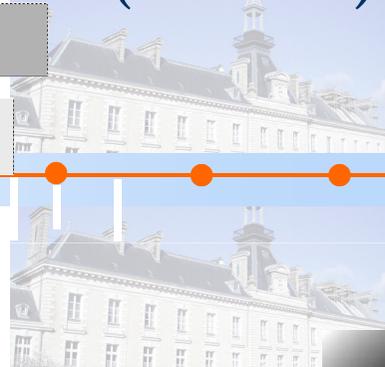




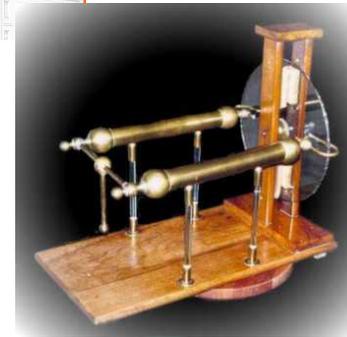
PCSI 1 (O.Granier)

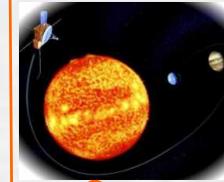
Lycée
Clemenceau



Filtres linéaires

(1^{er} ordre - 2^{ème} ordre)



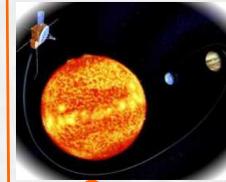


➤ I - Intérêt de l'étude ; définitions générales :

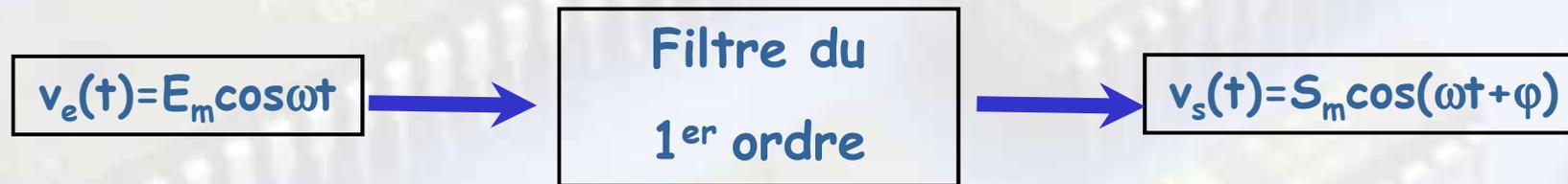


L'analyse harmonique (ou fréquentielle) d'un système est son étude au moyen de sa réponse harmonique $s(t)$, c'est-à-dire de sa réponse en régime permanent sinusoïdal lorsqu'il est soumis à une entrée sinusoïdale $e(t)$ dont on fait varier la pulsation ω .



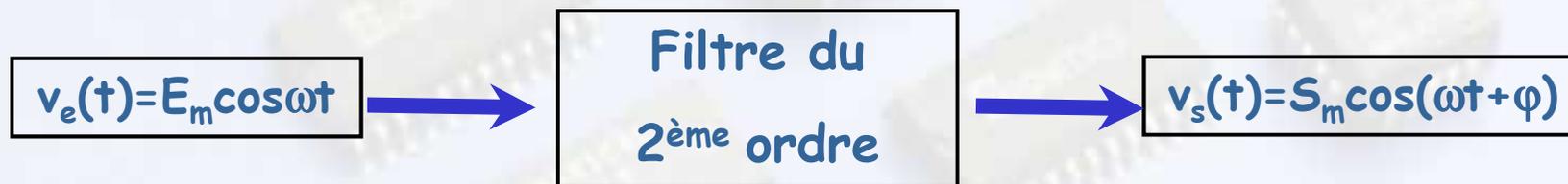


Filtre du 1^{er} ordre : (vu en SI)

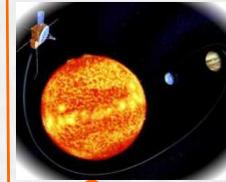


$$\underline{v}_s(t) = \underline{H}(j\omega) \underline{v}_e(t) = \frac{K}{1 + j\omega T} \underline{v}_e(t) \quad \text{(Filtre passe-bas)}$$

Filtre du 2^{ème} ordre : (vu en SI)



$$\underline{v}_s(t) = \underline{H}(j\omega) \underline{v}_e(t) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0}} \underline{v}_e(t) \quad \text{(Filtre passe-bas)}$$



Notations et définitions générales :

$$\underline{v}_e(t) = V_{em} e^{j\omega t} \quad ; \quad \underline{v}_s(t) = V_{sm} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

φ est le **déphasage** de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée du filtre.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{V_{sm}}{V_{em}} e^{j\varphi}$$

$\underline{H}(j\omega)$ est la **fonction de transfert en tension** du filtre :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{V_{sm}}{V_{em}}$$

$G(\omega)$ est le **gain réel**

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) = 20 \log \left(\frac{V_{sm}}{V_{em}} \right)$$

$G_{dB}(\omega)$ est le **gain en décibels**



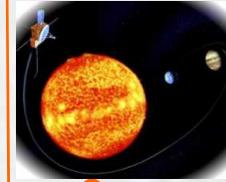
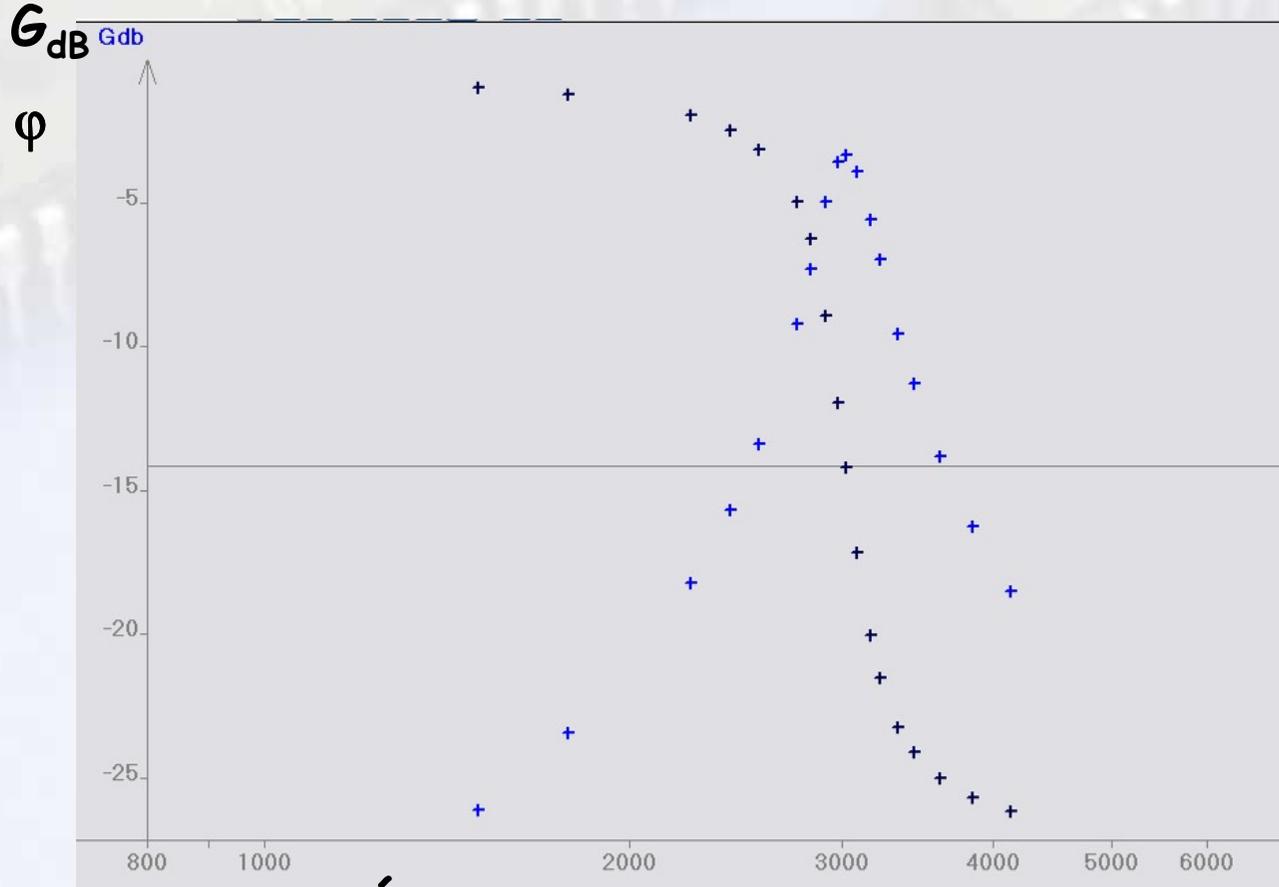
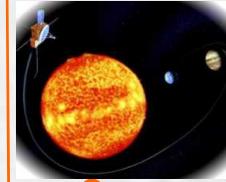


