

Magnétostatique : révisions de Sup

Compléments

Chapitre 3

Magnétostatique : révisions de Sup

Compléments



I) Vecteur densité volumique de courant, loi d'Ohm locale, effet Hall et force de Laplace :

1 – Vecteur densité volumique et intensité :

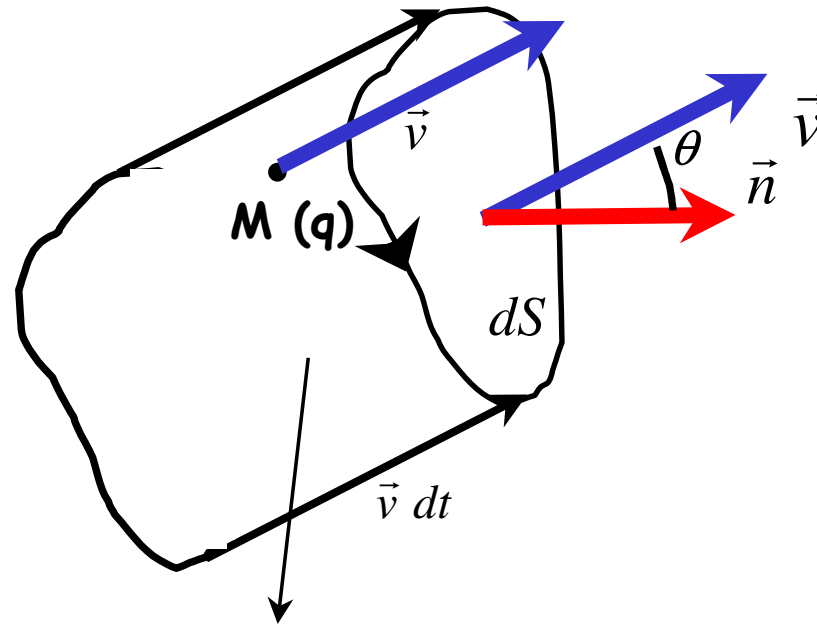
On considère un ensemble de particules de charge q , de densité particulière n^* et ayant un mouvement d'ensemble à la vitesse v .

On notera dans la suite :

$$\rho_m = n^* q \text{ la densité de charges mobiles (exprimée en C.m}^{-3}\text{).}$$

Comment définir l'intensité qui traverse une surface dS quelconque ?





$$\text{Volume } d\tau = (v dt)(dS) \cos \theta$$

La quantité de charges électriques dq qui traverse la surface élémentaire dS pendant l'intervalle de temps dt est :

$$dq = n^* d\tau q = n^* (dS \cos \theta v dt) q$$

Or, $v dS \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{n} dS$, d'où :

$$dq = n^* (\vec{v} \cdot \vec{n} dS) q dt = \vec{j} \cdot \vec{n} dS dt$$

où l'on a défini :

$$\vec{j} = n^* q \vec{v} = \rho_m \vec{v}$$

le vecteur densité de courant. L'intensité i :

$$i = \frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

s'interprète comme le flux du vecteur densité de courant à travers la surface dS orientée.

L'intensité qui traverse une surface finie (S) sera alors :

$$i = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

Remarque ; différences entre modélisation volumique et surfacique

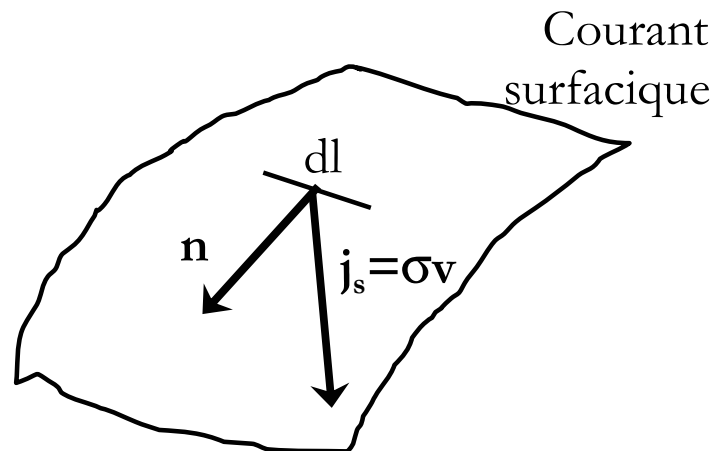
Dans le cas d'une répartition volumique de courants :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad ; \quad di = \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

