MP5 Physique

plan du cours d'électromagnétisme

GÉNÉRALITÉS EN MAGNÉTOSTATIQUE

par hypothèse, on s'intéresse à une distribution constante (ou : statique) de courants dans l'espace

I) CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE :

1) Propriétés du champ magnétostatique sous forme intégrale:

dans le vide, une distribution statique de courant modifie les propriétés de l'espace en créant en tout point un champ magnétostatique $\vec{B}$ possédant les deux propriétés suivantes :

1) $\vec{B}$ est à flux conservatif, c'est-à-dire que : $\forall \Sigma \text{fermée}, \oiint_{\Sigma} \vec{B}.\vec{n}dS = 0$

2) $\vec{B}$ vérifie : $\forall \Gamma \text{fermée}, \oint_{\Gamma} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \iint_{S_\Gamma} \vec{j}.\vec{n}dS = \mu_0 I_\Gamma$

énoncé détaillé du théorème d'Ampère (cas d'une distribution filiforme de courtant) :

la circulation du champ magnétique le long d'une courbe (Γ) fermée est égale au produit par la perméabilité magnétique du vide de l'intensité enlacée", c'est-à-dire la somme algébrique des intensités des courants traversant S_Γ dans le sens de son orientation

2) Propriétés du champ magnétostatique sous forme locale:

dans le vide, une distribution statique volumique de courant modifie les propriétés de l'espace en créant en tout point un champ magnétostatique $\vec{B}$ possédant les deux propriétés suivantes :

1) $\text{div}(\vec{B}) = 0$
2) $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

3) Analogies et différences entre électrostatique et magnétostatique

II) RÉCAPITULATIF SUR LES INVARIANCES EN ÉLECTROMAGNÉTISME :

1) Rappel sur les isométries :

rappel : une isométrie T est :

* une application affine :

si (*A*) est l'espace affine à trois dimensions : $M \in (A) \quad T(M) = M' \in (A)$

* qui conserve les distances : $\forall M, N \in (A), \left\| \overrightarrow{M'N'} \right\| = \left\| \overrightarrow{MN} \right\|$

rappel :

* une isométrie positive est une isométrie dont l'endomorphisme associé est de déterminant égal à +1
* une isométrie négative est une isométrie dont l'endomorphisme associé est de déterminant égal à -1

rappel : classification des isométries :

* isométries positives : translations, rotation autour d'un axe
* isométries négatives : symétries par rapport à un plan

2) Symétries en électromagnétisme :

remarque : principe de Curie : tout phénomène physique possède au moins les éléments de symétrie de ses causes

A) Si une distribution de charge statique est invariante par une isométrie, alors le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution de charge est invariant par cette isométrie :

schématiquement (et incorrectement !) : $\left(T(\rho) \equiv \rho\right) \Rightarrow \left(T(\vec{E}) \equiv \vec{E}\right)$

signification physique concrète :

notations : isométrie T : $M \in (A) \quad T(M) = M' \in (A)$

endomorphisme associé : t

si $\left(\forall M, \rho(M') = \rho(M)\right)$, alors : $\left(\forall M, \vec{E}(M') = t\left(\vec{E}(M)\right)\right)$

B) Si une distribution statique de courant est invariante par une isométrie, alors le potentiel vecteur $\vec{A}$ créé par cette distribution de courant est invariant par cette isométrie :

$\left(T(\vec{j}) \equiv \vec{j}\right) \Rightarrow \left(T(\vec{A}) \equiv \vec{A}\right)$

signification physique concrète :

notations : isométrie T : $M \in (A) \quad T(M) = M' \in (A)$

endomorphisme associé : t

si $\left(\forall M, \vec{j}(M') = t\left(\vec{j}(M)\right)\right)$, alors : $\left(\forall M, \vec{A}(M') = t\left(\vec{A}(M)\right)\right)$

C) a) Si une distribution statique de courant est invariante par une isométrie positive, alors le champ magnétostatique $\vec{B}$ créé par cette distribution de courant est invariant par cette isométrie positive :

$\left(T_+(\vec{j}) \equiv \vec{j}\right) \Rightarrow \left(T_+(\vec{B}) \equiv \vec{B}\right)$

b) Si une distribution statique de courant est invariante par une isométrie négative, alors le champ magnétostatique $\vec{B}$ créé par cette distribution de courant est changé en son opposé par cette isométrie négative :

$$\left(T_-\left(\vec{j}\right) \equiv \vec{j}\right) \Rightarrow \left(T_-\left(\vec{B}\right) \equiv -\vec{B}\right)$$

