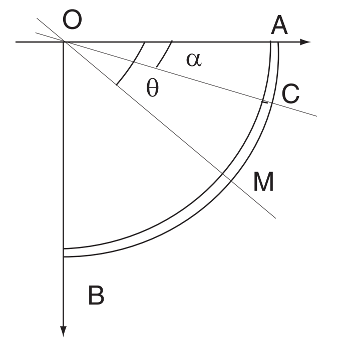
Dynamique des fluides

Sujet 1 : Jet d'eau

De l'eau coule d'un robinet à débit constant. On observe que la section du jet d'eau diminue quand l'altitude diminue, interpréter.

Sujet 2 : Vidange d'un tuyau torique

Un tuyau fixe a la forme d'un quart de tore de centre O, de rayon moyen R et de rayon $a << R$. Il est rempli d'eau de masse volumique μ . A l'instant $t = 0$, on enlève les bouchons situés à ses extrémités A et B et l'eau coule. A l'instant t, on repère le niveau de la surface libre par l'angle $\alpha(t)$ que fait le vecteur OC avec l'horizontale où C est le centre de la surface libre. Un point M quelconque étant repéré par ses coordonnées $(r = R, \theta)$ on suppose que le champ des vitesses est de la forme $\overrightarrow{v(M,t)} = v(\theta, t)\ \overrightarrow{u_\theta}$.



1/ Montrer que v(θ,t) ne dépend pas de θ et exprimer v en fonction de R et α .

2/ Etablir l'équation différentielle du deuxième ordre dont est solution $\alpha(t)$ et commenter. En déduire sans calculs comment la durée τ de vidange varie en fonction de R et g.

Résultat : $\ddot{\alpha}(\pi/2 - \alpha) + g/R \sin\alpha = g/R$.

Sujet 3 : Différence de niveau entre les deux berges d'une rive

On se place à la surface de la terre en un point de latitude ($\lambda = 45°$) et dans le repère local (Ox,Oy,Oz) avec Oz la verticale ascendante. Une rivière coule d'Ouest vers l'Est. L'écoulement est supposé permanent et irrotationnel. L'eau est assimilée à un fluide parfait, de plus incompressible.

1/ Caractériser le champ des vitesses puis des pressions dans le référentiel terrestre en considérant le référentiel géocentrique galiléen.

2/ La rivière ayant une largeur ℓ, évaluer la différence théorique du niveau de l'eau entre les deux berges.

Résultat : $\Delta p = 2\mu\Omega \sin\lambda \ell v = \mu g \Delta z$.

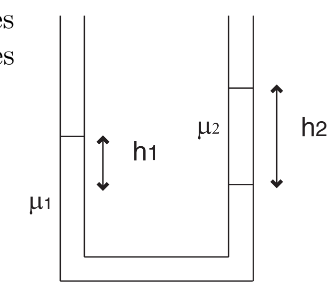
Sujet 4 : Deux fluides immiscibles

Les deux fluides, non miscibles, sont supposés parfaits, incompressibles (masses volumiques μ_1 et μ_2). On notera L la longueur totale du tube occupée par les fluides (la section du tube est constante).

1/ Définir l'état d'équilibre du système.

2/ Etudier le mouvement par rapport à l'équilibre

Résultat : $\omega^2 = \frac{2\mu_1 g}{\mu_1(L-h_2)+\mu_2 h_2}$



Sujet 5 : Régime fluvial et torrentiel

L'eau, fluide incompressible, s'écoule dans un canal de fond horizontal et de section rectangulaire variable (largeur ℓ et hauteur h). Les lignes de courant sont parallèles aux génératrices du canal. La vitesse est supposée uniforme dans une section droite, elle vaut v_o dans la section ℓ_o et h_o .

1/ Montrer que $h + \frac{v^2}{2g} = constante = H$ en régime permanent. Calculer H.

2/ Calculer le débit volumique D en fonction de H, h, g et ℓ. Etudier la fonction D(h), ℓ, ℓ_o et h_o étant fixées.

