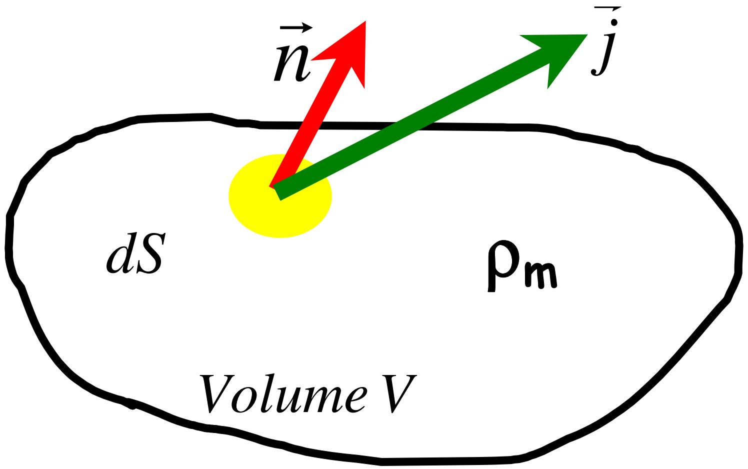
Equations locales de l'électromagnétisme

Chapitre 4

Equations locales de l'électromagnétisme

I) Equation locale de conservation de la charge :

On considère un volume V délimité par une surface fermée S (fixe dans le référentiel d'étude).



Soit ρ_m la densité volumique de charges mobiles dans le milieu. La charge totale Q(t) comprise dans le volume à l'instant t vaut : $Q(t)=\iiint_{(V)}\rho_m d\tau$

La conservation de la charge électrique permet d'écrire :

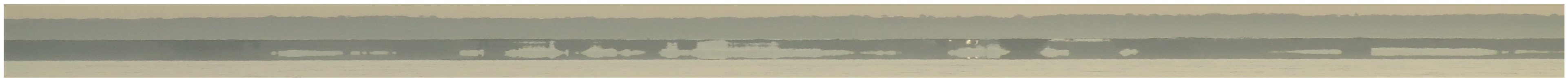
$$\frac{dQ}{dt}=-i(t)\quad \text{à travers } S$$

Par conséquent :

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_{(V)}\rho_m(M,t)\,d\tau\right)=-\oiint_{(S)}\vec{j}.\vec{n}\,dS$$

Le volume (V) étant fixe :

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_{(V)}\rho_m(M,t)\,d\tau\right)=\iiint_{(V)}\frac{\partial\rho_m(M,t)}{\partial t}\,d\tau$$



Finalement, le principe de conservation de la charge conduit à

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial \rho_m(M,t)}{\partial t}\, d\tau = -\oiint_{(S)} \vec{j}.\vec{n}\ dS$$

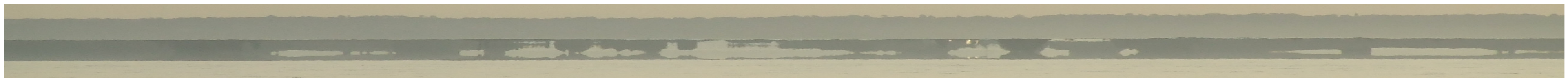
En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial \rho_m(M,t)}{\partial t}\, d\tau = -\iiint_{(V)} div\vec{j}\ d\tau \qquad \text{soit} \qquad \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial \rho_m(M,t)}{\partial t} + div\vec{j} \right) d\tau = 0$$

Ce résultat étant vrai pour tout volume (V), il vient :

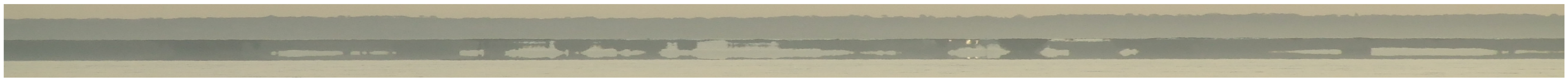
$$\frac{\partial \rho_m(M,t)}{\partial t} + div\vec{j} = 0$$

C'est l'équation locale de conservation de la charge électrique.



* Remarque : une telle forme d'équation se retrouve couramment lorsque l'on fait le bilan d'une grandeur scalaire extensive qui, en l'absence de sources, obéit à un principe de conservation :

- Conservation de l'énergie EM (vecteur de Poynting)
- Conservation de la masse (en mécanique des fluides)
- Equations de la diffusion et de la chaleur (phénomènes de transport).



* Densité de courant et intensité en régime permanent :

On a alors $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et donc $div\ \vec{j} = 0$.

On en déduit :

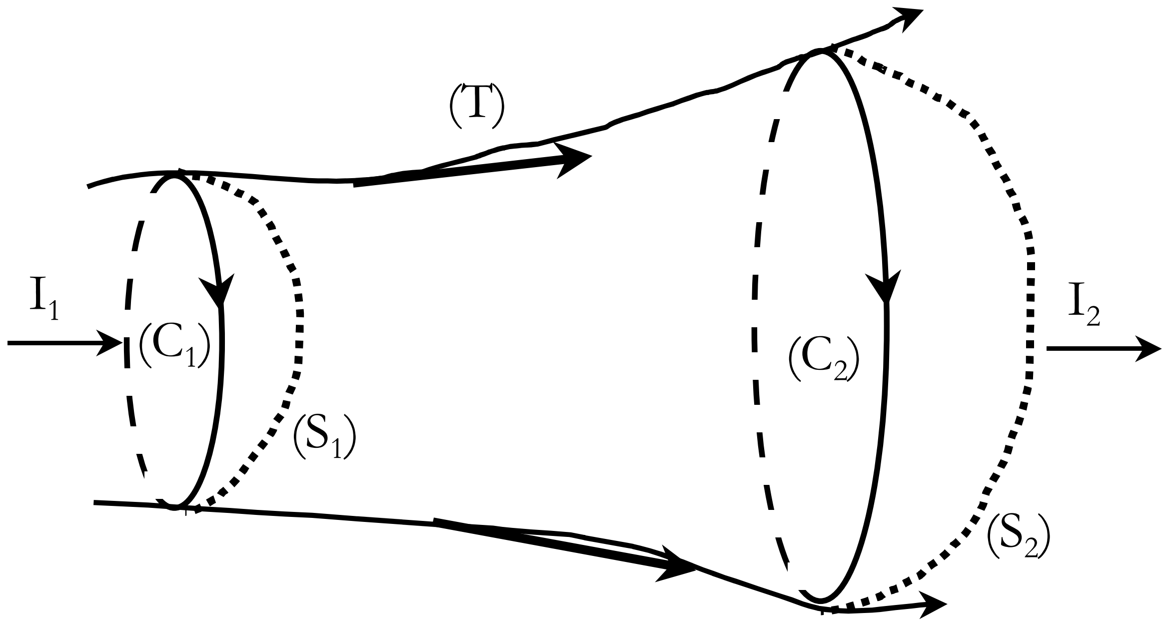
- L'intensité totale qui sort d'une surface fermée (S) quelconque est nulle en régime permanent :

$$i = \oiint_{(S)} \vec{j}.\vec{n}\ dS = \iiint_{(V)} div\ \vec{j}.d\tau = 0$$

- En régime permanent, l'intensité a même valeur à travers toutes les sections d'un même tube de champ.