Diagramme de Bode :



Échelle logarithmique pour ω

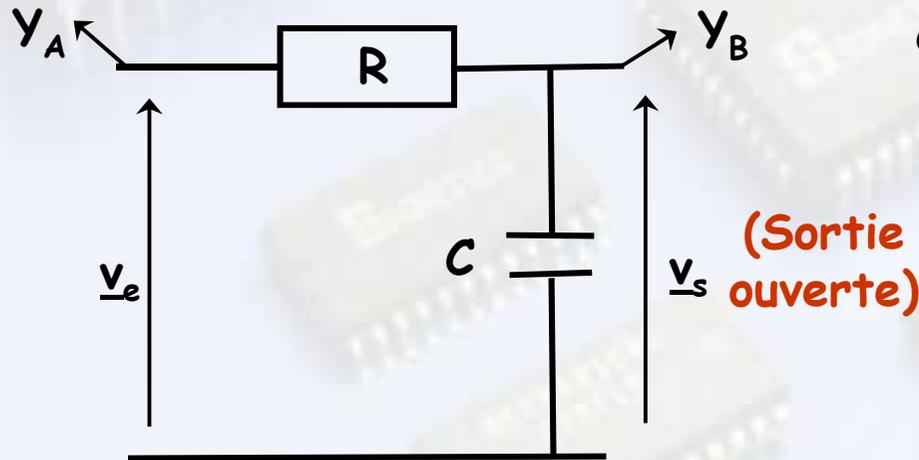




➤ II - Filtrés du 1^{er} ordre (passifs, sans AOP) :

1) Circuit (R,C) :

a) Aux bornes de C (filtre passe - bas) : étude qualitative



En sortie ouverte : (règle du diviseur de tension)

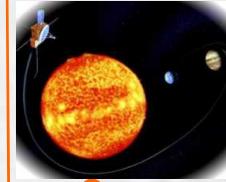
$$\underline{v}_s = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{v}_e$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

On pose : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$





Le gain et le déphasage s'en déduisent :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \left. \begin{array}{l} \tan \varphi = -\frac{\omega}{\omega_0} \\ \cos \varphi > 0 \end{array} \right\} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right]$$

Etude asymptotique du gain :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad (\omega < \frac{\omega_0}{10}) : G(\omega) \approx 1 \quad \text{et} \quad G_{dB} \approx 0 \text{ dB}$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \quad (\omega > 10\omega_0) : G(\omega) \approx \frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{et} \quad G_{dB} \approx -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$$\omega = \omega_0 : G(\omega_0) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad G_{dB} = -20 \log(\sqrt{2}) \approx -3 \text{ dB}$$



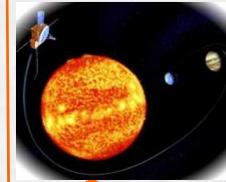
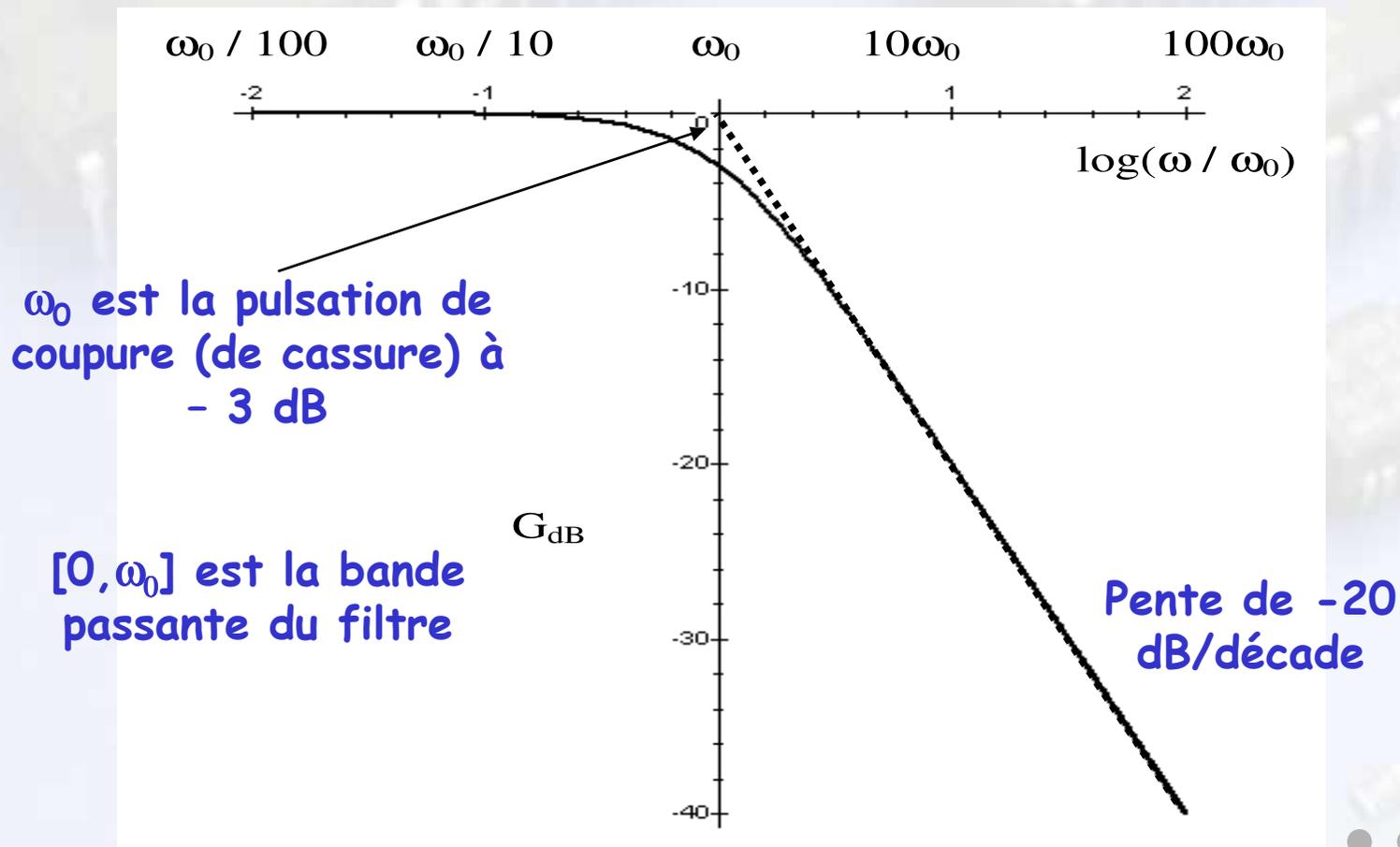