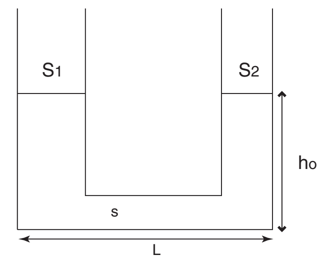
3/ Soit D_m le débit maximal du canal. Montrer graphiquement que, pour une largeur donnée ℓ, il existe deux valeurs h_1 et h_2 possibles correspondant à un même débit $D < D_m$.

4/ Si le canal subit un petit rétrécissement $\Delta\ell << \ell$, dans quel sens évolue h ? Discuter suivant la valeur initiale de h. On parle de régime torrentiel et de régime fluvial. Application aux piles d'un pont.

Sujet 6 : Tube en U avec sections différentes

Le fluide est supposé parfait et incompressible (masse volumique μ). On suppose que $s << S_1$ et S_2. s étant la section du tube horizontal reliant les deux récipients cylindriques de sections respectives S_1 et S_2. L est suffisamment "grand" (à préciser).

Déterminer $z_1(t)$ et $z_2(t)$ dans le cadre des petites oscillations ($z_1(t)$ et $z_2(t) << h_o$).



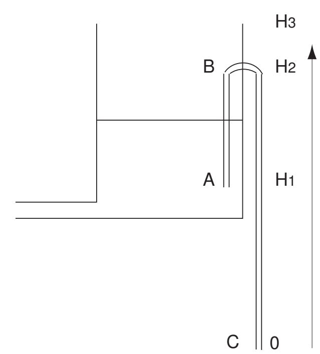
Résultat : $\omega^2 = \frac{sg(1/S_1+1/S_2)}{sh_o(1/S_1+1/S_2)+L}$

Sujet 7 : Vase de Tantale

Un récipient cylindrique (de section S) d'axe vertical est alimenté en eau par l'intermédiaire d'un robinet R de débit volumique D supposé constant mais réglable.On lui adjoint un siphon de vidange représenté par le tube creux recourbé ABC (section du tube égale à s). $S >> s$.

1/ Décrire qualitativement l'évolution du système selon les valeurs de D. On calculera d'abord le débit du siphon.

2/ Dans le cas d'un régime périodique, évaluer la période T des oscillations.

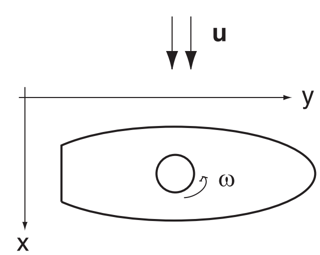


Résultats : $D_{\text{siphon}} = s\sqrt{2gz}$ et le siphon s'amorce en $z = H_2$ et se désamorce en $z = H_1$. Si $D > D_2 = s\sqrt{2gH_2}$, cela déborde ; si $D_2 > D > D_1 = s\sqrt{2gH_1}$, il y a une position d'équilibre ; si $D < D_1 = s\sqrt{2gH_1}$,le régime est périodique, écrire $(D_{\text{siphon}} - D)dt = -dz$ et intégrer.

Sujet 8 : Effet Magnus et voile de Flettner

Un bateau est muni d'un cylindre vertical de rayon R et de hauteur h, tournant autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega} = \omega\ \overrightarrow{e_z}$. L'air est assimilé à un fluide parfait incompressible et le vent souffle à une vitesse uniforme constante $\overrightarrow{u} = u\ \overrightarrow{e_x}$. L'écoulement de potentiel des vitesses $\Phi_1 = u\ cos\theta(\frac{R^2}{r} + r)$ correspond au mouvement du vent autour du cylindre fixe. On rappelle que $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{grad}\Phi_1$. L'écoulement de vitesse $\overrightarrow{v_2} = \frac{C}{2\pi r}\overrightarrow{e_\theta}$ pour $r > R$ correspond à l'effet d'entraînement de l'air par le cylindre en rotation. On supposera dans tout le problème le régime permanent établi et l'écoulement du fluide irrotationnel.

1/ Donner la relation entre la constante C et ω , quand $u = 0$. On remarquera que, dans ce modèle, la vitesse de l'air sur le cylindre est celle du cylindre.



Résultat : $C = 2\pi R^2\omega$.