En effet :

On considère une surface fermée (S) constituée par un tube de champ (T) du champ $\vec{j}$ (appelé tube de courant) et deux surfaces (S_1) et (S_2) s'appuyant sur deux contours de même orientation tracés sur (T) et soient I_1 et I_2 les intensités, flux de $\vec{j}$ respectivement à travers (S_1) et (S_2).



$$\oiint_{(S)} \vec{j}.\vec{n}\; dS = 0 = -I_1 + I_2 + \iint_{(T)} \vec{j}.\vec{n}\; dS = -I_1 + I_2$$

Soit :

$$I_1 = I_2 = I$$

En régime permanent, l'intensité du courant électrique prend la même valeur dans toute section d'une branche de circuit. On peut également en déduire la loi des nœuds (conservation du flux du vecteur densité de courant).

II) Equations de Maxwell :

Dans la théorie de Maxwell, l'interaction entre deux particules est transmise par l'intermédiaire de modifications de proche en proche du champ EM.

Cette propagation de l'interaction par l'intermédiaire du champ EM se fait précisément sous forme d'ondes EM avec la célérité c.

Pour se représenter l'interaction de deux particules dans le cadre d'une théorie de champ, une image possible est celle de deux bouchons A et B flottant sur l'eau et initialement immobiles.

Une oscillation verticale de A engendre des oscillations de l'eau qui se transmettent de proche en proche dans toutes les directions jusqu'à ce qu'elles atteignent B qui est alors mis en mouvement.

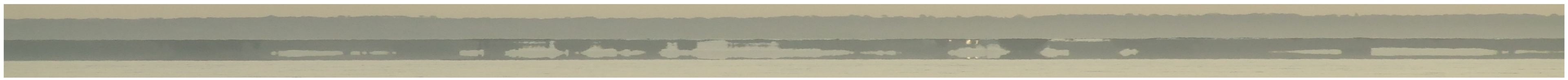
Les équations de Maxwell sont des équations locales qui expriment des relations entre le champ EM $(\vec{E}, \vec{B})$ et ses sources $(\rho, \vec{j})$:

$$div\ \vec{B} = 0 \qquad (Equation\ du\ flux\ magnétique - Flux)$$

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (Equation\ de\ Maxwell - Gauss - MG)$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (Equation\ de\ Maxwell - Faraday - MF)$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (Equation\ de\ Maxwell - Ampère\ - MA)$$



* Les équations de Maxwell et la conservation de la charge :

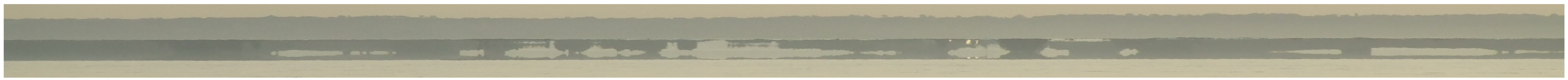
- Les équations de Maxwell contiennent le principe de conservation de la charge. En effet, si l'on prend la divergence de l'équation de MA :

$$div(\overrightarrow{rot}\ \vec{B}) = 0 = \mu_0 div\ \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 div \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 div\ \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(div \vec{E}\right) = \mu_0 \left(div\ \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

Soit :

$$div\ \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ainsi, il n'est pas nécessaire d'ajouter la conservation de la charge aux postulats de l'EM dans la mesure où celle-ci découle des équations de Maxwell.



- Nécessité du courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

En régime quelconque, on pose $\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)$. Alors :

$$div\ \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} div(\overrightarrow{rot}\vec{B}) - div\ \vec{j}_D = -div\ \vec{j}_D$$

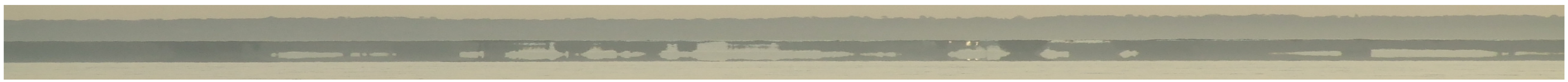
Soit encore, si l'on veut respecter le principe de conservation de la charge :

$$div\ \vec{j} = -div\ \vec{j}_D = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En utilisant l'équation de MG :

$$-div\ \vec{j}_D = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 div\ \vec{E}\right) \quad \text{soit} \quad div\left(\vec{j}_D - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

La solution la plus simple de cette équation correspond bien au choix du courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.



*** Les équations de propagation du champ EM :**

Soit une distribution (D) de charges localisées autour d'un point O, dont les densités sont fonction du temps (exemple : une antenne métallique).

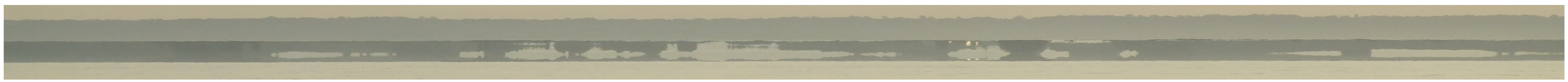
Selon les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère, cette distribution (D) est la source de champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ variables dans le temps qui vont s'établir dans tout le voisinage de O.

Un point M de ce voisinage, bien que situé en dehors de (D), est lui-même source de champs en raison des termes en $\partial\vec{B}/\partial t$ et $\partial\vec{E}/\partial t$ « provenant de O » qui jouent un rôle de sources dans les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère.

Les points P du voisinage de M sont à leur tour dans leur propre voisinage des sources de champs variables dans le temps …

On conçoit ainsi que le champ EM se propage en faisant penser à des rides se transmettant de proche en proche à la surface de l'eau.

« Le couplage qui est introduit dans les équations de Maxwell par la présence des deux dérivées partielles par rapport au temps $\partial\vec{B}/\partial t$ et $\partial\vec{E}/\partial t$ est à l'origine du phénomène de propagation du champ EM. »



Obtention des équations de propagation du champ EM :

On calcule le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{B}\right)$$

Or :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\ \vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$$

Avec $div\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, il vient :

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Soit, finalement :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\overrightarrow{grad}\ \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

De manière symétrique, on élimine E au profit de B en calculant le rotationnel de MA :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{B}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\ \vec{B}\right) - \Delta\vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{rot}\ \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{E}\right)$$

Soit :

$$\overrightarrow{grad}(0) - \Delta\vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{rot}\ \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

Finalement :

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{rot}\ \vec{j}$$

Dans une région sans charges ni courants ($\rho = 0 \ et \ \vec{j} = \vec{0}$) :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad et \qquad \Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Ces équations sont les équations de propagation du champ EM. Si l'on note s(t) l'une des six coordonnées des champ EM (E_x,…., B_x,…), alors :

$$\Delta s - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \qquad soit \qquad \Delta s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \qquad (\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0\mu_0)$$

C'est l'équation de d'Alembert (équation classique de propagation des ondes, encore appelée équation des cordes vibrantes) établie au XVIII^{ème} siècle pour modéliser les vibrations d'une corde tendue. Comme le montre le paragraphe suivant, les solutions de cette équation traduisent un phénomène de propagation de célérité v.

* Changement de référentiel :

Soit, dans le référentiel du laboratoire (R), un faisceau de protons de densité particulaire n homogène, d'axe (Oz) et de rayon a. Le faisceau est dit homocinétique lorsque toutes les particules ont la même vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u}_z$.

Une étude de symétries conduit à (dans le référentiel du laboratoire) :

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r \qquad et \qquad \vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$$

On se place maintenant dans le référentiel (R') lié aux charges, c'est-à-dire se déplaçant en translation rectiligne par rapport à (R) à la vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u}_z$. Les charges, immobiles, ne créent pas de champ magnétique ($\vec{B}' = \vec{0}$) et ne subsiste donc q'un champ électrique $\vec{E}'$.