Diagramme de Bode (voir cours de SI) :

Animations Java



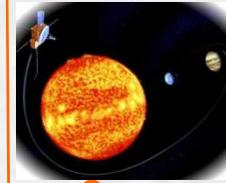
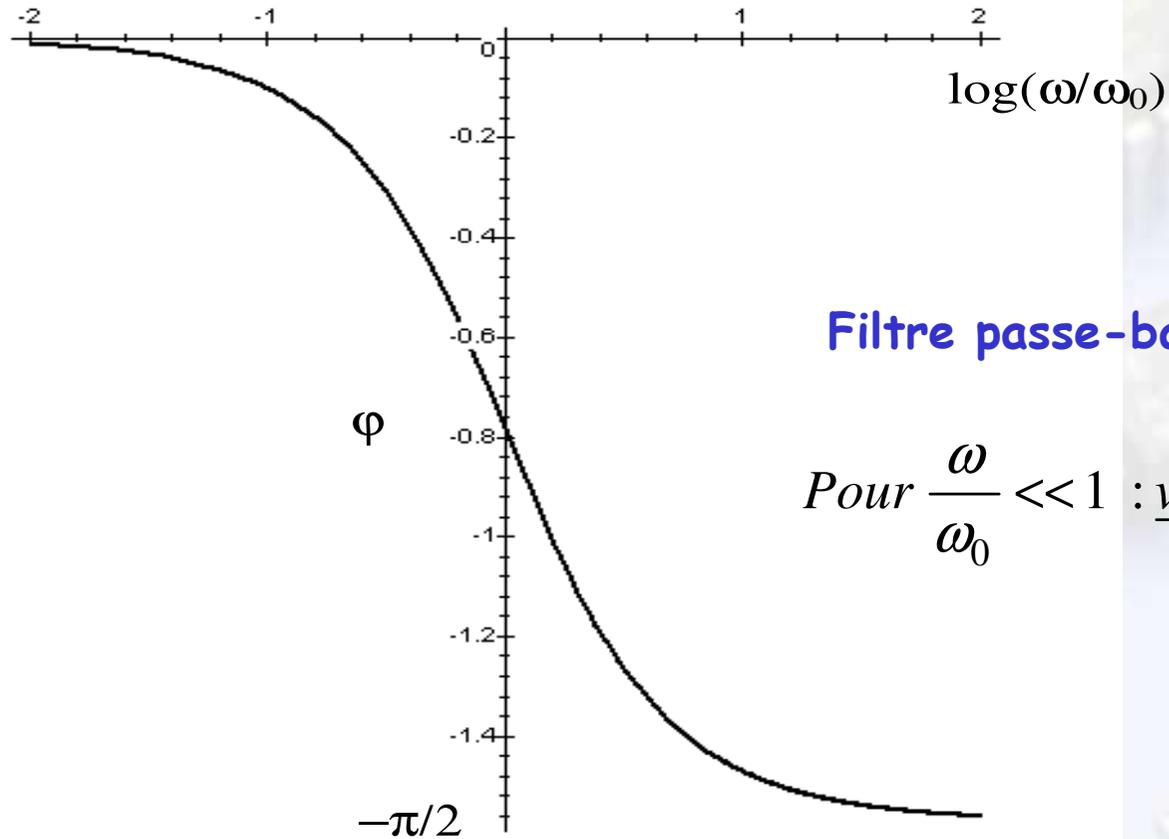
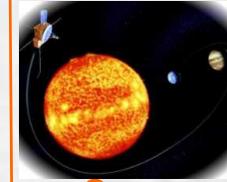


Diagramme de Bode (voir cours de SI) :

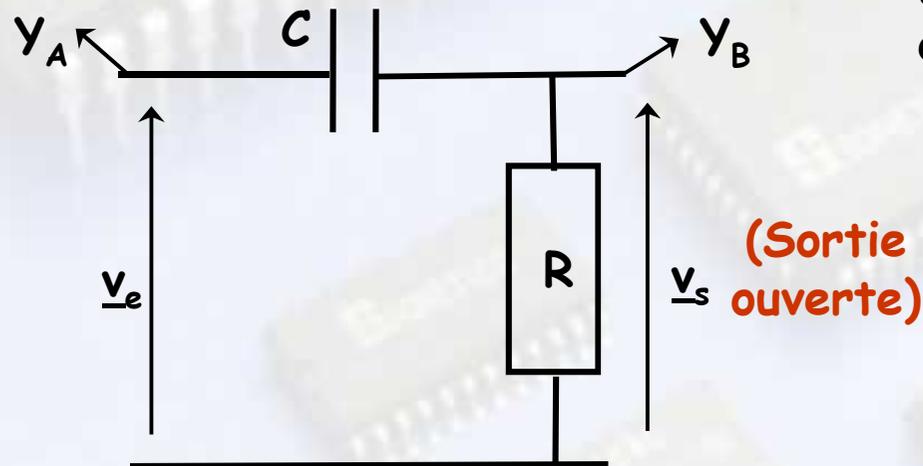
Animations Java





1) Circuit (R,C) :

b) Aux bornes de R (filtre passe - haut) : **étude qualitative**



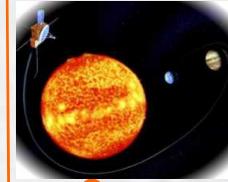
En sortie ouverte : (règle du diviseur de tension)

$$\underline{v}_s = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{v}_e$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

On pose : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}}$$



Le gain et le déphasage s'en déduisent :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad \left. \begin{array}{l} \tan \varphi = \frac{\omega_0}{\omega} \\ \cos \varphi > 0 \end{array} \right\} \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Etude asymptotique du gain :

$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad (\omega < \frac{\omega_0}{10}) : G(\omega) \approx \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad G_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \quad (\omega > 10\omega_0) : G(\omega) \approx 1 \quad \text{et} \quad G_{dB} \approx 0 \text{ dB}$$

$$\omega = \omega_0 : G(\omega_0) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad G_{dB} = -20 \log(\sqrt{2}) \approx -3 \text{ dB}$$