D) Si une distribution statique de charge est transformée en son opposée par une isométrie (on dit alors qu'elle est anti-invariante par cette isométrie), alors le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution de charge est transformé en son opposé par cette isométrie :

$$\left(T(\rho) \equiv -\rho\right) \Rightarrow \left(T\left(\vec{E}\right) \equiv -\vec{E}\right)$$

E) Si une distribution statique de courant est transformée en son opposée par une isométrie (on dit alors qu'elle est anti-invariante par cette isométrie), alors le potentiel vecteur $\vec{A}$ créé par cette distribution de courant est transformé en son opposé par cette isométrie :

$$\left(T\left(\vec{j}\right) \equiv -\vec{j}\right) \Rightarrow \left(T\left(\vec{A}\right) \equiv -\vec{A}\right)$$

F) a) Si une distribution statique de courant est transformée en son opposée par une isométrie positive (on dit alors qu'elle est anti-invariante par cette isométrie), alors le champ magnétostatique $\vec{B}$ créé par cette distribution de courant est transformé en son opposé par cette isométrie positive:

$$\left(T_+\left(\vec{j}\right) \equiv -\vec{j}\right) \Rightarrow \left(T_+\left(\vec{B}\right) \equiv -\vec{B}\right)$$

b) Si une distribution statique de courant est transformée en son opposée par une isométrie négative (on dit alors qu'elle est anti-invariante par cette isométrie), alors le champ magnétostatique $\vec{B}$ créé par cette distribution de courant est invariant par cette isométrie négative:

$$\left(T_-\left(\vec{j}\right) \equiv -\vec{j}\right) \Rightarrow \left(T_-\left(\vec{B}\right) \equiv \vec{B}\right)$$

<u>3) Applications concrètes :</u>

A) si une distribution statique de charge est invariante par toute translation parallèle à un axe Δ, alors le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est indépendant de la coordonnée définissant la position du point M parallèlement à l'axe Δ

B) si une distribution statique de courant est invariante par toute translation parallèle à un axe Δ, alors le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ sont indépendants de la coordonnée définissant la position du point M parallèlement à l'axe Δ

C) si une distribution statique de charge est invariante par toute rotation d'axe Δ, alors le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est indépendant de la coordonnée angulaire définissant la position du point M autour de l'axe Δ

D) si une distribution statique de courant est invariante par toute rotation d'axe Δ, alors le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ sont indépendants de la coordonnée angulaire définissant la position du point M autour de l'axe Δ

E) si une distribution statique de charge est invariante par symétrie par rapport à un plan Π, alors, en tout point M de ce plan Π, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ appartient au plan vectoriel associé à Π

F) si une distribution statique de courant est invariante par symétrie par rapport à un plan Π, alors, en tout point M de ce plan Π, le champ magnétostatique $B(M)$ est orthogonal au plan vectoriel associé à Π

III) EXEMPLES DE CALCULS DE CHAMPS MAGNÉTOSTATIQUES :

1) Nappe torique de courant :

en coordonnées cylindriques d'axe l'axe du tore:

a) $B(M) = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r} u_\theta$ si M est à l'intérieur du tore

b) $B(M) = 0$ si M est à l'extérieur du tore

2) Nappe solénoïdale de courant ou solénoïde :

a) Définition :

définition: un solénoïde est une nappe de courant cylindrique, de section droite de forme quelconque, les lignes de courant devant être normales aux génératrices du cylindre et le module de j_S devant avoir la même valeur en tout point

c) Solénoïde illimité de forme quelconque :

à l'intérieur : $B(M) = \mu_0 j_s u_z = \mu_0 nIu_z$

à l'extérieur : $B(M) = 0$

3) Fil rectiligne de longueur infinie :

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} u_\theta$$

4) Nappe de courant plane:

$$B(M) = \frac{1}{2}\mu_0 j_s \wedge n(M)$$

IV) DIPÔLE MAGNÉTIQUE :