Cet exemple simple illustre le fait que le champ EM dépend du référentiel considéré.

Formule de changement de référentiel :

Soit $\vec{v}$ la vitesse d'une particule de charge q dans un référentiel (R) et soit $\vec{v}'$ sa vitesse dans un référentiel (R') animé de la vitesse $\vec{v}_e$ par rapport à (R).

La force de Lorentz doit être identique dans les deux référentiels (principe d'invariance de la force en mécanique newtonienne), par conséquent :

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) = q\left(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'\right)$$

On utilise la relation de composition des vitesses :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

Alors :

$$\vec{E} + (\vec{v}' + \vec{v}_e) \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'$$

Soit :

$$\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}' \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'$$

On est donc amené à poser : (expressions de changement de référentiels galiléens du champ EM)

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \qquad et \qquad \vec{B} = \vec{B}'$$

III) Contenus physiques des équations de Maxwell :

Ce paragraphe permet de montrer que les équations « locales » de Maxwell donnent, par intégration, des lois et théorèmes connus qui peuvent être vérifiés expérimentalement.

- Equation de Maxwell-Gauss et théorème de Gauss :

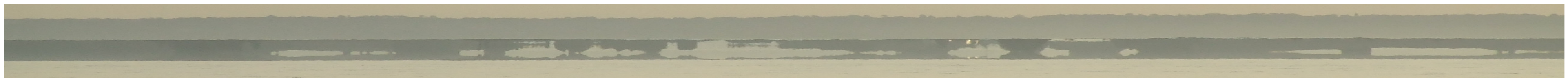
On part de l'équation de MG :

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

afin de calculer le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée (S) :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}.\vec{n}\ dS = \iiint_{(V)} div\ \vec{E}.d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{(V)} \rho.d\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Le théorème de Gauss apparaît ainsi encore valable en EM, même si les charges électriques peuvent être en mouvement.



En régime permanent, les sources du champ électrique sont les charges caractérisées par la densité ρ. Les lignes de champ divergent à partir des charges positives à la manière d'un fluide sortant d'une véritable source et disparaissent sur les charges négatives comme un fluide dans un puits.

Tel est encore le cas en régime non permanent, à la différence près que (voir conséquence de l'équation de Maxwell-Faraday), ρ n'est plus la seule source du champ électrique, de telle sorte que les cartes de champ électrique n'ont plus nécessairement la même allure.

Equation de Maxwell-Ampère et théorème d'Ampère « généralisé » :

On calcule la circulation à un instant donné du champ magnétique le long d'un contour (C) sur lequel s'appuie une surface (S) et on utilise l'équation de MA :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Il vient :

$$\oint_{(C)} \vec{B}.d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\ \vec{B}.\vec{n}\ dS = \iint_{(S)} \left(\mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) . \vec{n}\ dS$$

On reconnaît :

$$i = \iint_{(S)} \vec{j}.\vec{n}\ dS$$

l'intensité qui traverse (S). On peut noter que, en régime non permanent, cette grandeur ne dépend pas seulement de (C) mais de la surface (S) car $\vec{j}$ n'est plus à flux conservatif.

Alors : (théorème d'Ampère généralisé)

$$\oint_{(C)} \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_0 \left[i + \iint_{(S)} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\vec{n}\, dS \right]$$

où le terme :

$$i_D = \iint_{(S)} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\vec{n}\, dS$$

s'interprète comme le flux du courant de déplacement à travers la surface (S).

Ainsi, en régime non permanent, les sources du champ magnétique sont de deux natures : les courants « réels » et le courant de déplacement qui provient de la dépendance temporelle du champ électrique.

En régime permanent, on retrouve bien évidemment le théorème d'Ampère classique :

$$\oint_{(C)} \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_0 i$$

Equation du flux magnétique et champ magnétique à flux conservatif :

L'équation locale :

$$div\ \vec{B} = 0$$

permet de montrer que :

$$\oiint_{(5)} \vec{B}.\vec{n}\ dS = \iiint_{(V)} div\ \vec{B}.d\tau = 0 \qquad soit \qquad \oiint_{(5)} \vec{B}.\vec{n}\ dS == 0$$

Le champ magnétique est à flux conservatif. Par conséquent :

* Le flux magnétique se conserve à chaque instant à travers toute section d'un tube de champ magnétique : $\Phi_1 = \Phi_2$.

* Il est possible de définir le flux magnétique Φ qui traverse un contour (C) sans avoir à préciser la surface (S) qui s'appuie sur celui-ci.

- Equation de Maxwell-Faraday et loi de Faraday :

On évalue la circulation e du champ électrique le long d'un contour (C) fermé sur lequel s'appuie une surface (S) et on utilise l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\oint_{(C)} \vec{E}.d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\ \vec{E}.\vec{n}\ dS = \iint_{(S)} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right).\vec{n}\ dS = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{(S)} \vec{B}.\vec{n}\ dS\right)$$

Soit :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}.d\vec{\ell} \qquad ; \qquad \Phi = \iint_{(S)} \vec{B}.\vec{n}\ dS$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

En régime permanent :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}.d\vec{\ell} = 0 \qquad (et\ \overrightarrow{rot}\ \vec{E} = \vec{0})$$

Le champ électrique permanent est à circulation conservative. On peut définir un potentiel scalaire tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V$$

En régime non permanent : la circulation e du champ s'identifie à la fém qui est induite sur (C). On démontre ainsi la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

dégagée expérimentalement par Faraday en 1831.

La circulation du champ E n'est plus nulle : un champ magnétique variable dans le temps est source d'un champ électrique à circulation non conservative.

IV) Existence de potentiels ($\vec{A}$,V), jauge de Lorentz, cas de l'ARQS :

1 – Rappels mathématiques :

Un champ égal à un gradient a un rotationnel nul et un champ égal à un rotationnel a une divergence nulle :

$$\vec{e} = \overrightarrow{grad}\ \varphi \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{rot}\ \vec{e} = \vec{0}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{rot}\ \vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad div\ \vec{b} = \vec{0}$$

Réciproquement, on peut montrer que :

- Si un champ vectoriel a un rotationnel nul, il existe au moins un champ scalaire dont il est le gradient.
- Si un champ vectoriel a une divergence nulle, il existe au moins un champ vectoriel dont il est le rotationnel.

2 – Définition des potentiels ($\vec{A}$,V) :

L'équation de Maxwell-flux :

$$div\ \vec{B} = 0$$

et la propriété précisée ci-dessus permettent de définir un champ vectoriel $\vec{A}$ (appelé potentiel vecteur) tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\ \vec{A}$$

Si l'on introduit cette relation dans l'équation de Maxwell-Faraday, il vient :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\ \vec{A}) \qquad soit \qquad \overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Il existe donc au moins un champ scalaire que l'on notera – V (V est appelé potentiel scalaire) tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \overrightarrow{grad}\,(-V) = -\overrightarrow{grad}\,V \qquad soit \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dans le cas du régime permanent $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$, on retrouve l'expression classique $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$.