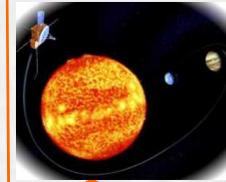
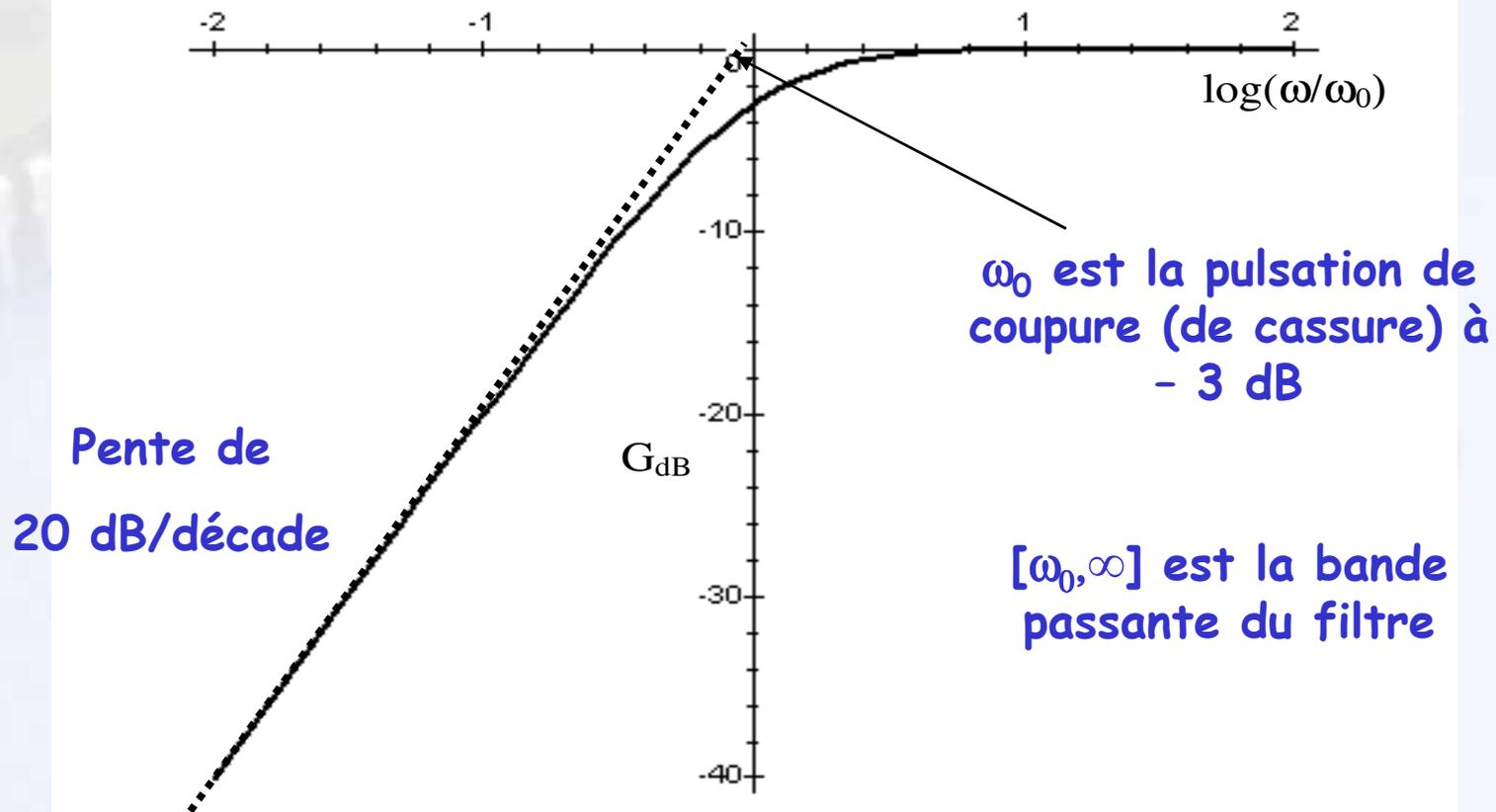


Diagramme de Bode (voir cours de SI) :

Animations Java



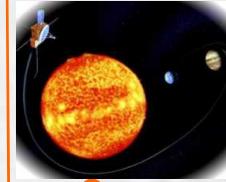
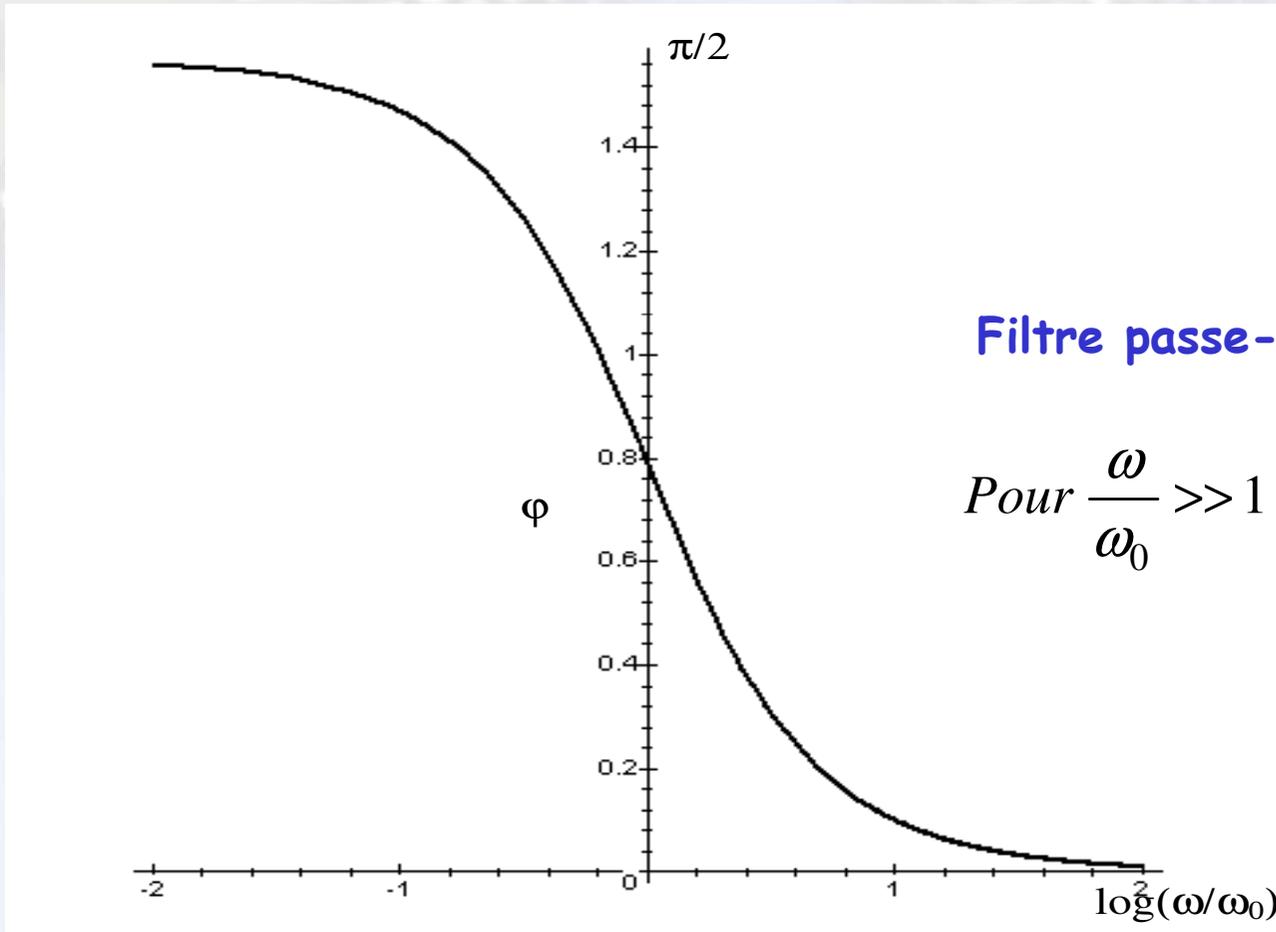


Diagramme de Bode (voir cours de SI) :

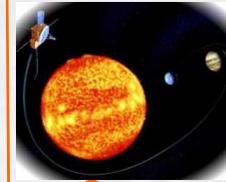
Animations Java



Filtre passe-haut

Pour $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$: $\underline{v}_s = \underline{v}_e$