Pour une répartition surfacique :

$$\vec{j} = \sigma \vec{v} \quad ; \quad di = \vec{j} \cdot \vec{n} dl$$

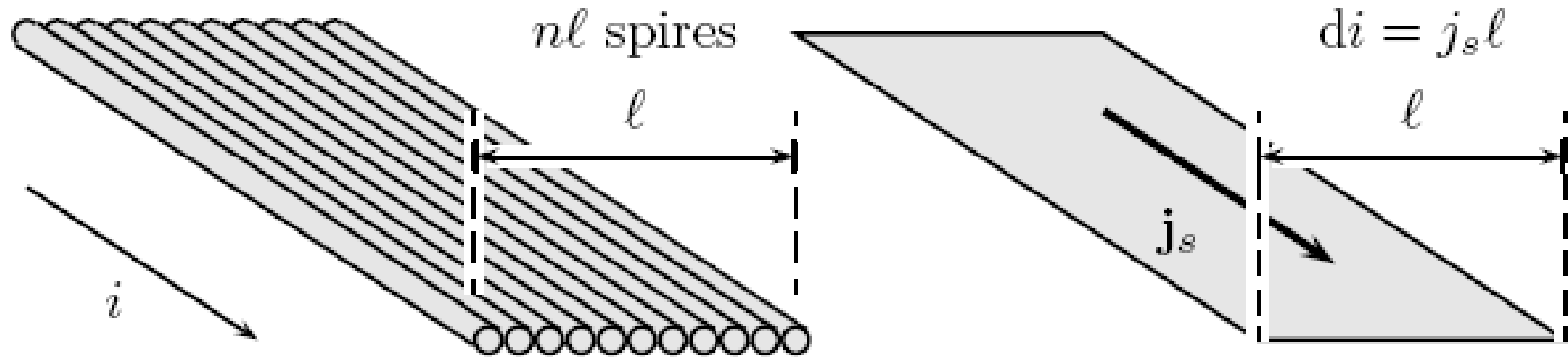
Au lieu de compter les charges qui traversent une surface donnée, on compte les charges qui traversent un segment de longueur dl et de vecteur normal \vec{n} .



Compléments :

Dans le cas des nappes de courant réalisées par adjonction de nombreux fils jointifs, comme on le voit sur la figure , la norme de \mathbf{j}_s s'identifie avec le courant traversant la nappe de courants par unité de longueur, donc avec le produit du nombre n de fils par unité de longueur, par le courant I transporté par un de ces fils :

$$\|\mathbf{j}_s\| = nI \quad \text{où} \quad [n] = L^{-1} \quad (\text{spires par mètre})$$



2 – Modèle classique de la conduction dans un métal, loi d’Ohm locale :

Voir cours de sup

Parler des électrolytes (faire référence au TP de chimie : suivi d’une cinétique de saponification par conductimétrie)

3 – Effet Hall :

Voir cours de sup.

4 – Force de Laplace, expression volumique :

Voir cours de sup

Donner l’équivalence :

$$\vec{j}d\tau \iff Id\vec{\ell}$$

II) Révisions de magnétostatique de 1^{ère} année :

1 – Loi de Biot et Savart, exemple de calculs de champs (courants filiformes et non filiformes), prise en compte des symétries et des invariances :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\vec{l} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\vec{l} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{r^3} \quad \text{avec: } \overrightarrow{PM} = r\vec{u}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{j} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2} d\tau$$

Symétries du champ magnétique :

Symétries positives du champ magnétostatique

Les champs magnétostatiques $\mathbf{B}(M)$ et $\mathbf{B}(\pi(M))$ en deux points M et $\pi(M)$ symétriques relativement à un plan de symétrie des courants Π_+ , sont eux-mêmes antisymétriques par rapport à ce même plan, soit $\mathbf{B}(\pi(M)) = -\pi(\mathbf{B}(M))$.

Symétries positives du champ magnétostatique

En un point $M \in \Pi_+$ d'un plan Π_+ de symétrie des charges, le champ magnétostatique $\mathbf{B}(M)$ est orthogonal à Π_+ , $M \in \Pi_+ \Rightarrow \mathbf{B}(M) \perp \Pi_+$.

Exemples :



Symétries négatives du champ magnétostatique

Les champs magnétostatiques $\mathbf{B}(M)$ et $\mathbf{B}(\pi(M))$ en deux points M et $\pi(M)$ symétriques relativement à un plan de symétrie négative des courants Π_- , sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce plan, $\mathbf{B}(\pi(M)) = \pi(\mathbf{B}(M))$.