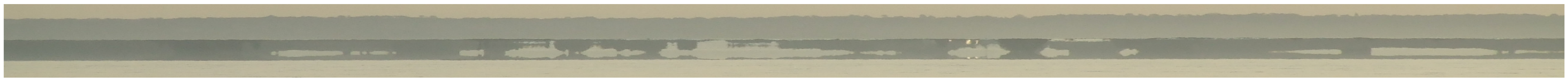
Non unicité du couple de potentiels :

On suppose que, pour un champ EM donné, on dispose de deux couples ($\vec{A}_0$, V_0) et ($\vec{A}$, V) de potentiels. Alors :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}_0 = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} \qquad soit \qquad \overrightarrow{rot}\,(\vec{A} - \vec{A}_0) = \vec{0}$$

Par conséquent, en notant $\varphi(\vec{r},t)$ un champ scalaire quelconque :

$$\vec{A} - \vec{A}_0 = \overrightarrow{grad}\,\varphi \qquad soit \qquad \vec{A} = \vec{A}_0 + \overrightarrow{grad}\,\varphi$$



Le potentiel vecteur $\vec{A} = \vec{A}_0 + \overrightarrow{grad}\,\varphi$ (où $\varphi(\vec{r},t)$ désigne un champ scalaire quelconque) convient également : le potentiel vecteur est défini à un gradient près.

De même, pour le potentiel scalaire :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V_0 - \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad soit \qquad \overrightarrow{grad}\,(V - V_0) = -\frac{\partial(\vec{A} - \vec{A}_0)}{\partial t}$$

Soit :

$$\overrightarrow{grad}\,(V - V_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = 0$$

Après intégration, la fonction additive du temps qui s'introduit est mise sous forme d'une dérivée par rapport au temps :

$$V - V_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

Finalement, en posant $\psi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) - F(t)$:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0(\vec{r},t) + \overrightarrow{grad}\ \psi(\vec{r},t) \qquad et \qquad V(\vec{r},t) = V_0(\vec{r},t) - \frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Il existe donc une infinité de couples de potentiels vecteurs : faire le choix d'un d'entre eux est faire un choix de jauge (il existe une infinité de jauges). On dit qu'il y a indétermination de jauges.

Le champ EM est par contre invariant de jauge ; lui seul a un sens physique alors que les potentiels sont seulement un moyen mathématique d'expression des champs (en mécanique classique).

3 - Potentiels permanents :

En régime permanent, les équations de Poisson se réécrivent sous la forme :

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \qquad \text{et} \qquad \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cette dernière équation a pour solution la solution bien connue (loi de Coulomb pour le potentiel électrostatique) :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S)}{SM} d\tau$$

(On note M le point où l'on calcule le potentiel, S un point source de la distribution (D) de charges, r = SM et $\vec{r} = \overrightarrow{SM} = r\,\vec{u}$).

Chaque composante A_x, A_y et A_z vérifient la même équation que V ; par conséquent :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S)}{SM} d\tau$$

On peut montrer que la condition de jauge de Lorentz est bien vérifiée, c'est-à-dire que :

$$div\ \vec{A} = 0$$

On peut alors en déduire la formule de Biot et Savart donnant le champ magnétique. On évalue :

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\ \vec{A}(M) = \overrightarrow{rot}\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S)}{SM} d\tau \right)$$

Soit :

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}\ \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \overrightarrow{rot_M}\left(\frac{\vec{j}(S)}{SM} \right) d\tau$$

Or : ($\overrightarrow{rot}\,(f\vec{A}) = \overrightarrow{grad}\ f \wedge \vec{A} + f\ \overrightarrow{rot}\ \vec{A}$)

$$\overrightarrow{rot}_M\left(\frac{\vec{j}(S)}{SM}\right) = \overrightarrow{grad}_M\left(\frac{1}{SM}\right) \wedge \vec{j}(S) + \frac{1}{SM}\,rot_M\,(\vec{j}(S))$$

$$\overrightarrow{rot}_M\left(\frac{\vec{j}(S)}{SM}\right) = -\frac{1}{SM^2}\vec{u} \wedge \vec{j}(S)$$

D'où la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} -\frac{1}{SM^2}\vec{u} \wedge \vec{j}(S)\ d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S) \wedge \vec{u}}{SM^2}\ d\tau$$

Et, dans le cas d'un circuit filiforme (avec l'expression formelle $\vec{j}d\tau = id\vec{\ell}$) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{(C)} \frac{i\ d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{SM^2}$$

- **Etude d'un exemple à symétrie cylindrique ; Détermination d'un potentiel vecteur :**

Un fil rectiligne infini est modélisé par un tube de courant d'axe (Oz) et de rayon a, parcouru par le courant volumique uniforme $\vec{j} = j\,\vec{u}_z$. On souhaite déterminer un potentiel vecteur associé au champ magnétique créé par le fil.

Des considérations de symétrie et l'application du théorème d'Ampère en régime permanent conduit facilement à :

Si r < a : $$\vec{B} = \mu_0 j \frac{r}{2}\,\vec{u}_\theta$$

Si r > a : $$\vec{B} = \mu_0 j \frac{a^2}{2r}\,\vec{u}_\theta$$

L'expression :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S)}{SM}\,d\tau$$

montre que le potentiel vecteur possède des propriétés de symétrie semblables à celles du champ électrique (c'est un « vrai » vecteur).

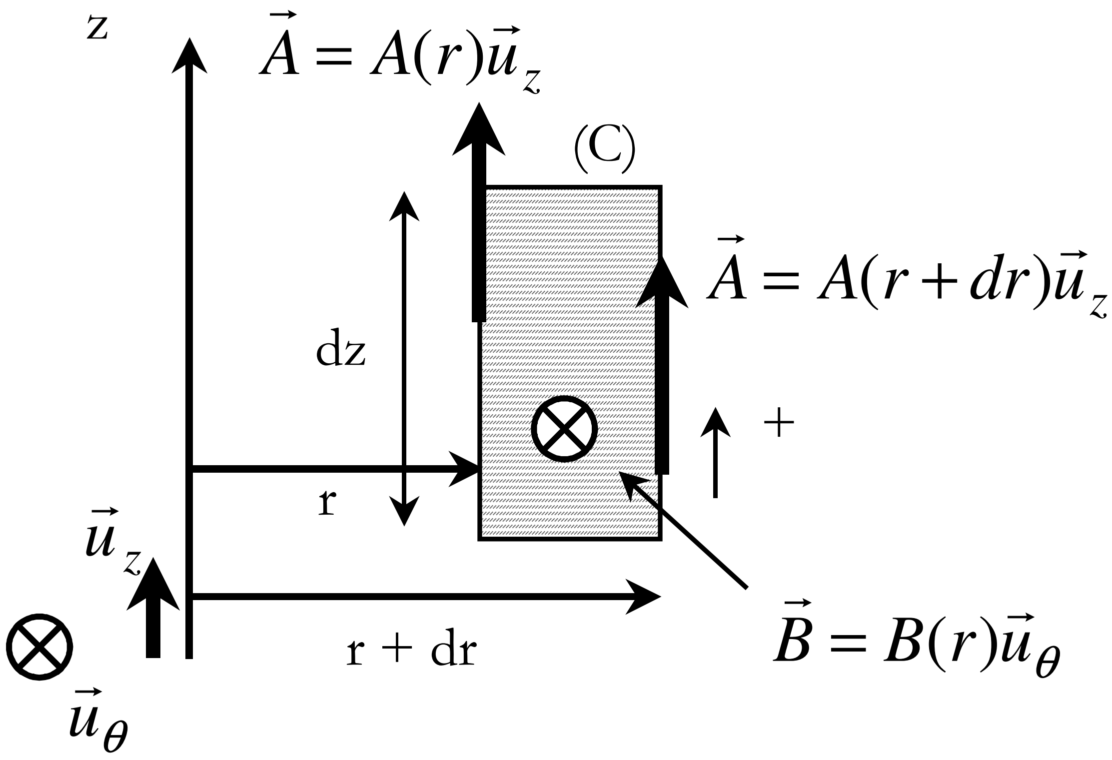
Par conséquent, le plan contenant le point M et perpendiculaire au fil étant un plan d'antisymétrie, on peut écrire que :

$$\vec{A}(M) = A(r)\,\vec{u}_z$$

La relation $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$ appliquée sous forme intégrale à un contour (C) sur lequel s'appuie une surface (S) s'écrit :

$$\oint_{(C)} \vec{A}.d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \vec{B}.\vec{n}\,dS$$

avec, ici, $\vec{A}(M) = A(r)\,\vec{u}_z$ et $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u}_\theta$. Le choix du contour (C) et de la surface (S) est précisé sur la figure suivante :



