

LES INVARIANCES EN ÉLECTROSTATIQUE

1) Rappel sur les isométries :

définition : une isométrie T est :

- une application affine, c'est-à-dire une application qui, à un point M de l'espace affine associe un point M' de l'espace affine :
si (A) est l'espace affine à trois dimensions : $M \in (A) \quad T(M) = M' \in (A)$
- qui conserve les distances : $\forall M, N \in (A), \|M'N'\| = \|MN\|$

rappel :

- * une isométrie positive est une isométrie dont l'endomorphisme associé est de déterminant égal à +1
- * une isométrie négative est une isométrie dont l'endomorphisme associé est de déterminant égal à -1

rappel : classification des isométries :

- * isométries positives : translations, rotation autour d'un axe
- * isométries négatives : symétries par rapport à un plan

2) Symétries en électromagnétisme :

principe de Curie : tout phénomène physique possède au moins les éléments de symétrie de ses causes

A) Si une distribution de charge statique est invariante par une isométrie, alors le champ électrostatique E créé par cette distribution de charge est invariant par cette isométrie :

schématiquement (et incorrectement !) : $(T(\rho) \equiv \rho) \Rightarrow (T(E) \equiv E)$

signification physique concrète :

notations : isométrie T : $M \in (A) \quad T(M) = M' \in (A)$
endomorphisme associé : t

si $(\forall M, \rho(M') = \rho(M))$, alors : $(\forall M, E(M') = t(E(M)))$

B) Si une distribution statique de charge est transformée en son opposée par une isométrie (on dit alors qu'elle est anti-invariante par cette isométrie), alors le champ électrostatique E créé par cette distribution de charge est transformé en son opposé par cette isométrie :

$(T(\rho) \equiv -\rho) \Rightarrow (T(E) \equiv -E)$

3) Applications concrètes :

- A) si une distribution statique de charge est invariante par toute translation parallèle à un axe Δ , alors le champ électrostatique $E(M)$ est indépendant de la coordonnée définissant la position du point M parallèlement à l'axe Δ (et le potentiel électrostatique est indépendant de la coordonnée selon Δ)
- B) si une distribution statique de charge est invariante par toute rotation d'axe Δ , alors le champ électrostatique $E(M)$ est indépendant de la coordonnée angulaire définissant la position du point M autour de l'axe Δ (et le potentiel électrostatique est indépendant de la coordonnée angulaire autour de Δ)
- C) si une distribution statique de charge est invariante par symétrie par rapport à un plan Π , alors, en tout point M de ce plan Π , le champ électrostatique $E(M)$ appartient au plan vectoriel associé à Π (et le potentiel électrostatique est le même en deux points symétriques l'un de l'autre par rapport à Π)