Symétries négatives du champ magnétostatique

En un point $M \in \Pi_-$ d'un plan Π_- d'antisymétrie (ou de symétrie négative) des courants, le champ magnétostatique $\mathbf{B}(M)$ est contenu dans Π_- , $M \in \Pi_- \Rightarrow \mathbf{B}(M) \in \Pi_-$.

Exemples :



2 – Flux de \vec{B} et circulation de \vec{B} (théorème d'Ampère) :

Rappel du cours de sup : le champ magnétique est à flux conservatif

Autrement dit, et en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\Phi_s = \iint_{(S \text{ fermée})} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{B} \cdot d\tau \quad \text{soit} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

Ainsi, un champ qui ne diverge pas voit son flux se conserver. C'est une conséquence de la non existence des monopôles magnétiques (il n'existe pas de charges magnétiques ponctuelles, analogues aux charges électriques ponctuelles).

Le théorème de Stokes, que l'on admet, est le pendant du théorème de Green-Ostrogradsky.

Enoncé du théorème de Stokes :

Soit (C) un contour (c'est-à-dire une courbe fermée orientée) et (S) une surface quelconque qui s'appuie sur (C) (à la manière d'un chapeau dont (C) serait le bord), dont le vecteur normal est orienté selon la règle du tire-bouchon.

Le théorème de Stokes s'écrit :

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Ce théorème va permettre d'écrire le théorème d'Ampère de manière locale et d'aboutir à une nouvelle équation de Maxwell (valable en régime indépendant du temps).

Historiquement, l'expérience avait permis d'établir le « **théorème d'Ampère** » ; en désignant par I_e l'intensité totale des courants permanents « **enlacés** » par un contour (C), la circulation de \vec{B} le long de (C) est donnée par :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

avec : $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ où (S) est une surface orientée s'appuyant sur (C)

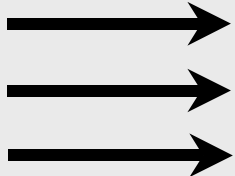
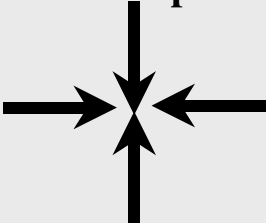
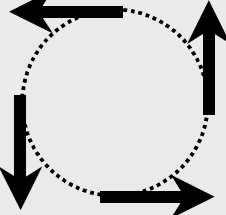
Intérêt physique de ces opérateurs :

On peut illustrer les termes de divergence et de rotationnel pour quelques champs types :

La divergence et le rotationnel sont nuls pour le champ dont les lignes de champ sont parallèles.

La divergence est négative pour les champs dont les lignes de champ convergent vers un point. Elle serait positive pour un champ divergent.



Champ \vec{V}	$\text{div}\vec{V}$	$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}$
<p>Champ Uniforme</p>  <p> $V_x = V$ $V_y = 0$ $V_z = 0$ </p>	0	$\vec{0}$
<p>Champ Convergent</p>  <p> $V_\rho = -V$ $V_\theta = 0$ $V_z = 0$ </p>	$-\frac{V}{\rho} < 0$	$\vec{0}$
<p>Champ Tournant</p>  <p> $V_\rho = 0$ $V_\theta = V$ $V_z = 0$ </p>	0	$\frac{V}{\rho} \vec{u}_z$

Le rotationnel du dernier champ dont les lignes de champ tournent autour d'un point dans le sens positif est positif.



Le champ considéré peut être celui des vitesses d'un solide tournant autour de l'axe (Oz). La vitesse d'un point du solide est, si $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ désigne le vecteur rotation du solide, $\vec{v}(M) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$. En utilisant les coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot \vec{v}} = 2\vec{\Omega}$$

Ce résultat permet d'associer l'opérateur rotationnel à l'idée de rotation.

Equation de Maxwell relatif au rotationnel du champ électrique :

Nous avons obtenu les équations de Maxwell, valables en régime stationnaire :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Le théorème de Stokes appliqué au champ électrostatique donne :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$



Le champ électrostatique, qui dérive d'un gradient, est à circulation conservative, autrement dit : (le résultat précédent doit être valable pour tout contour et donc toute surface S)

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

C'est l'équation de Maxwell relative au rotationnel du champ électrostatique, valable en régime stationnaire.

On retiendra ainsi que le rotationnel d'un gradient donne le vecteur nul : (un champ qui ne fait que diverger ne tourne pas)

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} V) = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} V) = \vec{0}$$

On admet la réciproque :

$$\text{Si } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}, \text{ alors } \exists V \text{ tel que : } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\vec{\nabla} V$$

Autrement dit, si un champ ne tourne pas, c'est qu'il dérive d'un gradient !