On aboutit alors à :

$$A(r+dr)\ dz - A(r)\ dz = -B(r)\ dz\ dr \qquad soit \qquad \frac{dA}{dr} = -B(r)$$

Par intégration, on obtient : (Où r_1 et r_2 sont des constantes d'intégration)

Si r < a : $$\vec{A} = \mu_0 j \, \frac{r_1^2 - r^2}{4} \, \vec{u}_z$$

Si r > a : $$\vec{A} = \mu_0 j \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right) \vec{u}_z$$

Par continuité du potentiel vecteur (une discontinuité du potentiel vecteur entraînerait une valeur infinie pour le champ magnétique, ce qui n'est pas physiquement acceptable….force infinie, énergie infinie !!!), on trouve (en choisissant de plus d'annuler la valeur du potentiel vecteur en r = a :

Si r < a : $$\vec{A} = \mu_0 j \, \frac{a^2 - r^2}{4} \, \vec{u}_z$$

Si r > a : $$\vec{A} = \mu_0 j \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{a}{r}\right) \vec{u}_z$$

Autre méthode : utiliser un formulaire directement !

- **Détermination d'un potentiel vecteur pour un solénoïde infini :**

On considère un solénoïde infini de section circulaire de rayon R, constitué de n spires jointives par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I.

Le champ magnétique créé par ce solénoïde est de la forme :

Si r < R : $\vec{B} = \mu_0 n I \ \vec{u}_z$

Si r > R : $\vec{B} = \vec{0}$

Le plan contenant l'axe du solénoïde et le point M étant un plan d'antisymétrie :

$$\vec{A}(M) = A(r) \ \vec{u}_\theta$$

En prenant comme contour un cercle centré sur l'axe (Oz) et perpendiculaire à cet axe :

$$\oint_{(C)} \vec{A}.d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \vec{B}.\vec{n} \ dS$$

On obtient :

Si r < R : $\vec{A} = \mu_0 n I \dfrac{r}{2}\,\vec{u}_\theta$ et Si r > R : $\vec{A} = \mu_0 n I \dfrac{a^2}{2r}\,\vec{u}_\theta$

On constate que le potentiel vecteur est continu à la traversée de la surface r = R du solénoïde.

5 - Potentiels retardés :

En régime dépendant du temps et pour une distribution de charges et de courants d'extension finie, on peut montrer que les solutions des équations de Poisson sont :

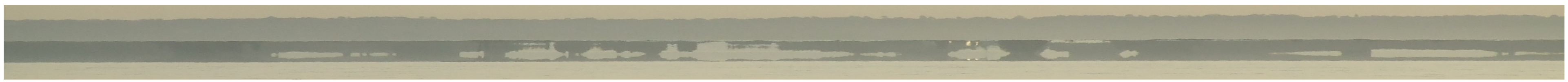
$$V = V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S, t - \frac{SM}{c})}{SM} \, d\tau$$

$$\vec{A} = \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S, t - \frac{SM}{c})}{SM} \, d\tau$$

à partir desquelles on peut calculer le champ EM par :

$$\vec{E} = \vec{E}(M,t) = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

et :



$$\vec{B} = \vec{B}(M,t) = \overrightarrow{rot}\ \vec{A}$$

Ces potentiels sont appelés « potentiels retardés ».

Ces potentiels correspondent en effet aux expressions des potentiels permanents dans lesquelles on remplace les densités de courants et de charges à l'instant t par leurs valeurs à des instants affectés des retards :

$$\Delta t = \frac{r}{c} = \frac{SM}{c}$$

Tout se passe comme si les potentiels V et $\vec{A}$ en M correspondaient à la superposition de signaux envoyés vers M par les diverses sources S de la distribution (D) et se propageant tous avec la même célérité c.

6 – Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :

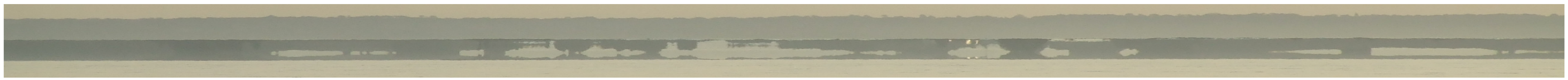
- Nature de l'approximation :

Cette approximation consiste à négliger les retards qui interviennent dans les expressions des potentiels retardés, c'est-à-dire à utiliser en régime non permanent les potentiels instantanés suivants :

$$V = V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S, t - \frac{SM}{c})}{SM} \, d\tau \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S,t)}{SM} \, d\tau$$

$$\vec{A} = \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S, t - \frac{SM}{c})}{SM} \, d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S,t)}{SM} \, d\tau$$

Cette approximation est justifiée si tous les retards $\Delta t = \frac{SM}{c}$ sont négligeables vis-à-vis d'un temps T caractéristique de l'évolution de la distribution de charges et de courants. Si on suppose cette évolution périodique, T représente alors la période.



L'ARQS néglige les phénomènes de propagation.

Si l'on note $\lambda = cT$ la longueur d'onde du phénomène dans le vide, on a alors :

$$\Delta t = \frac{SM}{c} << T = \frac{\lambda}{c} \qquad soit \qquad SM << \lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

Ainsi, l'ARQS décrit convenablement le champ EM d'une distribution (D) en des points dont les distances SM aux éléments de (D) sont faibles devant la longueur d'onde $\lambda = cT$.

Quelques ordres de grandeur :

Pour le courant industriel fourni par le secteur ($\nu = 50\ Hz$), alors $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 6\ 000\ km$.

L'ARQS est donc valable lors de l'étude du champ magnétique d'un solénoïde parcouru par un courant alternatif.

Avec $\nu = 10\ MHz,\ \lambda = 30\ m$, de telle sorte que l'ARQS reste valable lors de l'étude de circuits réalisés en TP sur une table de dimensions de l'ordre du mètre.

Dans le domaine des hyperfréquences ($\nu \geq 1\ GHz,\ soit\ \lambda \leq 30\ cm$), l'ARQS n'est plus valable et les phénomènes de propagation tiennent alors un rôle important.

Le chapitre suivant s'intéressera à ces phénomènes de propagation.

Détermination du champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ dans le cadre de l'ARQS :

Dans le cadre de l'ARQS, on peut donc calculer les potentiels à l'aide des mêmes formules qu'en régime stationnaire, valables à chaque instant :

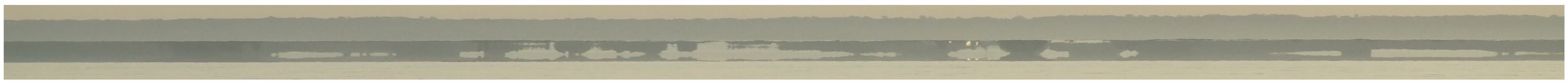
$$V = V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(D)} \frac{\rho(S,t-\frac{SM}{c})}{SM}\,d\tau \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(D)} \frac{\rho(S,t)}{SM}\,d\tau$$

et :

$$\vec{A} = \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S,t-\frac{SM}{c})}{SM}\,d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(D)} \frac{\vec{j}(S,t)}{SM}\,d\tau$$

L'expression du champ EM $(\vec{E},\vec{B})$ se déduit de ces deux expressions grâce aux relations :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} \qquad et \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$



* On note que la relation entre $\vec{B}$ et $\vec{A}$ est la même qu'en régime stationnaire puisqu'elle ne fait pas intervenir de dérivation par rapport au temps (mais seulement des dérivées d'espace).

