Électrostatique

Table des matières

1 La charge électrique **1**
1.1 Propriétés . . . 1
1.2 Distributions de charges . . . 1
1.2.1 Distribution volumique . . . 1
1.2.2 Distribution surfacique . . . 1
1.2.3 Distribution linéïque . . . 1

2 Champ électrostatique **1**
2.1 Loi de Coulomb . . . 1
2.2 Champ d'une charge ponctuelle . . . 1
2.3 Principe de superposition . . . 2
2.4 Champ d'une distribution . . . 2
2.5 Lignes de champ . . . 2

3 Invariances et symétries **2**
3.1 Invariances des distributions de charges . . . 2
3.2 Plan de symétrie et plan d'antisymétrie . . . 3
3.3 Conséquences pour le champ électrostatique . . . 3

4 Potentiel électrostatique **3**
4.1 Circulation de E . . . 3
4.2 Potentiel . . . 3
4.3 Potentiel créé par une distribution de charges . . . 4
4.4 Surfaces équipotentielles . . . 4
4.5 Énergie potentielle . . . 4

5 Théorème de Gauss **4**

6 Analogie gravitationnelle **4**

7 Le dipôle électrostatique **5**
7.1 Actions exercées par un dipôle . . . 5
7.2 Actions subies par un dipôle . . . 5

1 La charge électrique

1.1 Propriétés

On appelle **charge** d'une particule une grandeur qui caractérise les interactions électromagnétiques qu'elle exerce ainsi que celles qu'elle subit (voir masse et interaction gravitationnelle).
La charge est une grandeur scalaire pouvant prendre des valeurs positives ou négatives.

La charge est **quantifiée** :

$$q = Ze$$

où Z est un entier relatif et

$$e = 1,6.10^{-19}\,C$$

le coulomb étant l'unité de la charge.

La charge est une grandeur **conservative** : la charge totale d'un système fermé est constante au cours du temps.

La charge totale d'un système ne dépend pas du référentiel dans lequel on la mesure (principe d'**invariance** de la charge).

1.2 Distributions de charges

1.2.1 Distribution volumique

L'approximation des milieux continus permet de définir une **densité volumique de charge** ou **charge volumique** :

$$\rho = \frac{dq}{d\tau}$$

où $dq = \sum q_i$ est la charge contenue dans le volume $d\tau$ petit à l'échelle macro et grand à l'échelle micro :

$$\boxed{dq = \rho d\tau}$$

1.2.2 Distribution surfacique

Si une des 3 dimensions est négligeable par rapport aux deux autres, on peut définir une **densité surfacique de charge** ou **charge surfacique** :

$$\boxed{dq = \rho\, hdS = \sigma dS}$$

1.2.3 Distribution linéïque

Si deux des 3 dimensions sont négligeables par rapport à la troisième, on peut définir une **densité linéïque de charge** ou **charge linéïque** :

$$\boxed{dq = \lambda dl}$$

2 Champ électrostatique

2.1 Loi de Coulomb

Soit q_1 en M_1 et q_2 en M_2

$$\boxed{\mathbf{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{{M_1M_2}^2}\frac{\mathbf{M_1M_2}}{M_1M_2}}$$

avec $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9\, SI$

2.2 Champ d'une charge ponctuelle

Soit q en O et q' en M

$$\mathbf{F}_{q\to q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{OM^2}\frac{\mathbf{OM}}{OM} = q'\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{OM}}{OM^3} = q'\,\mathbf{E}_q(M)$$

où

$$\boxed{\mathbf{E}_q(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{OM}}{OM^3}}$$

est le champ créé par la charge q en M.

2.3 Principe de superposition

Soit q_1 en O_1, q_2 en O_2, q_3 en O_3... De l'addition vectorielle des forces découle le principe de superposition des champs :

$$\mathbf{E}(M) = \sum_i \mathbf{E}_i(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{O_iM}}{O_iM^3}$$

En particulier, la force avec laquelle interagissent deux charges n'est pas modifiée par la présence d'une troisième charge.