D'où, finalement, les 4 équations de Maxwell en statique :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

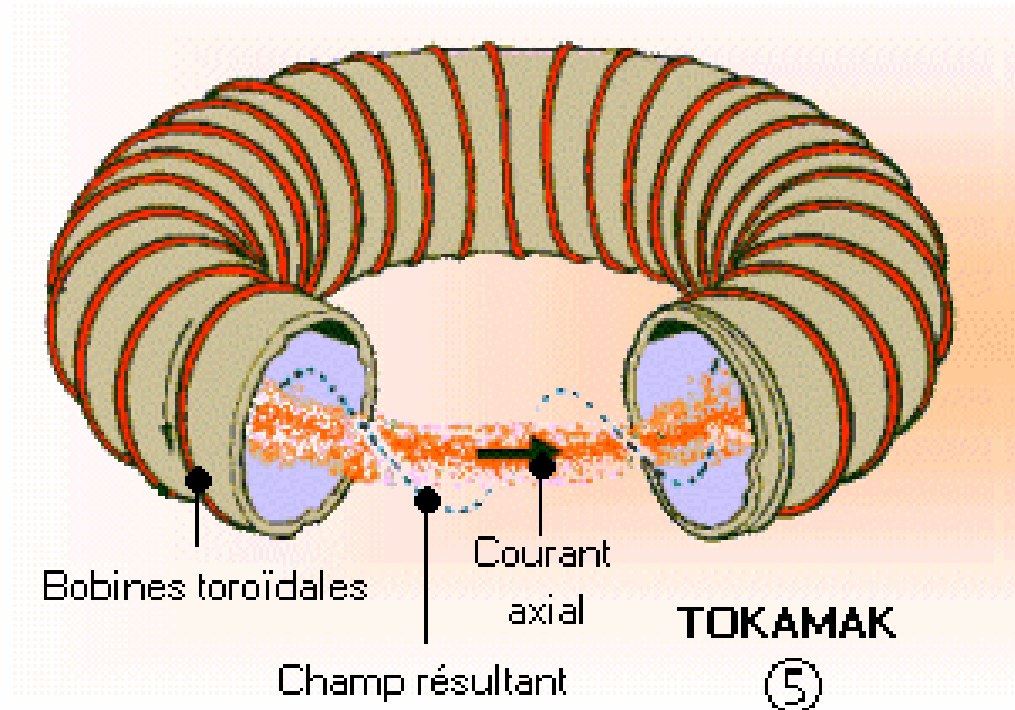
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

3 – Exemples d'utilisation du théorème d'Ampère :

Voir le cours de sup (cylindre infini, ruban épais, tore et solénoïde infini)



Champ à l'intérieur d'un Tokamak (réf : <http://www-fusion-magnetique.cea.fr/>)

4 – Relations de passage pour le champ magnétique :

Ces relations de passage seront admises.

$$\blacklozenge \boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12})}$$

où \vec{B}_1 et \vec{B}_2 représentent le champ magnétique au voisinage d'une nappe de courant, \vec{n}_{12} un vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les milieux (1) et (2), orienté de (1) vers (2), \vec{j}_S la **densité de courant surfacique, en A/m**.

La composante normale du champ magnétique est toujours continue.

La composante tangentielle présente une discontinuité égale à $\mu_0 j_S$.

5 – Potentiel vecteur, exemple de détermination :

La relation $\text{div}\vec{B}=0$ montre qu'il est toujours possible de trouver un champ vectoriel \vec{A} , appelé « **potentiel-vecteur de \vec{B}** », tel que :

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}} \quad \text{où } \vec{A} \text{ s'exprime en Tesla-mètre (T.m)}$$

On sait que : $\text{rot}(\text{grad})=0 \Rightarrow A$ n'est défini qu'à un **gradient près**.

($\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}f$, où f est une fonction scalaire quelconque, est aussi un potentiel-vecteur de \vec{B})

Pour simplifier les calculs, et selon les situations, on peut être amené à choisir une condition supplémentaire satisfaite par \vec{A} , dite « **condition de JAUGE** » .