2/ Sachant que pour $r > R$ le comportement du vent peut être modélisé par la superposition des écoulements caractérisés par $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, calculer, en coordonnées polaires, les composantes de la vitesse du vent. Tracer les lignes de courant correspondant à l'écoulement du à $\overrightarrow{v_1}$ seulement. Prévoir les modifications dues à $\overrightarrow{v_2}$ pour l'écoulement total. Donner l'allure des lignes de courant.

3/ Sachant que, loin du bateau, le vent n'est pas perturbé et que la pression est égale à la pression atmosphérique, déterminer en fonction de l'angle θ , la pression autour du cylindre ($r = R$).

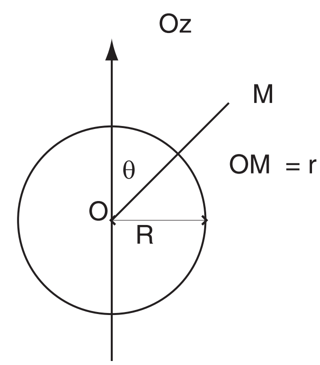
4/ Déterminer les composantes de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le cylindre par unité de hauteur.

Résultat : $-2\pi\mu R^2\omega u\overrightarrow{e_y}$.

Représenter cette force sur la figure où vous avez tracé les lignes de courant et préciser les zones de forte et de basse pression. Ce phénomène s'appelle l'effet Magnus.
5/ Préciser sur un schéma le sens de rotation du cylindre correspondant à une force propulsive. Quelle est l'allure du vent la plus favorable ?
6/ La vitesse du vent est 10 $m.s^{-1}$. La masse volumique de l'air est $1,3\ kg.m^{-3}$. Le cylindre a une hauteur de 5 m et un rayon de 30 cm. La vitesse angulaire a pour valeur $\omega = 30\ rad.s^{-1}$. Calculer la valeur numérique maximale de la force propulsive.
7/ A partir de l'étude précédente, expliquer pourquoi une balle animée d'une vitesse initiale $\overrightarrow{u} = u\ \overrightarrow{e_x}$ par rapport à un référentiel galiléen et d'une vitesse de rotation propre $\overrightarrow{\omega} = \omega\ \overrightarrow{e_z}$ décrit une trajectoire courbe.

Sujet 9 : Paradoxe de d'Alembert

Un fluide parfait (non visqueux), considéré comme infini, incompressible, de masse volumique μ s'écoule de façon non tourbillonnaire autour d'une sphère de centre O et de rayon R, maintenue fixe. Loin de l'obstacle, l'écoulement est caractérisé par le champ des vitesses $v_o(t)\ \overrightarrow{e_z}$.

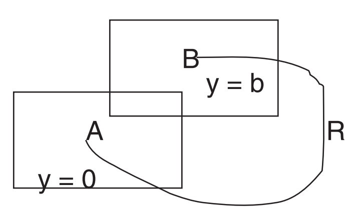


1/ Soit un potentiel de vitessses du type $\Phi(M,t) = (1+\frac{R^3}{2r^3})v_o(t)\ \overrightarrow{e_z}\cdot\overrightarrow{OM}$. En déduire le champ des vitesses.
2/ Démontrer que $\mu\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} + \mu v^2/2 + p + \mu g z$ est un invariant spatial à t fixé mais quelconque.
3/ En déduire le champ de pressions au sein du fluide.
4/ Calculer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la sphère.
5/ Que devient cette résultante lorsque $v_o(t)$ est en fait indépendant de t ?
6/ Comment résoudre ce paradoxe dit de d'Alembert, au vu de ce que l'on a appris dans le cours sur la traînée linéaire ou quadratique d'une sphère dans un écoulement fluide ?
7/ Pour retrouver la force de traînée de Stokes, on considère un fluide réel et on propose le champ des vitesses : $v_r(M,t) = (1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3})v_o\cos\theta$ et $v_\theta(M,t) = -(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3})v_o\sin\theta$. On admet que $P = P_o - \frac{3\eta R v_o\cos\theta}{2r^2}$.
En déduire que la résultante des forces de pression n'est pas nulle selon $\overrightarrow{e_z}$ $(2\pi\eta R v_o)$. Mais il faut aussi tenir compte de la projection de la force de viscosité sur $\overrightarrow{e_z}$. On exprimera la contrainte tangentielle sur la sphère, $\eta\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}2\pi R^2\sin\theta d\theta\overrightarrow{e_\theta}$, on la projettera et on intègrera.