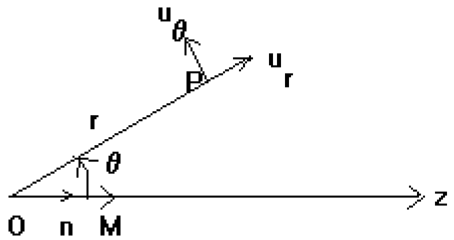
1) Définitions :

définition : on appelle dipôle magnétique un petit circuit plan filiforme, indéformable, parcouru par un courant d'intensité I constante et dont les dimensions sont très petites par rapport à la distance à laquelle on observe le champ magnétostatique créé par le circuit, ainsi que par rapport aux distances caractéristiques de variation du champ magnétique (extérieur) dans lequel peut être placé le dipôle magnétique

définition : on appelle moment magnétique (ou dipolaire) du dipôle magnétique le vecteur $M = ISn$

2) Champ magnétostatique créé par un dipôle magnétique :

théorème : dans un plan méridien, contenant le vecteur n normal à la surface du dipôle, c'est-à-dire aussi le vecteur moment magnétique M, les coordonnées B_r et B_θ du champ magnétostatique B créé par le dipôle magnétique loin de ce dipôle sont :



$$B_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2S\cos\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2M\cos\theta}{r^3}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{S\sin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M\sin\theta}{r^3}$$

3) Généralisation de la notion de moment magnétique à un circuit filiforme quelconque parcouru par un courant d'intensité constante :

a) Equivalence entre un circuit filiforme fermé et un tapis de dipôles magnétiques :

si l'on remplace un circuit filiforme fermé parcouru par un courant d'intensité I constante par un tapis de dipôles magnétiques s'appuyant sur ce circuit, alors :

1) le champ magnétostatique créé en tout point est le même
2) les actions mécaniques subies de la part d'un champ magnétostatique sont les mêmes

b) Moment magnétique d'un circuit filiforme:

définition : si S est une surface ouverte s'appuyant sur le circuit (C), parcouru par un courant d'intensité I constante, alors le moment magnétique M du circuit (C) est, par définition, le vecteur:

$$M = \iint_{S_C} I.n(P)dS(P)$$

(ce vecteur est indépendant de la surface S_C s'appuyant sur (C))

c) Autre expression du moment magnétique d'un circuit filiforme:

lemme : pour tout vecteur uniforme a, on a : $a = \frac{1}{2}\mathrm{rot}_P(a \wedge \overrightarrow{OP})$

théorème : le moment magnétique d'un circuit filiforme (C) parcouru par un courant d'intensité I constante est: $M = \frac{1}{2}\oint_C \overrightarrow{OP} \wedge I\,dl(P)$

4) Généralisation de la notion de moment magnétique à une distribution quelconque de courant :

a) Moment magnétique d'une distribution volumique de courant:

définition : le moment magnétique *M* d'une distribution volumique de courant définie à l'intérieur d'un volume *V* est: $M = \frac{1}{2}\iiint_V \overrightarrow{OP} \wedge j(P)d\tau(P)$

b) Moment magnétique d'une distribution surfacique de courant:

définition : le moment magnétique *M* d'une distribution surfacique de courant définie sur une surface S est :

$$M = \frac{1}{2}\iint \overrightarrow{OP} \wedge j_s(P)dS(P)$$

V) ACTIONS MÉCANIQUES EXERCÉES PAR UN CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE SUR UN CIRCUIT FILIFORME , INDÉFORMABLE ET PARCOURU PAR UN COURANT D'INTENSITÉ CONSTANTE :

1) Méthode générale : intégration des forces de Laplace élémentaires

2) Actions mécaniques exercées par un champ magnétostatique sur un dipôle magnétique :

théorème : les actions subies par un dipôle magnétique de moment magnétique M placé dans un champ magnétostatique B_e sont :

a) la force $F = +\mathrm{grad}(M.B_e)$

b) le moment au point P où se trouve le dipôle : $\Gamma(P) = M \wedge B_e(P)$

3) Actions mécaniques s'exerçant sur un circuit filiforme fermé parcouru par un courant d'intensité I constante et placé dans un champ magnétostatique B_e :

théorème : les actions subies par un circuit filiforme fermé indéformable de moment magnétique M placé dans un champ magnétostatique B_e uniforme sont:

1) la force $F = +\iint \overrightarrow{\mathrm{grad}}(dM.B_e)$ (non nulle en général si B_e n’est pas uniforme)

2) le moment en un point quelconque $\Gamma = M \wedge B_e$