En magnétostatique, une « bonne » condition de jauge est :

$$\boxed{\text{div}\vec{A} = 0}$$

On admettra le résultat : (c'est une équivalence)

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \vec{A} \text{ tel que : } \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$$

De manière formelle, on peut écrire, pour s'en souvenir :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{0}$$

Equation de Poisson :

Nous allons procéder comme en électrostatique en introduisant le potentiel-vecteur dans $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{A}) = \mu_0 \vec{j} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} = -\Delta\vec{A}$ avec la jauge: $\operatorname{div}\vec{A} = 0$; on a alors :

$$\boxed{\Delta\vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}}$$

En projetant sur les trois axes cartésiens, par exemple sur (Ox) :

$$\Delta A_x + \mu_0 j_x = 0$$

On retrouve l'équation de Poisson scalaire, identique à celle vérifiée par le potentiel électrostatique.

Par analogie, on déduit la solution :

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \frac{j_x d\tau}{PM} \quad \text{et} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \frac{\vec{j} d\tau}{PM}$$

Pour une répartition filiforme, on aura, en utilisant l'équivalence $\vec{j} d\tau \Leftrightarrow Id\vec{\ell}$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{fil} \frac{Id\vec{\ell}}{PM}$$

En appliquant le théorème de Stokes, on obtient une forme intégrée qui est bien utile pour calculer un potentiel vecteur, sans connaître les expressions du rotationnel :

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

Symétries et invariances du potentiel vecteur

Les symétries et invariances du potentiel vecteur sont identiques à celles de ses sources, les courants électriques.

- Détermination d'un potentiel vecteur pour un solénoïde infini :

On considère un solénoïde infini de section circulaire de rayon R , constitué de n spires jointives par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I .

Le champ magnétique créé par ce solénoïde est de la forme :

Si $r < R$:

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

Si $r > R$:

$$\vec{B} = \vec{0}$$



Le plan contenant l'axe du solénoïde et le point M étant un plan d'antisymétrie :

$$\vec{A}(M) = A(r) \vec{u}_\theta$$

En prenant comme contour un cercle centré sur l'axe (Oz) et perpendiculaire à cet axe :

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

On obtient :

Si $r < R$:

$$\vec{A} = \mu_0 n I \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$

Si $r > R$:

$$\vec{A} = \mu_0 n I \frac{a^2}{2r} \vec{u}_\theta$$

On constate que le potentiel vecteur est continu à la traversée de la surface $r = R$ du solénoïde.

□ *Cas des champs uniformes* : on utilise souvent pour approximation de champs magnétiques réels des champs uniformes, au moins dans une certaine région de l'espace; dans un tel cas, on ne précise pas forcément la distribution des courants qui créent ce champ \mathbf{B}_0 uniforme, ce qui empêche toute analyse *a priori* des symétries du potentiel vecteur \mathbf{A} .

On remarque alors que l'expression $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B}_0 \wedge \mathbf{r}}{2}$ présente toutes les caractéristiques d'un potentiel vecteur conforme à la jauge de Coulomb; on peut s'en assurer en choisissant, puisque \mathbf{B}_0 est uniforme, un axes (Oz) aligné avec ce champ et en utilisant provisoirement des coordonnées cartésiennes. Il vient en effet immédiatement dans ce cas $\mathbf{A} = \frac{B_0}{2} (-ye_x + xe_y)$ d'où on déduit par un calcul immédiat $\text{rot } \mathbf{A} = B_0 \mathbf{e}_z$ et $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

Potentiel vecteur des champs uniformes

Pour potentiel vecteur d'un champ uniforme \mathbf{B}_0 , on peut choisir l'expression $\mathbf{A}(M) = \frac{\mathbf{B}_0 \wedge \mathbf{OM}}{2}$ à partir de toute origine O comme potentiel vecteur conforme à la jauge de Coulomb.

Remarques :

* Le potentiel vecteur est toujours continu puisqu'il est dérivable (autrement, le champ magnétique, donné par $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$) prendrait des valeurs infinies.

* Le potentiel vecteur apparaît comme un intermédiaire de calcul permettant d'en déduire le champ magnétique. Physiquement, on verra que le potentiel vecteur est directement relié, en induction, au champ électromoteur.



III) Dipôle magnétique :

1 – Définitions et analogie avec le dipôle électrostatique :

On appellera **DIPÔLE MAGNETIQUE** toute distribution de courants permanents de moment magnétique non nul, dont les **dimensions** sont **petites** vis-à-vis de la **distance** à laquelle on calcule le champ qu'elle crée.

Exemples : un aimant ou une spire vus de loin, un électron gravitant autour d'un noyau.

