Cinématique des fluides

Sujet 1 : Approches eulérienne et lagrangienne
Ecoulement non permanent $v_x = b$ et $v_y = a \cos \omega t$. On prendra $\omega = 2\pi\ rad/s$, $b = 1\ m/s$ et $a = 2\pi\ m/s$.
Etude lagrangienne Déterminer les trajectoires des écoulements. On prendra $X_o = 0$ et $Y_o = -1,01\ m$. Les tracer sur un graphique. Calculer l'accélération des particules fluides.
Etude eulérienne Déterminer les équations des lignes de courant pour les instants $t = 0$, $t = 0,5\ s$ et $t = 1\ s$. Les tracer sur le graphique précédent. Déduire du tracé des lignes de courant la valeur de l'accélération convective. En utilisant la formule du cours, calculer l'accélération des particules fluides. Comparer. Caractériser l'écoulement.

Sujet 2 : Houle irrotationnelle et incompressible
Un écoulement marin est caractérisé par un écoulement cylindrique, incompressible, irrotationnel de potentiel $\Phi = f(z)\ sin(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda})$ où l'axe Oz est un axe vertical ascendant.
1/ Déterminer la forme générale de la fonction f(z).
2/ Le fond de la mer étant impénétrable, rigide et plan et la vitesse étant horizontale au fond de la mer $z = -h$, en déduire le champ des vitesses.
3/ Dans le modéle de houle en eau profonde, on considére h comme infini. Recalculer dans ces nouvelles conditions le potentiel des vitesses et le champ de vitesses.
4/ Déterminer, dans les conditions de la question précédente, la trajectoire de la particule qui se trouve au repos avant le passage de la houle au point de coordonnées (x_0, y_0, z_0), dans l'hypothèse d'un petit mouvement particulaire.
Réponses : 1/ $f(z) = A \exp^{-\frac{2\pi z}{\lambda}} + B \exp^{\frac{2\pi z}{\lambda}}$ 3/ $A = 0$ 4/ $v_x = -\frac{2\pi}{\lambda} B \exp^{\frac{2\pi z_o}{\lambda}} \cos(\omega t - \frac{2\pi x_o}{\lambda})$ et $v_z = \frac{2\pi}{\lambda} B \exp^{\frac{2\pi z_o}{\lambda}} \sin(\omega t - \frac{2\pi x_o}{\lambda})$, trajectoire circulaire.

Sujet 3 : Ecoulement de Hubble
Un fluide est supposé remplir tout l'espace, supposé de centre fixe O. Chaque particule est identifiée par sa position M_0 à la date $t = 0$ et possède une vitesse initiale radiale $\overrightarrow{v_0} = H\ \overrightarrow{OM_0}$. H est une constante réelle positive (constante de Hubble). Chaque particule conserve au cours du temps sa vitesse vectorielle initiale.
1/ Déterminer le champ eulérien des vitesses et le champ des accélérations (de deux façons).
2/ On suppose le fluide homogéne à tout instant. Déterminer $\mu(t)$ en fonction de μ_0. Redécouvrir l'équation locale de conservation de la masse. On donne la divergence en coordonnées sphériques : $div(a_r \overrightarrow{u_r}) = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r}$.
Réponses : 1/ $r = r_o + vt$, $v = Hr_o = H(r - vt)$ d'où $v(r,t) = \frac{Hr}{1+Ht}$, l'accélération est nulle. 2/ $\mu(t) = \mu_o \frac{r_o^3}{r^3} = \mu_o \frac{1}{(1+Ht)^3}$

Sujet 4 : Erosion, sédimentation et méandres
On considére un écoulement stationnaire, non visqueux, incompressible, bidimensionnel, irrotationnel, à potentiel Φ de la forme $\Phi = \Phi(r, \theta)$, écoulement dans un diédre compris entre les plans $\theta = 0$ et $\theta = \alpha$.
1/ On cherche à résoudre ce probléme ($\Delta\Phi = 0$) par une méthode de séparation des variables, en cherchant sous la forme $f(r)g(\theta)$. Déterminer l'expression nécessaire de $g(\theta)$ et chercher les monômes en r solutions pour $f(r)$.
2/ Φ n'est pas unique, on choisit $\Phi(r,\theta) = C \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}}$. Déterminer v_r et v_θ. Commenter l'allure des lignes de courant données au verso.
3/ Distinguer les cas $\alpha < \pi$ et $\alpha > \pi$. Donner des éléments d'explication à l'érosion et à la sédimentation. Pourquoi, vus de haut, les méandres des fleuves sont-ils doux ?

On donne le laplacien pour un champ scalaire $f(r,\theta,z)$ en cordonnées cylindriques : $\Delta f(r,\theta,z) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\frac{\partial f}{\partial r})}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Sujet 5 : Ecoulement fluide potentiel

Deux murs ($x = 0$, $y > 0$) et ($y = 0$, $x > 0$), fluide parfait, homogène et incompressible de masse volumique μ dans la zone ($x > 0$, $y > 0$) et la source est radiale et stationnaire, rectiligne, isotrope selon la parallèle à l'arête du dièdre formé par les deux murs, source S en $x = a$ et $y = b$. On considère que l'on a un écoulement potentiel et on note D, le débit volumique par unité de hauteur de la source.
1/ Donner une équation vérifiée par le potentiel. Donner les conditions limites de la vitesse imposées par les mur. Proposer une superposition (sans les murs) de sources (identiques) de manière à avoir les mêmes conditions limites qu'avec les murs.
2/ Pour une seule source, donner en coordonnées cylindriques, le champ de vitesse. Montrer alors que la superposition des sources donne bien un écoulement potentiel.
3/ Sachant qu'il y a unicité de la solution pour l'équation de Laplace, déterminer le potentiel des vitesses (lorsqu'il y a les quatre sources superposées).