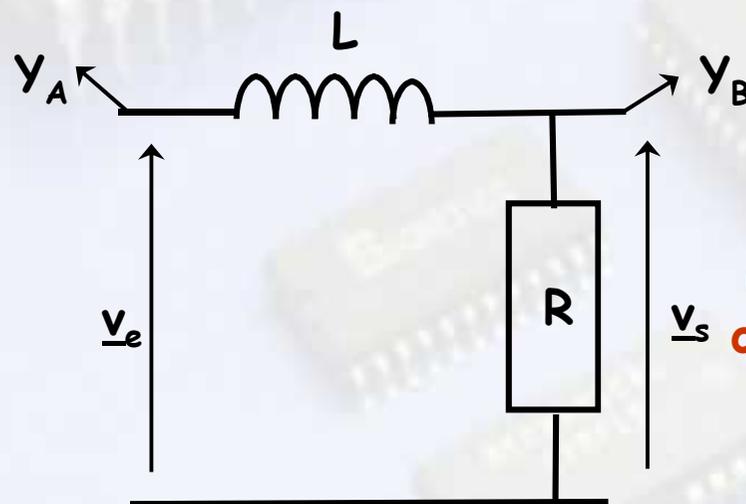




➤ II - Filtres du 1^{er} ordre (passifs, sans AOP) :

2) Circuit (R,L) :

a) Aux bornes de R (filtre passe - bas) : *étude qualitative*



En sortie ouverte : (règle du diviseur de tension)

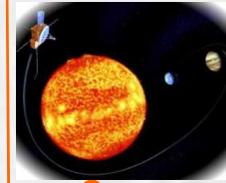
$$\underline{v}_s = \frac{R}{R + jL\omega} \underline{v}_e$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1}{1 + j \frac{L}{R} \omega}$$

On pose : $\omega_0 = \frac{R}{L}$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

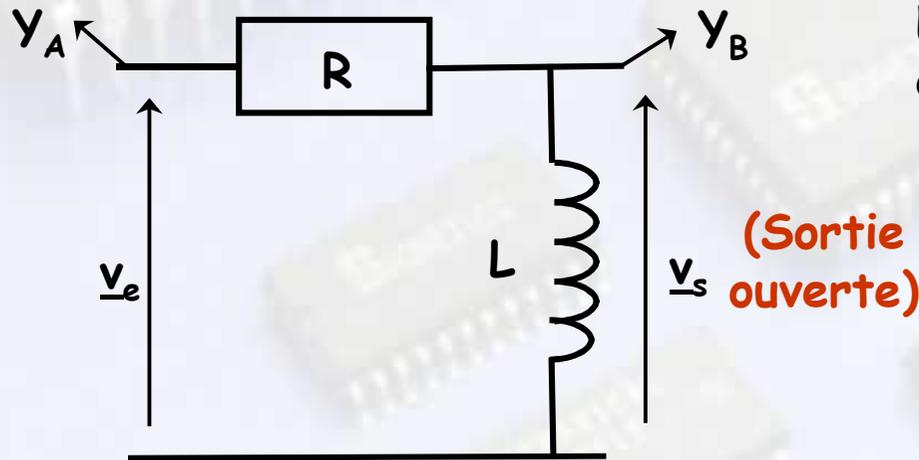




➤ II - Filtres du 1^{er} ordre (passifs, sans AOP) :

2) Circuit (R,L) :

b) Aux bornes de L (filtre passe - haut) : étude qualitative



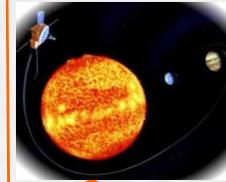
En sortie ouverte : (règle du diviseur de tension)

$$v_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} v_e$$

$$H(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

On pose : $\omega_0 = \frac{R}{L}$

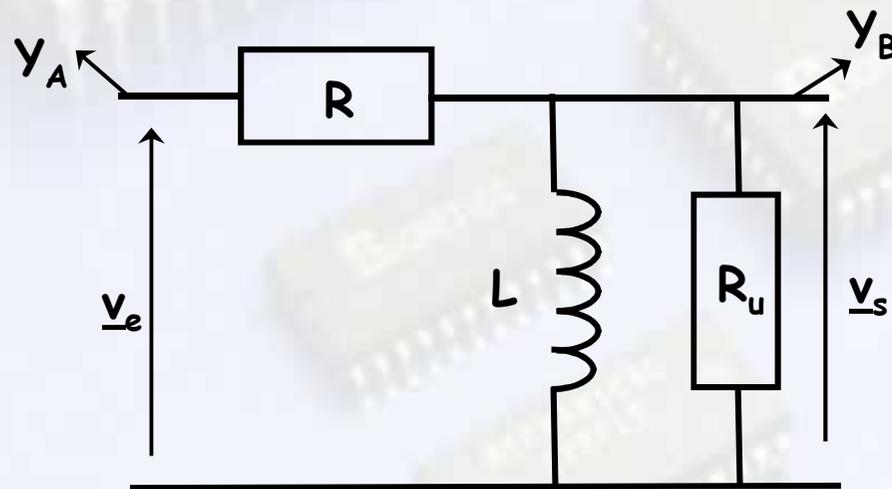
$$H(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$$



➤ II - Filtrés du 1^{er} ordre (passifs, sans AOP) :

3) Cas d'une sortie « non ouverte » :

On reprend l'exemple du circuit (R,L) : la bobine est reliée à une résistance d'utilisation R_u .



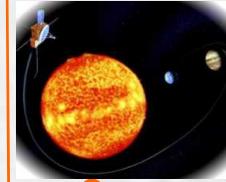
On se ramène à la règle du diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{\underline{z}_{\text{éq}}}{\underline{z}_{\text{éq}} + R} = \frac{1}{1 + R y_{\text{-éq}}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{R_u}\right) - j \frac{R}{L\omega}}$$

$$\frac{1}{\underline{z}_{\text{éq}}} = y_{\text{-éq}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R_u}$$





Soit l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_u}{R + R_u} \frac{1}{1 - j \frac{RR_u}{(R + R_u)L} \frac{1}{\omega}}$$

On pose :

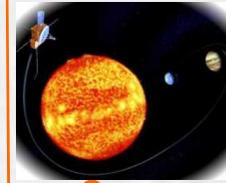
$$\omega_0 = \frac{RR_u}{(R + R_u)L} ; \quad A = \frac{R_u}{R + R_u}$$

$$\underline{H}(j\omega) = A \frac{1}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}}$$

Fonction de transfert « normalisée »
d'un filtre passe - haut, de gain
maximum A et de pulsation de
coupure ω_0 .

Remarque : si $R_u \rightarrow \infty$, $\omega_0 = \frac{RR_u}{(R + R_u)L} \rightarrow \frac{R}{L}$ et $A \rightarrow 1$



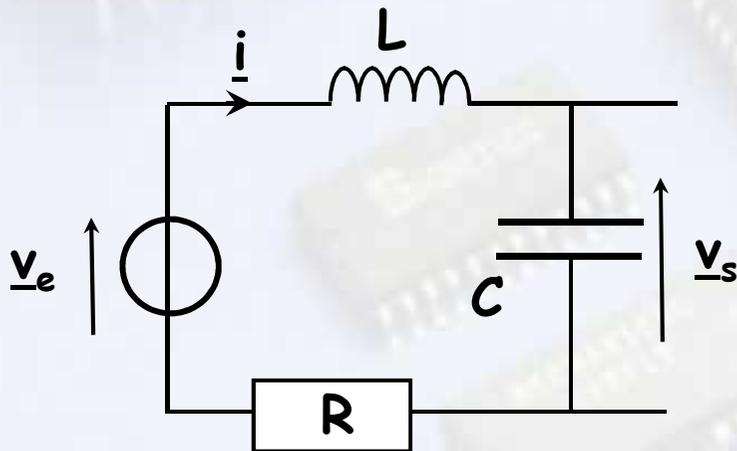


➤ III - Filtres du 2^{ème} ordre (passifs) :

1) Circuit (R,L,C) série :

a) Aux bornes de C en sortie ouverte (filtre passe - bas) :