2 – Champ magnétique et potentiel vecteur créés par un dipôle magnétique, topographie :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{array} \right.$$

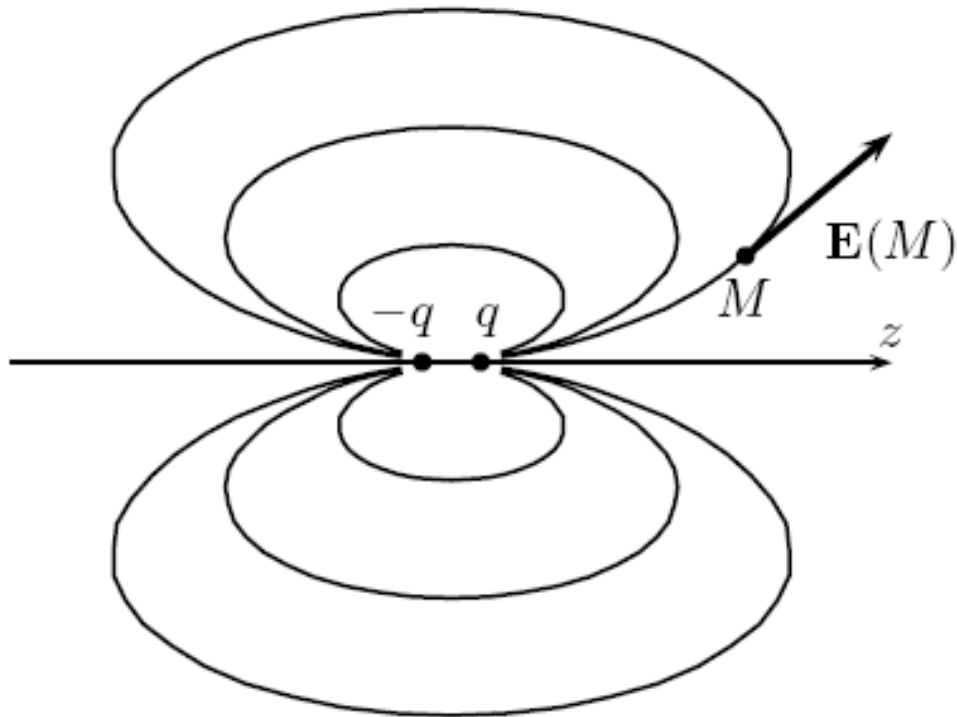
Rq : l'analogie est donnée par :

$$\vec{B} \Leftrightarrow \vec{E} \quad \vec{m} \Leftrightarrow \vec{p} \quad \mu_0 \Leftrightarrow 1/\epsilon_0$$

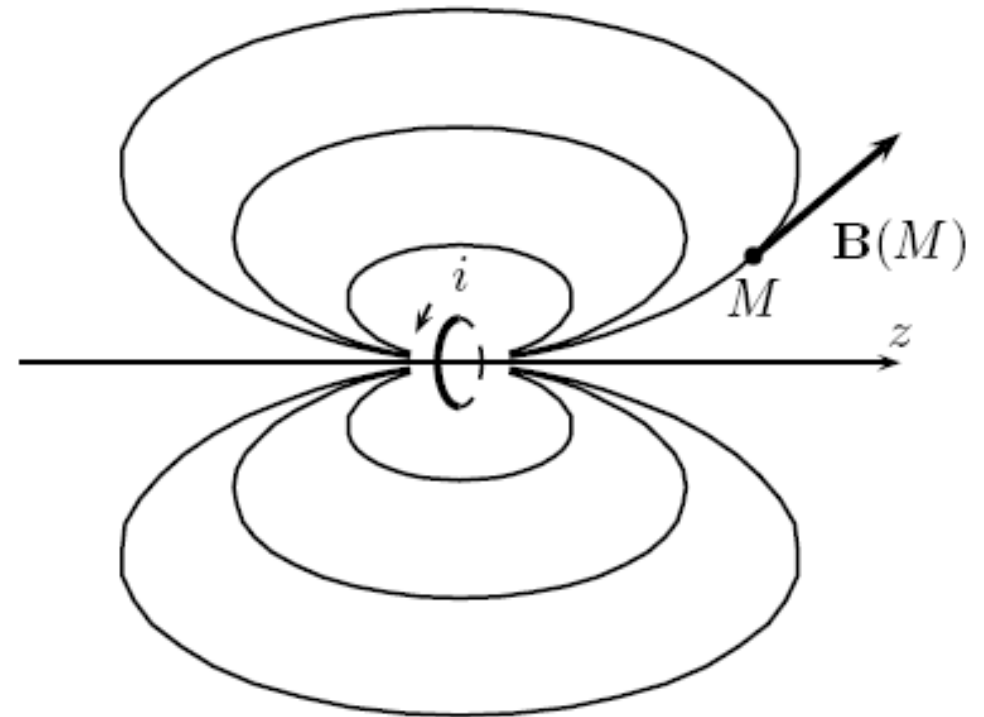
(Procéder comme en sup, par analogie à partir du champ créé sur son axe et en un point éloigné par une spire circulaire)