Montrer que la force totale que subit la sphère est : $6\pi\eta R\overrightarrow{v_o}$. Interpréter et en déduire la traînée de Stokes.

Sujet 10 : Convertisseur magnétohydrodynamique nécessite d'avoir fait l'induction

Un fluide conducteur, localement neutre, de conductivité γ , s'écoule dans une canalisation cylindrique d'axe Ox, de longueur a, de section rectangulaire b et c selon $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$, plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B} = B\ \overrightarrow{u_z}$ créé par des sources non représentées.



L'écoulement est supposé parfait, incompressible de masse volumique μ , stationnaire et unidimensionnel ; il est décrit par le champ de pression $P(x)$ et le champ des vitesses $\overrightarrow{v} = v(x)\ \overrightarrow{u_x}$. Les faces $y = 0$ et $y = b$ de la canalisation sont métalliques et reliées par une résistance R ; on note I l'intensité du courant traversant R de

B vers A et $U = V_A - V_B$ la différence de potentiel entre ses bornes. On note $\overrightarrow{E} = E(x, y)\ \overrightarrow{u_y}$ le champ électrique dans le conducteur et on néglige le champ propre du conducteur par rapport au champ $\overrightarrow{B}$ créé par les sources. On rappellera l'expression de la force de Laplace subie par un élément de volume.

1/ Ce dispositif, appelé convertisseur magnétohydrodynamique, peut être utilisé comme générateur électrique ; expliquer qualitativement son principe de fonctionnement. Expliquer comment on pourrait le transformer en pompe en remplaçant la résistance R par un générateur de tension.

2/ Montrer que v ne dépend pas de x et que E ne dépend pas de y. Exprimer la fém induite e_{AB} en fonction de v, B et b. En déduire que E(x) ne dépend pas de x.

3/ Exprimer d'autre part l'intensité I en fonction de E(x) et en déduire l'expression de U en fonction de I. On posera $r = b/\gamma ac$ et on interprétera r. Exprimer la puissance P_e reçue par R en fonction de B, v, b, R et r ; déterminer ensuite la valeur de R pour laquelle cette puissance est maximale (Indication : écrire la loi d'ohm locale et l'intégrer).

4/ Etablir l'expression de la différence de pression $P(x = a) - P(x = 0)$ en fonction de I, B et c. (Indication : écrire l'équation de la statique des fluides dans le référentiel du conducteur).

En déduire la puissance mécanique P_m reçue par le fluide contenu dans la canalisation en fonction de B, b, v, R et r. Comment le rendement $\frac{P_e}{P_m}$ du convertisseur évolue-t-il avec R ? Commenter en liaison avec la question 3).

Résultats : $U = -e_{AB} + ri = -Ri$, $P_e = Ri^2$ maximum pour $r = R$ et $P_m = (P(x = a) - P(x = 0))bcv$. Le rendement vaut $\frac{P_e}{P_m} = \frac{R}{R+r}$.

Sujet 11 : Oscillations d'une bulle de gaz

Déterminer la pulsation des petites oscillations d'une bulle de gaz de rayon $R(t) = R_o + a(t)$, immergée dans un fluide parfait, incompressible, homogène occupant tout l'espace. Le gaz est parfait. On néglige capillarité et pesanteur. P_o est la pression en tout point de l'espace à l'équilibre du fluide.

Un peu d'aide : on fait l'hypothèse que l'évolution du gaz est isentropique. On exprime la conservation de la masse ($D_v = f(t)$ avec $\overrightarrow{v} = v(r, t)\overrightarrow{u}_r$). Ecrire l'équation d'Euler locale ($\overrightarrow{rot}v(r, t)\overrightarrow{u}_r = \overrightarrow{0}$), l'intégrer et établir une équation différentielle en a. Résultat : $\omega^2 = \frac{3\gamma P_o}{\mu_l R_o^2}$.