Par conséquent, la loi de Biot et Savart sera encore valable dans le cadre de l'ARQS.

* En revanche, le champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ne s'identifie pas, même dans l'ARQS, à un champ de Coulomb instantané du type :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(S,t)\, d\tau}{SM^2}\, \vec{u}$$

En raison du terme d'induction $-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (champ électromoteur de Neumann).

Loi d'Ohm dans les conducteurs ohmique dans le cadre de l'ARQS :

Pour un conducteur comme le cuivre par exemple, le temps de relaxation (« durée » de collision des porteurs de charges) est de l'ordre de $\tau \approx 10^{-14}\,s$.

Or on sait que, dans un conducteur, la loi d'Ohm est satisfaite si le temps caractéristique d'évolution du système T vérifie $T >> \tau$. Dans le cadre de l'ARQS, cette condition sera bien vérifiée.

Ainsi, dans le cadre de l'ARQS, la loi d'Ohm locale sera valable :

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = -\sigma\left(\overrightarrow{grad}\,V + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

Courant de déplacement dans un conducteur ohmique :

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, compte tenu de la loi d'Ohm locale :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On note T le temps d'évolution caractéristique de la distribution (D) (sa période d'évolution). On peut comparer le courant de conduction avec le courant de déplacement :

$$\frac{\left| \sigma \vec{E} \right|}{\left| \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|} \approx \frac{\sigma E}{\varepsilon_0 \dfrac{E}{T}} = \frac{\sigma T}{\varepsilon_0}$$

Pour le cuivre de conductivité $\sigma = 6.10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$, ce rapport est de l'ordre de $10^{18}\ T$ (avec T en s). Ainsi, même si T est de l'ordre de $10^{-10}\ s$ (soit une fréquence de 10 GHz) :

$$\frac{\left|\sigma\vec{E}\right|}{\left|\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|} \approx 10^8$$

Par conséquent, pour les régimes d'évolution justifiant l'emploi de la loi d'Ohm, le courant de déplacement est, au sein du conducteur ohmique, négligeable devant le courant de conduction.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

Neutralité électrique :

On suppose qu'à l'instant $t = t_0$, il existe en un point M intérieur au conducteur une charge volumique $\rho(M, t_0)$. Comment varie dans le temps cette charge volumique ?

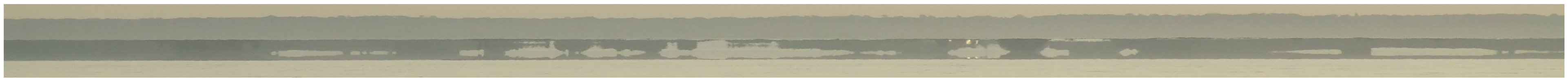
L'équation de Maxwell-Gauss, la loi d'Ohm locale et la conservation de la charge électrique :

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad ; \quad div\ \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

permettent d'écrire :

$$div\ \frac{1}{\sigma} \vec{j} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad soit \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = 0$$

Par intégration :



$$\rho(M,t) = \rho(M,t_0)\,\exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_d}\right) \qquad avec \qquad \tau_d = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

Pour le cuivre, $\tau_d \approx 4.10^{-14}\,s$: très rapidement, le conducteur devient neutre en volume :

$$\rho(M,t) = 0$$

Ainsi, comme en régime stationnaire, les charges s'accumulent au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur, d'où l'intérêt de la notion de charge surfacique σ.

Equations de Maxwell dans un conducteur :

Finalement, dans le cadre de l'ARQS, le champ EM vérifie les équations de Maxwell « simplifiées » suivantes :

$$div\ \vec{B} = 0$$

$$div\ \vec{E} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma\ \vec{E}$$

Ainsi, dans un conducteur, l'ARQS ne diffère des régimes stationnaires que par la prise en compte des phénomènes d'induction (équation de Maxwell-Faraday).

Puisque $\rho = 0$, l'équation de conservation de la charge électrique conduit (à l'intérieur du conducteur) à :

$$div\ \vec{j} = 0$$

Le flux du vecteur courant volumique se conserve, entraînant ainsi la validité de la loi des branches et des nœuds dans le cadre de l'ARQS.

Remarque :

Il ne faut pas confondre ρ et ρ_m : au sein du conducteur, qui reste globalement neutre, $\rho = 0$; par contre, les porteurs de charges, dont la répartition de charges est ρ_m, contribuent au vecteur densité de courant selon la relation $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$.

V) Continuités ou discontinuités spatiales du champ EM :

Ces relations de passage avaient été obtenues sur quelques exemples en 1ère année.

Pour le champ électrique :

$$\Delta\vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$

(Continuité de la composante tangentielle et discontinuité de la composante normale)

Pour le champ magnétique :

$$\Delta\vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \; \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1\to 2}$$

(Continuité de la composante normale et discontinuité de la composante tangentielle)

VI) Densité volumique d'énergie électromagnétique, vecteur de Poynting, équation locale de conservation de l'énergie :

1 – Puissance volumique cédée par le champ EM à la matière :

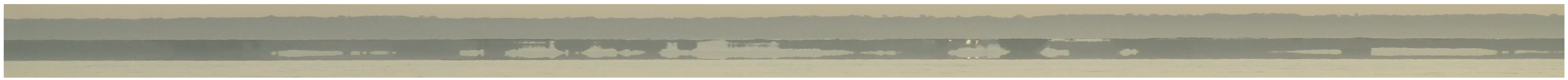
Un champ EM $(\vec{E},\vec{B})$ va interagir avec des particules chargées et leur fournir de l énergie.

En effet, une charge q est soumise de la part de ce champ EM à la force de Lorentz, dont la puissance s'écrit :

$$P_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v} = q\ \vec{E}.\vec{v}$$

En notant n le nombre de porteurs de charges par unité de volume, la puissance volumique cédée par le champ EM à la matière s'écrit donc :

$$p_L = \frac{dP_L}{d\tau} = nq\ \vec{E}.\vec{v} = \vec{j}.\vec{E}$$



Remarque : la puissance reçue par le champ EM de la part des porteurs de charge est $-p_L$ (permet de faire l'analogie avec p_S, puissance volumique reçue par un milieu conducteur de la chaleur de la part des sources de chaleur).