étude qualitative



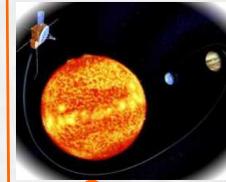
La règle du diviseur de tension donne :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On souhaite écrire cette fonction de transfert sous la forme normalisée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0}}$$





Par identification :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad ; \quad jRC\omega = 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} \quad ; \quad K = 1$$

D'où :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad \sigma = \frac{1}{2}RC\omega_0 = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad ; \quad K = 1$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\sigma \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$
$$\tan \varphi = -\frac{2\sigma \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (\sin \varphi < 0, \varphi \in [-\pi, 0])$$





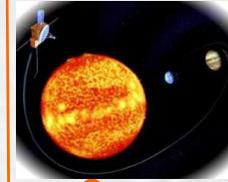
En se référant à l'étude des oscillateurs mécaniques (réponse en élongation), on obtient :

Il y a « résonance de tension aux bornes de C (« Résonance de charge »), c'est à dire correspondant à une tension aux bornes de C maximale, pour une pulsation ω_r du GBF telle que :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\sigma^2}} \quad \left(\text{avec } \sigma < \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Et la tension maximale aux bornes de C à la « résonance de charge » est :

$$V_{s,m}(\omega_r) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}} V_{e,m}$$



Les formules précédentes deviennent, en utilisant le **facteur de qualité Q** à la place du coefficient d'amortissement σ ($Q = 1/2\sigma$, et noter que σ s'identifie au coefficient ξ utilisé en SI) :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{avec} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

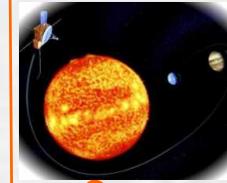
$$V_{s,m}(\omega_r) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} V_{e,m}$$

Remarque : pour de **faibles amortissements** (σ «faible» et Q «grand»), alors :

$$\omega_r \approx \omega_0 \quad \text{et} \quad V_{s,m}(\omega_r) \approx Q V_{e,m}$$

Ainsi, si $Q=10$, l'amplitude lors de la résonance vaut 10 fois celle de l'excitation : la résonance est dite «aiguë» et peut causer la destruction du système oscillant.





Comportement asymptotique du gain :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\sigma \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

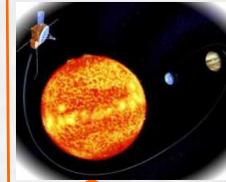
➔ Pour $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ ($\omega < \frac{\omega_0}{10}$), $G(\omega) \approx 1$ et $G_{dB} \approx 0$ dB

➔ Pour $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ ($\omega > 10\omega_0$), $G(\omega) \approx \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ et $G_{dB} \approx -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

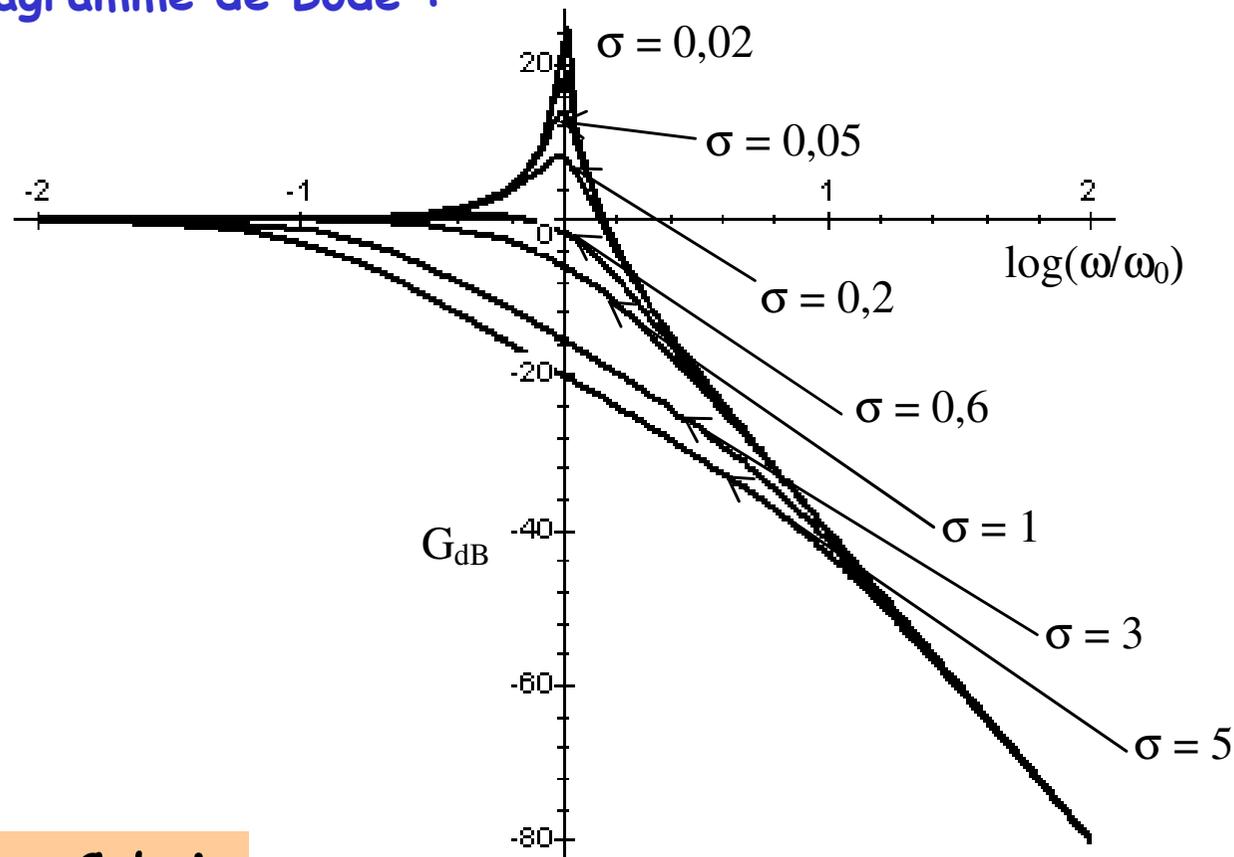
Dans ce dernier cas, on obtient une droite de pente **-40 dB/décade**.

Cette étude permet de tracer le diagramme de Bode dans les intervalles $[0, \omega_0/10]$ et $[10\omega_0, \infty]$.

Dans l'intervalle $[\omega_0/10, 10\omega_0]$, on trace le diagramme à « main levée », en tenant compte de la valeur de σ (existence ou non d'une résonance).



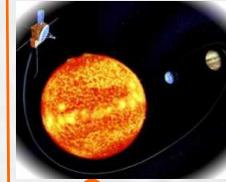
Tracé du diagramme de Bode :



