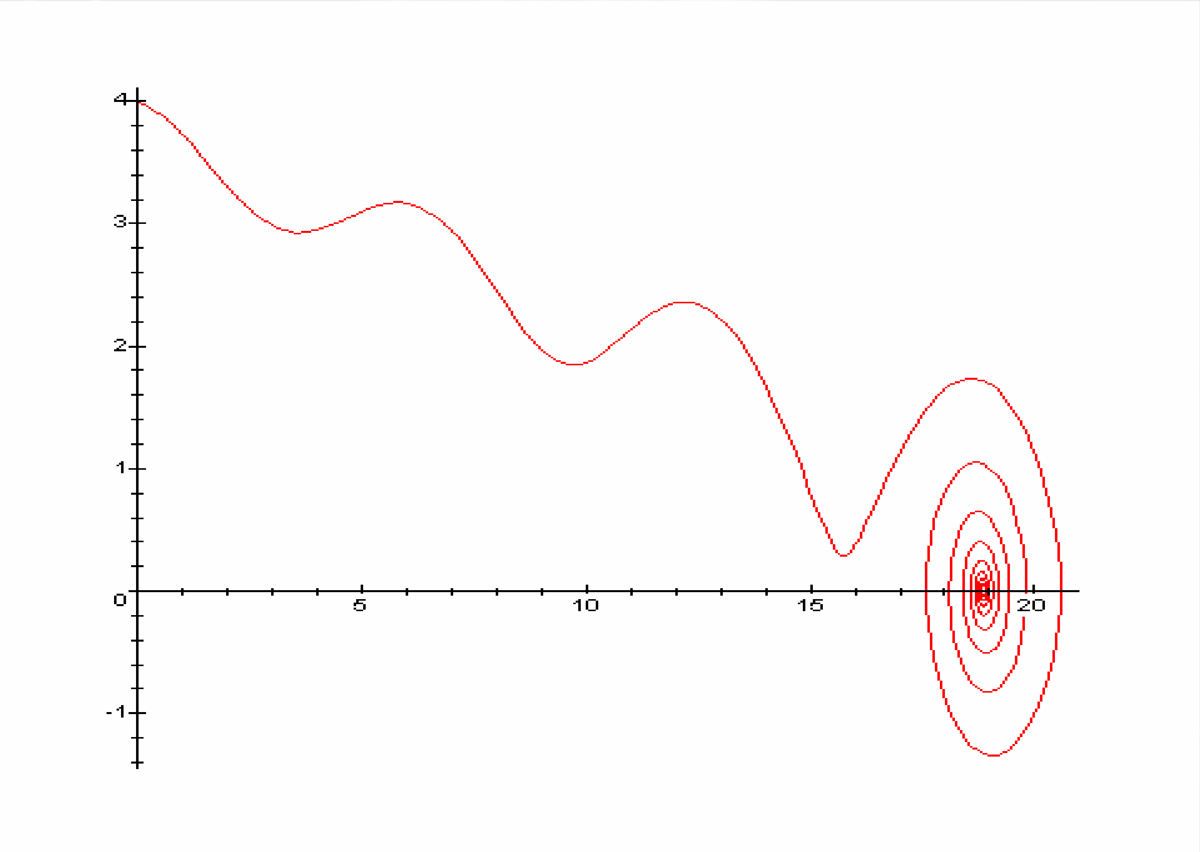
* Indiquer les positions d'équilibre stables et instables.

* Commenter l'allure des différentes courbes.



$\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$
θ (rad)
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
1
2
3
4
5
6

➢ Approche du portrait de phase :



Fichier Maple

(Pendule simple)