2 - Equation locale de conservation de l'énergie :

Par analogie avec les équations de conservation (charge, masse, diffusion, chaleur), on souhaite obtenir une équation du type :

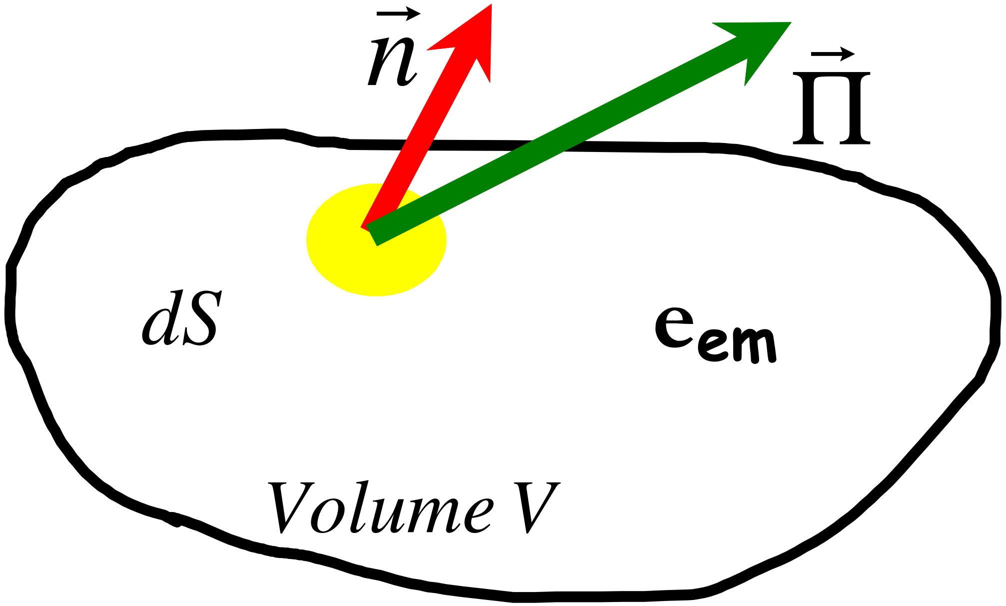
$$\frac{\partial e_{em}}{\partial t} + div\,\vec{\Pi} = (-\vec{j}.\vec{E})$$

où e_{em} désigne l'énergie électromagnétique volumique (contenue dans le champ EM) et $\vec{\Pi}$ un vecteur (appelé vecteur de Poynting) sensé donner le sens des échanges d'énergie EM (notamment par le calcul de son flux à travers une surface).

On considère un volume V délimité par une surface fermée S (fixe dans le référentiel d'étude).

L'énergie EM totale $E_m(t)$ comprise dans le volume à l'instant t vaut : $$E_m(t) = \iiint_{(V)} e_{em} d\tau$$

(e_{em} : énergie EM volumique)



La conservation de l'énergie EM permet d'écrire :

$$\frac{dE_m}{dt} + \oiint_{(S)} \vec{\Pi}.\vec{n}\; dS = -\iiint_{(V)} \vec{j}.\vec{E}\; d\tau$$

Le volume (V) étant fixe :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{(V)} e_{em}(M,t)\; d\tau\right) = \iiint_{(V)} \frac{\partial e_{em}(M,t)}{\partial t}\; d\tau$$

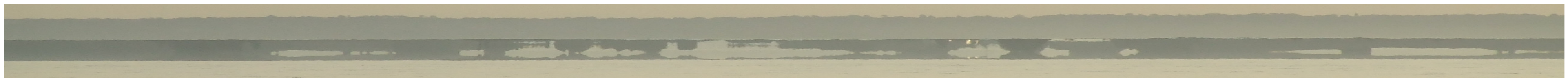
En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, il vient :

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial e_{em}(M,t)}{\partial t}\; d\tau = -\left(\iiint_{(V)} (div\vec{\Pi} + \vec{j}.\vec{E})d\tau\right)$$

Ce résultat étant vrai pour tout volume (V), il vient :

$$\frac{\partial e_{em}(M,t)}{\partial t} = -div\vec{\Pi} - \vec{j}.\vec{E}$$

C'est l'équation locale de conservation de l'énergie EM.



Elle est semblable à l'équation de conservation de la charge électrique (dans ce cas, il n'y a pas de terme de création de charges électriques :

$$\frac{\partial \rho_m(M,t)}{\partial t} + div\vec{j} = 0$$

Cette équation locale de conservation de l'énergie EM se détermine à partir des équations de Maxwell.

Le calcul suivant n'est pas au programme de MP :

On exprime le produit $\vec{j}.\vec{E}$ en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{j}.\vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}.\overrightarrow{rot}\ \vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E}.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}.\overrightarrow{rot}\ \vec{B} - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E}^2)}{\partial t}$$

En écrivant que :

$$div(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}\ \vec{E} - \vec{E}.\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \vec{B}.\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E}.\overrightarrow{rot}\ \vec{B}$$

Soit :

$$\vec{E}.\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = -\frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{B}^2)}{\partial t} - div(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

Il vient :

$$\vec{j}.\vec{E} = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial(\vec{B}^2)}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}div(\vec{E} \wedge \vec{B}) - \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{E}^2)}{\partial t}$$

Soit :

$$div(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right] = -\vec{j}.\vec{E}$$

Ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right] = -div(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}) + (-\vec{j}.\vec{E})$$

On est ainsi amené à poser :

Densité volumique d'énergie électromagnétique : $e_{em} = \dfrac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \dfrac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$

Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

Cette équation se réécrit alors :

$$\frac{\partial e_{em}}{\partial t} = -div\ \vec{\Pi} - \vec{j}.\vec{E}$$

et correspond bien alors à un bilan d'énergie EM.

Un bilan macroscopique de conservation de l'énergie EM est :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_{(V)} e_{em}\, d\tau\right) = -\oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{\Pi}.\vec{n}\, dS - \iiint_{(V)} \vec{j}.\vec{E}\, d\tau$$

Ou :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_{(V)} \left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right) d\tau\right) = -\oint\!\!\!\oint_{(S)} \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}.\vec{n}\, dS - \iiint_{(V)} \vec{j}.\vec{E}\, d\tau$$

Remarque : (vitesse de propagation de l'énergie)

Par analogie avec l'équation de conservation de la charge, on peut définir la vitesse de propagation de l'énergie (notée $\vec{u}$) par la relation :

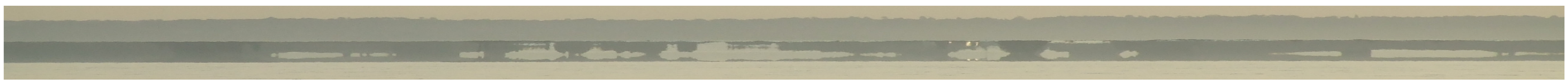
$$\vec{u} = \frac{\vec{\Pi}}{e_{em}}$$

3 – Bilan énergétique pour un fil conducteur ohmique :

On considère un fil conducteur ohmique de conductivité γ, assimilé à un cylindre d'axe (Oz) et de rayon a, soumis au champ électrique uniforme et permanent (à l'intérieur et à l'extérieur du fil) :

$$\vec{E} = E_0 \; \vec{u}_z$$

Le fil est alors parcouru par des courants de densité $\vec{j} = j\,\vec{u}_z = \gamma E_0 \; \vec{u}_z$ uniforme.



Le champ magnétique créé par cette distribution est de la forme $\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$ et se calcule en écrivant le théorème d'Ampère. On obtient (en notant $I = \pi a^2 j$ le courant total qui traverse une section transverse du fil) :

Pour r < a :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, a^2}\, r\, \vec{u}_\theta$$

Pour r > a :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}\, \vec{u}_\theta$$

Le vecteur de Poynting vaut :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Pour r < a :

$$\vec{\Pi} = -\frac{E_0 I}{2\pi\, a^2}\, r\, \vec{u}_r$$

Pour r > a :

$$\vec{\Pi} = -\frac{E_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\, \vec{u}_r$$

On rappelle l'expression générale de conservation de l'énergie EM :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_{(V)} e_{em}\, d\tau\right) = -\oiint_{(S)} \vec{\Pi}.\vec{n}\, dS - \iiint_{(V)} \vec{j}.\vec{E}\, d\tau$$

Dans ce cas particulier (régime permanent) :

$$\oiint_{(S)} \vec{\Pi}.\vec{n}\, dS = -\iiint_{(V)} \vec{j}.\vec{E}\, d\tau = -\iiint_{(V)} \frac{j^2}{\gamma}\, d\tau$$

Physiquement, la puissance dissipée par effet Joule est évacuée en dehors du volume (V) en régime stationnaire.