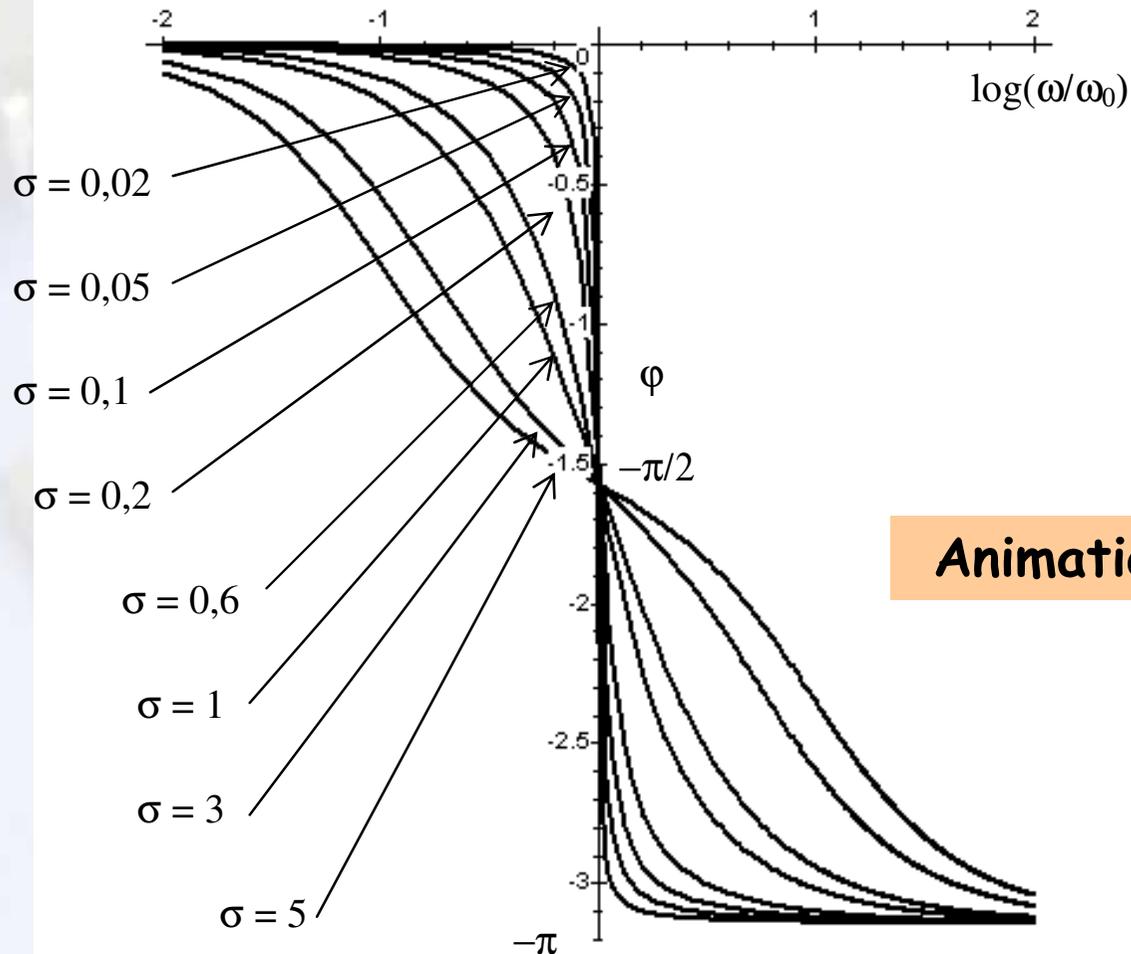
Animation Cabri

Pente de -40 dB/décade



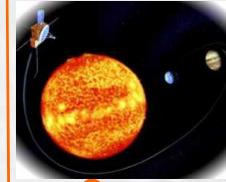


Tracé du diagramme de Bode :



Animation Cabri



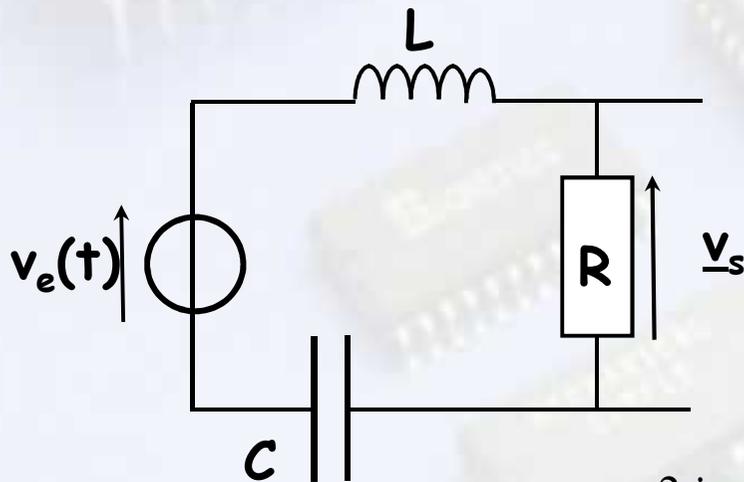


➤ III - Filtrés du 2^{ème} ordre (passifs) :

1) Circuit (R,L,C) série :

b) Aux bornes de R en sortie ouverte (filtre passe - bande) :

étude qualitative



La règle du diviseur de tension donne :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{j}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

On souhaite écrire cette fonction de transfert sous la forme normalisée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0}} K = \frac{1}{1 + \frac{j}{2\sigma} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} K$$





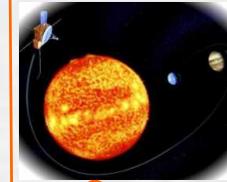
Par identification :

$$\frac{L}{R} = \frac{1}{2\sigma\omega_0} \quad ; \quad \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{2\sigma} \quad ; \quad K = 1$$

D'où (rapport membres à membres) :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad ; \quad \sigma = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad ; \quad K = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + \frac{j}{2\sigma} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \\ G(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\sigma^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \\ \tan \varphi &= -\frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (\cos \varphi > 0, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]) \end{aligned} \right\}$$



Résonance de tension aux bornes de R (« résonance d'intensité ») :

Il y a « résonance de tension aux bornes de R (« résonance d'intensité »), correspondant à une **tension aux bornes de R maximale**, pour une pulsation du GBF égale à la pulsation propre ω_0 du circuit (RLC) série :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

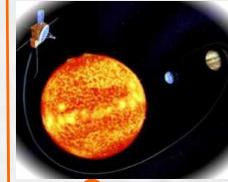
Et la tension maximale aux bornes de R à la « résonance d'intensité » est :

$$V_{s,m} = V_{e,m}$$

Bande passante : (voir définition et calcul en mécanique)

$$\Delta\omega = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \frac{R}{L}$$

$$\Delta\omega = 2\sigma\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$$



Comportement asymptotique du gain :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\sigma^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

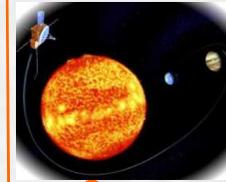
→ Pour $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ ($\omega < \frac{\omega_0}{10}$), $G(\omega) \approx 2\sigma \frac{\omega}{\omega_0}$ et $G_{dB} \approx 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) + 20 \log(2\sigma)$

→ Pour $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ ($\omega > 10\omega_0$), $G(\omega) \approx 2\sigma \frac{\omega_0}{\omega}$ et $G_{dB} \approx -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) + 20 \log(2\sigma)$