2.4 Champ d'une distribution

On découpe la distribution en morceaux assez petits pour pouvoir considérer que la charge dq du morceau est localisée au point P ; cette charge crée alors un champ :

$$\mathbf{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{PM}}{PM^3}$$

Le champ créé par la distribution est alors la somme des champs créés par les morceaux ; la distribution étant continue, on remplace la somme par une intégrale

$$\mathbf{E}(M) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{PM}}{PM^3}$$

pour une distribution volumique :

$$\boxed{\mathbf{E}(M) = \int \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{PM}}{PM^3}}$$

pour une distribution surfacique :

$$\boxed{\mathbf{E}(M) = \int \frac{\sigma(P)dS}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{PM}}{PM^3}}$$

pour une distribution linéïque :

$$\boxed{\mathbf{E}(M) = \int \frac{\lambda(P)dl}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{PM}}{PM^3}}$$

2.5 Lignes de champ

Une **ligne de champ** est tangente en chacun de ses points M au champ $\mathbf{E}(M)$.

Elle vérifie les propriétés suivantes :
1. Les lignes de champ électrostatique divergent à partir des charges positives et convergent vers les charges négatives.
2. Lorsqu'il est défini, le champ électrostatique est nul au point d'intersection de deux lignes de champ (deux lignes de champ ne peuvent donc se couper que si $\mathbf{E}(M) = 0$ ou $\mathbf{E}(M)$ non défini).
3. Les lignes de champ électrostatique d'une distribution
   - partent à l'infini si la distribution est globalement positive
   - proviennent de l'infini si la distribution est globalement négative
   - n'aboutissent ni ne proviennent de l'infini si la distribution est globalement neutre

3 Invariances et symétries

3.1 Invariances des distributions de charges

Une distribution, illimitée dans la direction de l'axe Δ, est **invariante par translation** suivant Δ si, pour tout point M et son translaté M', sa densité de charge vérifie $\rho(M) = \rho(M')$.
exemple : distribution invariante par translation suivant Oz

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta)$$

Une distribution, est **invariante par rotation** autour d'un axe Δ si, pour tout point M et M' obtenu après rotation, sa densité de charge vérifie $\rho(M) = \rho(M')$.
exemple : distribution invariante par rotation autour d'un axe Oz

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$$

Une distribution à **symétrie cylindrique** est telle que :

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$$

(invariance par rotation autour de Oz et invariance par translation suivant Oz)

Une distribution à **symétrie sphérique** est telle que :

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$$

(invariance par rotation autour de $\mathbf{e}_\varphi$ et invariance par rotation autour de Oz)

3.2 Plan de symétrie et plan d'antisymétrie

Une distribution est symétrique par rapport à un plan Π si, pour tout point M il existe un symétrique M', et si sa densité de charge vérifie :

$$\rho(M) = \rho(M')$$

Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan Π^* si, pour tout point M il existe un symétrique M', et si sa densité de charge vérifie :

$$\rho(M) = -\rho(M')$$

3.3 Conséquences pour le champ électrostatique

Nous généralisons les observations des cartes de champ :

$\mathbf{E}$ est transformé en son symétrique par un plan Π

$$\mathbf{E}(M') = sym\,\mathbf{E}(M)$$

d'autre part :

$$\boxed{\mathbf{E}(M \in \Pi) \in \Pi}$$

$\mathbf{E}$ est transformé en son antisymétrique par un plan Π^*

$$\mathbf{E}(M') = -sym\,\mathbf{E}(M)$$

$$\boxed{\mathbf{E}(M \in \Pi^*) \perp \Pi^*}$$

D'autre part, le champ électrostatique (effet) possède au moins les invariances des distributions de charges (cause).

4 Potentiel électrostatique

4.1 Circulation de E

Rappelons l'expression de la force exercée par la charge q en O sur la charge q' en M

$$\mathbf{F} = q'\,\mathbf{E}(M)$$

Calculons le travail de **F** encore appelé circulation de **F**

$$W = \int \mathbf{F}.d\mathbf{OM} = q' \int \mathbf{E}(\mathbf{M}).d\mathbf{OM}$$

Intéressons nous à la circulation de **E**

$$\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{M}).d\mathbf{OM} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{e}_r.dr\,\mathbf{e}_r = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

La circulation de **E** est conservative, elle ne dépend pas du chemin suivi.

Le principe de superposition permet de généraliser ce résultat à une distribution de charge quelconque.

4.2 Potentiel

La circulation de **E** peut donc s'écrire

$$\int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{M}).d\mathbf{OM} = V(A) - V(B)$$

où V est une fonction appelée potentiel électrostatique.
Dans le cas particulier de la charge ponctuelle

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

Le potentiel est défini à une constante près.

Connaissant le potentiel, on peut en déduire le champ par

$$\boxed{\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,V}$$

Un champ de vecteur **E** à circulation conservative est un champ de gradient.