On calcule le flux sortant du vecteur de Poynting à travers un cylindre d'axe (Oz) et de rayon r.

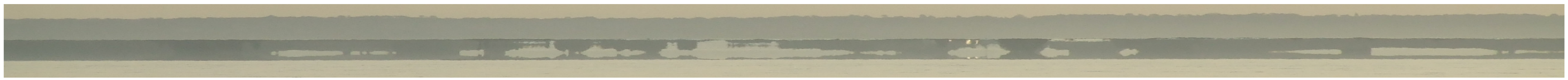
Lorsque r < a :

$$\Phi = -\frac{E_0 I}{\pi a^2}\pi r^2 h = -\frac{j^2}{\gamma}\pi r^2 h$$

Lorsque r > a :

$$\Phi = -\frac{E_0 I}{\pi a^2}\pi a^2 h = -\frac{j^2}{\gamma}\pi a^2 h$$

On reconnaît bien, dans les deux cas, la puissance absorbée par effet Joule dans le cylindre de rayon r considéré et on vérifie bien l'équation de conservation précédente.



VIII) Effet de peau dans un conducteur ohmique :

1 – Longueur de pénétration dans un métal :

Un champ EM pénètre dans un métal bon conducteur de conductivité σ. Par action du champ électrique, les électrons du métal sont accélérés et fournissent une partie de leur énergie cinétique par chocs avec les ions positifs du réseau métallique. L'énergie de l'onde est dissipée par effet Joule ce qui cause l'amortissement de l'onde.

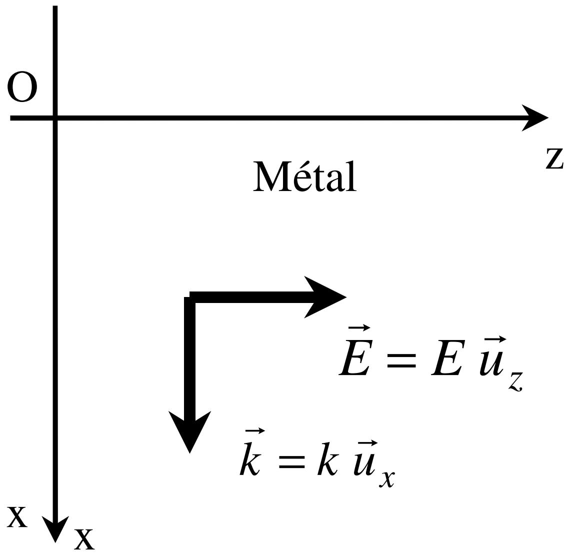
On cherche à calculer la distance caractéristique d'amortissement ou profondeur de pénétration. Pour cela, on considère un métal de conductivité σ pour lequel on cherche une solution des équations de Maxwell correspondant à des champs sinusoïdaux de pulsation ω.

On sait que, dans un métal, le courant de déplacement $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le courant de conduction $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

De façon plus précise, on cherche pour le champ électrique une expression de la forme :

$$\vec{E} = E_0 f(x) \exp i(kx - \omega t)\, \vec{u}_z$$

où $\vec{u}_z$ désigne le vecteur unitaire de l'axe Oz parallèle à la surface du métal et f(x) une fonction de la profondeur x à l'intérieur du métal que l'on va déterminer.



On peut, à partir de l'expression du champ **E**, déterminer le champ magnétique **B**. En effet, l'équation de Maxwell-Faraday permet de déterminer B :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 f(x) e^{i(kx-\omega t)} \end{pmatrix} = i\omega\vec{B}$$

d'où $$-\frac{\partial}{\partial x}\left(E_0 f(x) e^{i(kx-\omega t)}\right)\vec{u}_y = i\omega\vec{B}$$

D'où l'expression du champ B :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} E_0 \left(-kf(x) + if'(x)\right) e^{i(kx-\omega t)}\ \vec{u}_y$$

On vérifie aisément que ces deux champs vérifient les équations de Maxwell-Flux et de Maxwell-Gauss :

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad et \qquad div\,\vec{E} = 0$$

L'équation de Maxwell-Ampère, en négligeant le courant de déplacement, s'écrit :

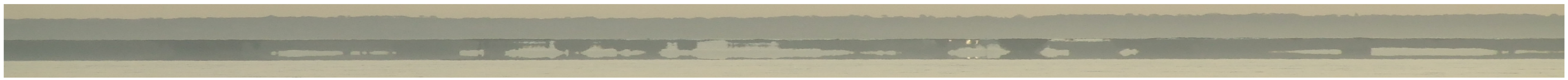
$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} = \mu_0\sigma\vec{E}$$

On en déduit l'équation :

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0\sigma E$$

Soit :

$$\frac{1}{\omega}E_0(-kf'(x) + if''(x) - ik^2 f(x) - kf'(x))e^{i(kx-\omega t)} = \mu_0\sigma E_0 f(x)e^{i(kx-\omega t)}$$



$$-2kf'(x)+i(f''(x)-k^2 f(x))=\mu_0\sigma\omega f(x)$$

On en déduit deux équations différentielles :

$$-2kf'(x)=\mu_0\sigma\omega\, f(x) \qquad et \qquad f''(x)-k^2 f(x)=0$$

qui s'intègrent en :

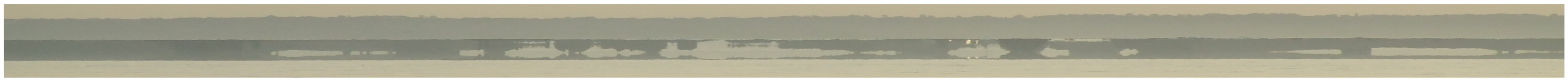
$$f(x)=Ae^{-\frac{\mu_0\sigma\omega}{2k}x} \qquad et \qquad f(x)=Ae^{-kx}$$

(Pour la deuxième solution, on a éliminé la solution en exponentielle croissante).

Par identification, on déduit :

$$k=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2k} \qquad soit \qquad \delta=\frac{1}{k}=\sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$$

δ est la longueur de pénétration dans le métal.



Pour le cuivre ($\sigma = 5{,}8.10^{7}\ \Omega^{-1}.m^{-1}$), on calcule δ pour différentes fréquences :

Fréquence	**Longueur de pénétration**
50 Hz	3 mm
50 MHz	3 μm
50 THz	3 nm

Lorsque la pulsation augmente, la profondeur de pénétration diminue comme l'inverse de la racine carrée de la pulsation.

Pour un métal parfait, la conductivité est infinie et la profondeur de pénétration devient nulle : une onde EM ne peut pénétrer dans un métal parfait (elle s'y réfléchit).

Les résultats obtenus restent valables pour une géométrie cylindrique ; ainsi, un câble cylindrique homogène de section droite circulaire ne peut être parcouru par des courants que dans un zone cylindrique superficielle d'épaisseur quelques δ. Il ne sert à rien pour transporter un courant électrique sinusoïdal d'utiliser un câble en cuivre de rayon nettement supérieur à δ.