Lignes de champs des dipôles électrique et magnétique :



Doublet électrostatique

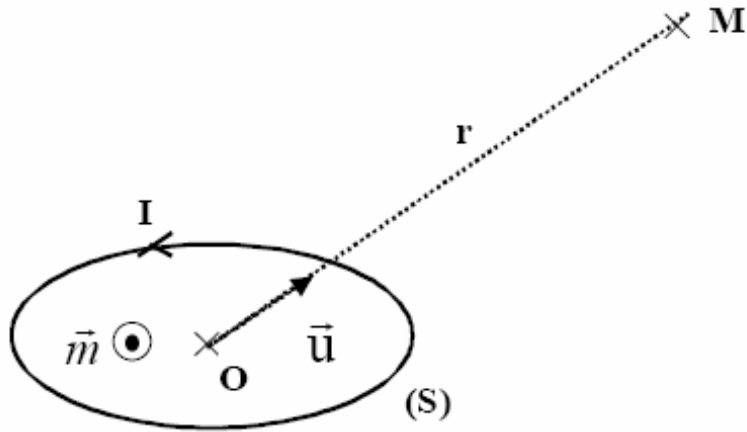


Dipôle magnétostatique (spire)



On considère la boucle de courant ci-dessous ; le potentiel-vecteur se calcule par :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_S \frac{d\vec{l}}{PM} \quad \text{où P est un point « courant » de la spire (S), de moment } \vec{m} .$$



Dans le cadre de l'**approximation dipolaire**, le

calcul donne, après simplifications et en posant $r=OM$, où O est un point quelconque de la spire :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Démonstration :

□ *Le potentiel vecteur dipolaire* : le potentiel vecteur magnétique créé au point M par un circuit quelconque s'écrit $\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{P \in (C)} \frac{d\mathbf{r}}{PM}$. Le théorème de Kelvin permet alors d'écrire $\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in (S)} \mathbf{n} \wedge \text{grad}_P \frac{1}{PM} dS$ où l'expression exacte $\text{grad}_P \frac{1}{PM} = \frac{\mathbf{PM}}{PM^3}$ sera écrite, pour un circuit de faibles dimensions, $\frac{\mathbf{PM}}{PM^3} \simeq \frac{\mathbf{OM}}{OM^3}$, où O est un point situé par exemple au centre de ce circuit. Après mise en facteur des termes indépendants de P , il reste donc $\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\int_{P \in (S)} \mathbf{n} dS \right) \wedge \frac{\mathbf{OM}}{OM^3}$ ou :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{OM}}{OM^3}$$

On peut faire le rapprochement avec le potentiel scalaire du dipôle électrostatique :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2}$$

3 – Moment magnétique d'un circuit filiforme fermé plan :

- pour un circuit **filiforme** et **plan**, on a : $\boxed{\vec{m} = I\vec{S}}$ (\vec{S} est la surface **orientée** du circuit)

- pour un circuit **non plan** : $\boxed{\vec{m} = I \iint_S d\vec{S}}$

Rq : dans ce cas, il faut bien comprendre que la sommation porte sur le **vecteur** $d\vec{S}$; ainsi, lorsque l'on considère la surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h, on a :

$$\iint_{S_{lat}} dS = 2\pi Rh \text{ mais: } \iint_{S_{lat}} d\vec{S} = \vec{0}.$$

4 – Action d'un champ magnétique extérieur sur un dipôle magnétique :

- **énergie potentielle :**

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{ext}$$

- **force résultante :**

$$\vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

- **couple subi :**

$$\vec{\Gamma}_{ext} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}$$

Rq1 : on retrouve des expressions analogues à celles vues pour le dipôle électrostatique.

Rq2 : ces actions tendent donc à **minimiser** l'énergie potentielle et à **annuler** le couple ; la tendance est donc à **l'alignement du dipôle et du champ magnétique extérieur** (dans le même sens).