4.3 Potentiel créé par une distribution de charges

Pour une distribution de charges discontinues

$$V(M) = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{P_iM}$$

Pour une distribution volumique

$$\boxed{V(M) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho(P)d\tau}{PM}}$$

Pour une distribution surfacique

$$\boxed{V(M) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma(P)dS}{PM}}$$

Pour une distribution linéïque

$$\boxed{V(M) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda(P)dl}{PM}}$$

4.4 Surfaces équipotentielles

Le champ est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles

$$dV = 0 \Rightarrow \mathbf{E.dOM} = 0$$

Les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants

$$dV < 0 \Rightarrow \mathbf{E.dOM} > 0$$

4.5 Énergie potentielle

Reprenons l'expression du travail

$$W = q'(V(A) - V(B)) = E_p(A) - E_p(B)$$

$$\boxed{E_p(M) = q'V(M)}$$

est l'**énergie potentielle** que possède la charge q' du fait de sa position M dans le champ scalaire V.

L'**énergie potentielle d'interaction** entre deux charges q_1 et q_2 est égale à

$$E_{p_{12}} = q_1 V_2(M_1) = q_2 V_1(M_2) = \frac{1}{2}\left(q_1 V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2)\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{M_1 M_2}$$

5 Théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée $\mathcal{S}$ est égal à la charge totale Q_{int} enfermée dans cette surface divisée par ϵ_0

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}.\mathbf{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Vérifions en calculant le flux sortant d'une surface sphérique de rayon r enfermant une charge ponctuelle q en O :

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}.\mathbf{n}_{ext}\, dS = \oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\mathbf{e}_r.\mathbf{e}_r\, dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\oint dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

6 Analogie gravitationnelle

Tous les résultats précédents ont leur analogue pour la gravitation en remplaçant la charge q par la masse m et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par $-\mathcal{G}$ constante de gravitation.

Le champ de gravitation

$$\mathbf{F} = m'\mathbf{G} \quad avec \quad \mathbf{G} = -\mathcal{G}\frac{m}{r^2}\mathbf{e}_r$$

L'énergie potentielle gravitationnelle

$$E_p = m'V \quad avec \quad V = -\mathcal{G}\frac{m}{r}$$

Le théorème de Gauss

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{G}.\mathbf{n}_{ext} dS = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

7 Le dipôle électrostatique

Un dipôle électrostatique est un système constitué de deux charges ponctuelles opposées dont les dimensions sont petites par rapport à la distance d'observation.

7.1 Actions exercées par un dipôle

Soit les charge $-q$ en $A(z = -\frac{d}{2})$ et $+q$ en $B(z = +\frac{d}{2})$ observées à une distance $r = OM \gg d$. On notera θ l'angle $(\mathbf{e}_z, \mathbf{OM})$.

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM}\right)$$

$$BM^2 = (\mathbf{OM} - \mathbf{OB})^2 = r^2 - rd\cos\theta + \frac{d^2}{4} = r^2\left(1 - \frac{d\cos\theta}{r} + \frac{d^2}{4r^2}\right)$$

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d\cos\theta}{r} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d\cos\theta}{2r}\right)$$

de même

$$\frac{1}{AM} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d\cos\theta}{2r}\right)$$

finalement

$$\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}.\mathbf{e}_r}{r^2}}$$

avec

$$\boxed{\mathbf{p} = qd\mathbf{e}_z = q\mathbf{AB}}$$

moment dipolaire

On calcule le champ électrostatique grâce à

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$$

ou encore

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \qquad E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

ce qui donne

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} \qquad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3} \qquad E_\varphi = 0$$

On pourra vérifier

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\frac{3\mathbf{p}.\mathbf{r}}{r^2}\mathbf{r} - \mathbf{p}\right)$$

7.2 Actions subies par un dipôle

Dans ce qui suit, **E** ne désigne plus le champ créé par le dipôle mais un champ extérieur dans lequel est plongé le dipôle.

Le dipôle subit alors les actions

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} - q\mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OB} \wedge q\mathbf{E} + \mathbf{OA} \wedge -q\mathbf{E} = q\mathbf{AB} \wedge \mathbf{E} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}$$

Nous admettrons l'expression de l'énergie potentielle du dipôle plongé dans le champ extérieur **E**

$$E_p = -\mathbf{p}.\mathbf{E}$$

qui est minimale lorsque le dipôle s'aligne sur le champ.