On comparera aux expressions obtenues avec le dipôle électrostatique :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext} \quad ; \quad \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{\Gamma}_{ext} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

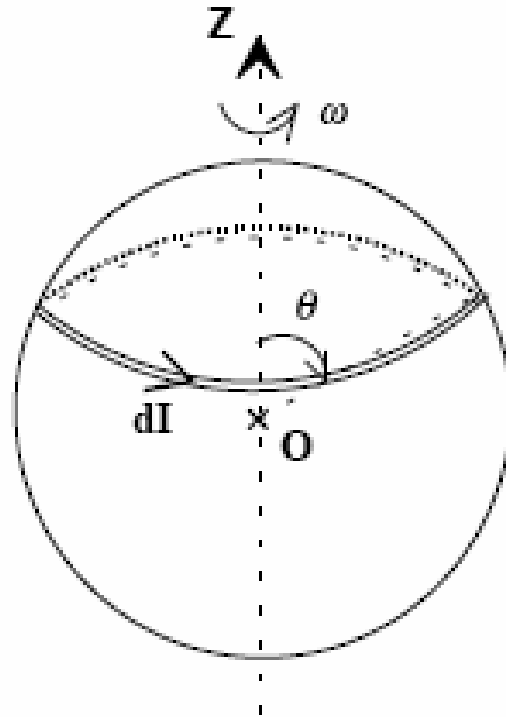


5 – Moment magnétique d'une boule chargée :

On s'intéresse à une sphère de rayon R , portant une charge totale Q uniformément répartie à sa surface ; la sphère tourne autour de l'un de ses diamètres à la vitesse angulaire constante ω .

- 1) Calculer le champ magnétique au centre de la sphère.
- 2) Déterminer le moment magnétique de cette sphère.

1) Nous allons travailler avec les notations de la figure ci-dessous :



La sphère est de rayon R

La surface est découpée en couronnes de largeur angulaire $d\theta$

Le champ est porté par Oz

♦ Dans le référentiel fixe, les charges surfaciques en mouvement sont assimilables à des **courants** ; les charges décrivant des cercles d'axe Oz , la sphère pourra être considérée comme la superposition de **spires circulaires** de rayon $r = R \sin(\theta)$, parcourues par des courants élémentaires dI .

♦ La vitesse de rotation étant constante, un observateur extérieur verra passer la charge dQ portée par une couronne élémentaire de largeur angulaire $d\theta$ pendant un temps T égal à la période de rotation de la sphère ; on a donc :

$$dI = \frac{dQ}{T} = \sigma dS \frac{\omega}{2\pi} = \frac{Q\omega}{(4\pi R^2)2\pi} dS \quad (\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \text{ représente la charge surfacique de la sphère})$$

Les couronnes, de rayon $r = R \sin \theta$, sont de « hauteur » $Rd\theta \Rightarrow dS = (2\pi R \sin \theta)Rd\theta$; d'où :

$$dI = \frac{Q\omega \sin \theta}{4\pi} d\theta$$

Autre calcul de l'intensité élémentaire :

$$dI = j_s R d\theta = \sigma(\omega R \sin \theta)Rd\theta = \frac{Q}{4\pi R^2} \omega R^2 \sin \theta d\theta$$

◆ Par ailleurs, tout plan contenant l'axe Oz est plan d'antisymétrie des courants $\Rightarrow \vec{B}(O)$ est **porté par Oz** (ou bien : le plan perpendiculaire à Oz, passant par O, est un plan de symétrie des sources $\Rightarrow \vec{B}(O)$ est perpendiculaire à ce plan, donc parallèle à Oz) ; de plus, le résultat de l'exercice 28.1 permet d'exprimer le champ créé par une spire élémentaire en O :

$$d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 dI}{2r} \sin^3(\theta) \Rightarrow \vec{B}(O) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 Q\omega}{8\pi R} \sin^3(\theta) d\theta \vec{e}_z ; \quad \sin^3(\theta) d\theta = (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = (u^2 - 1) du$$

avec : $u = \cos \theta$; on trouve : $\int_1^{-1} (u^2 - 1) du = 4/3 \Rightarrow \boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi R} \vec{e}_z}$

2) Chaque spire présente le moment magnétique élémentaire :

$d\vec{m} = S(\theta) dI \vec{e}_z$ où : $S(\theta)$ représente la surface d'une spire vue sous l'angle θ depuis le point O, et dI le courant précédemment calculé ; $S(\theta) = \pi r^2 = \pi R^2 \sin^2(\theta)$, d'où :

$$\boxed{\vec{m} = \frac{Q\omega\pi R^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \vec{e}_z = \frac{Q\omega R^2}{3} \vec{e}_z}$$