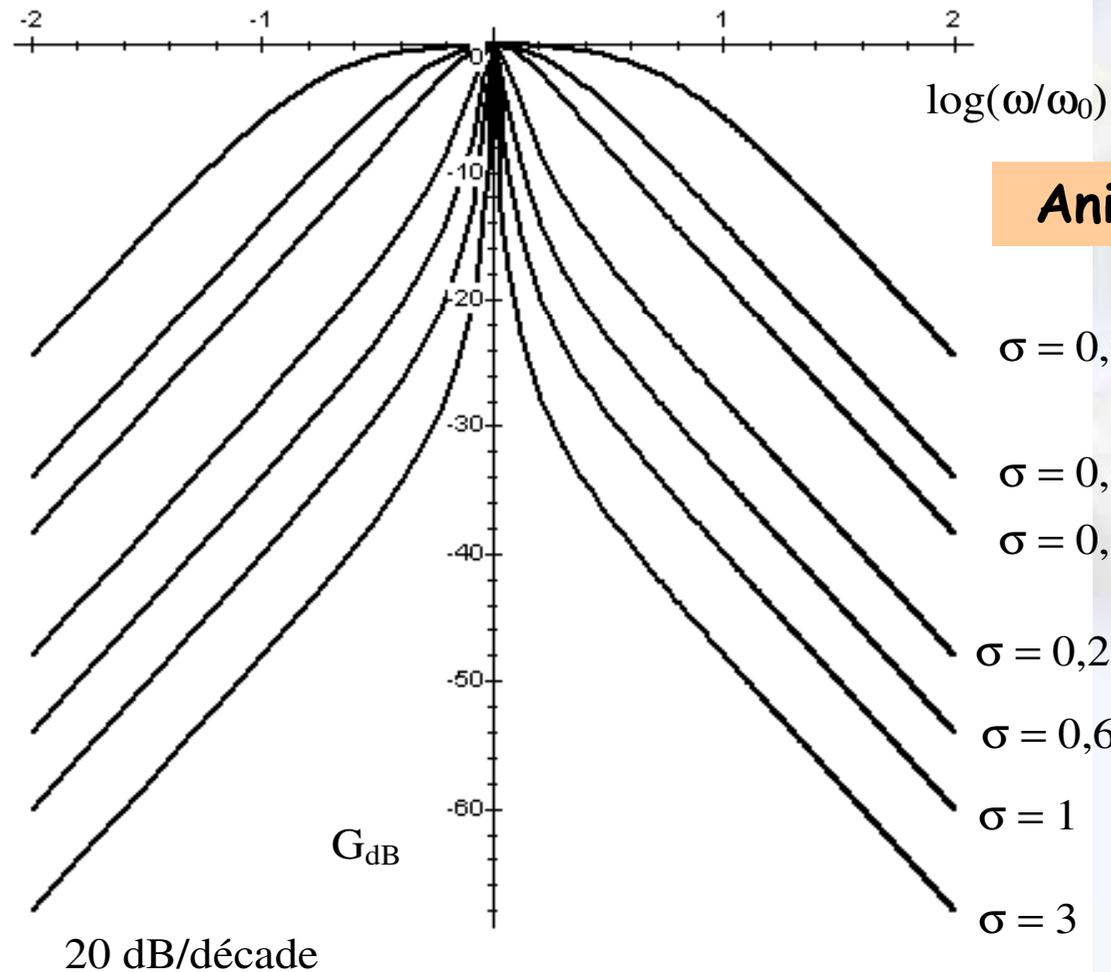
Dans les 2 cas, on obtient des **droites de pente ± 20 dB/décade**.

Cette étude permet de tracer le diagramme de Bode dans les intervalles $[0, \omega_0/10]$ et $[10\omega_0, \infty]$, en tenant compte de la valeur de σ .

Dans l'intervalle $[\omega_0/10, 10\omega_0]$, on trace le diagramme à « main levée », en tenant compte de la valeur de σ .

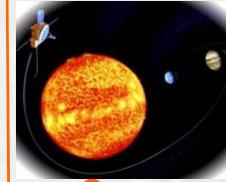


Tracé du diagramme de Bode :

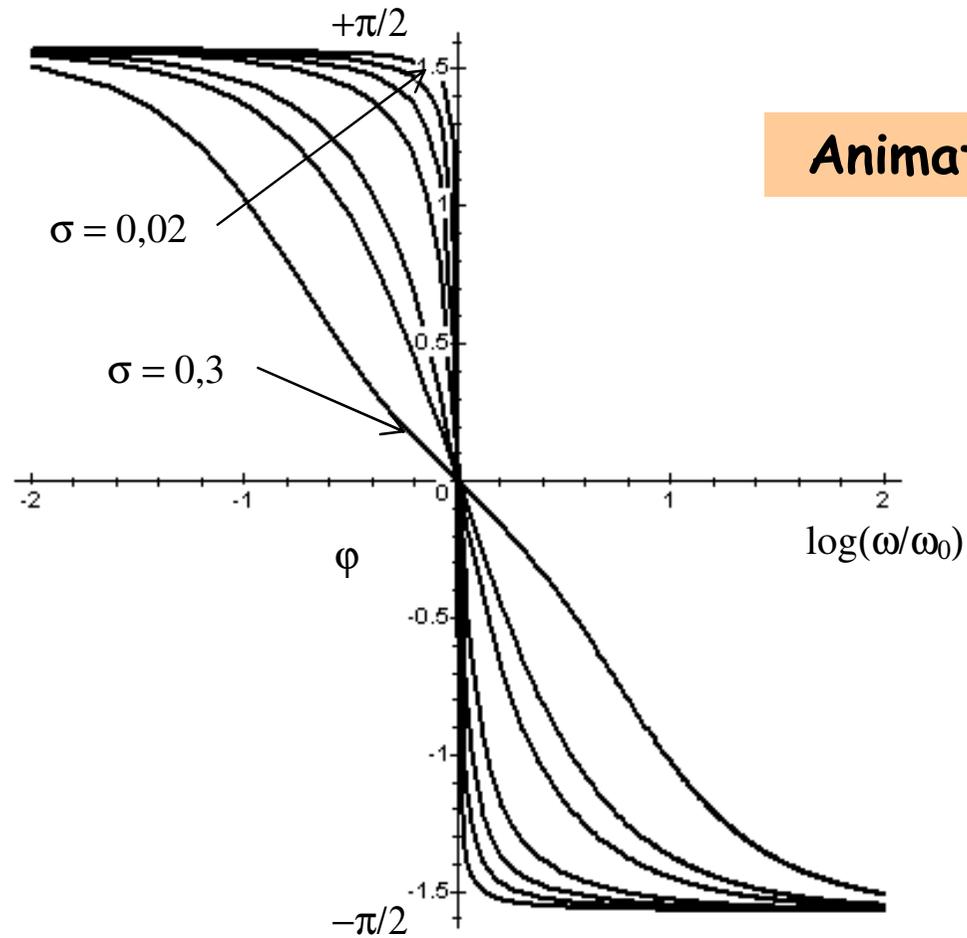


Animation Cabri





Tracé du diagramme de Bode :



Animation Cabri



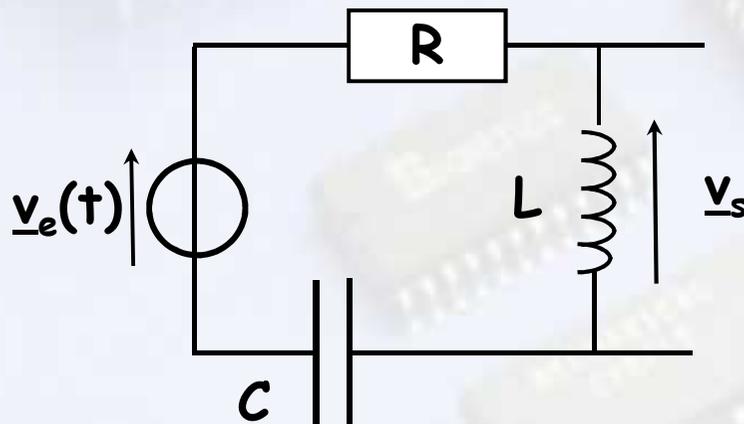


➤ **III - Filtrés du 2^{ème} ordre (passifs) :**

1) **Circuit (R,L,C) série :**

c) **Aux bornes de L en sortie ouverte (filtre passe - haut) :**

étude qualitative



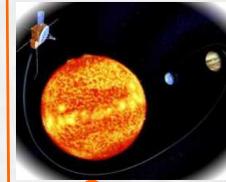
La règle du diviseur de tension donne :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On souhaite écrire cette fonction de transfert sous la forme normalisée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0}} K$$



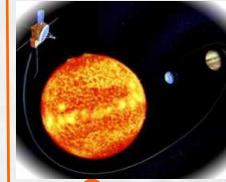


Par identification, on retrouve les mêmes caractéristiques :

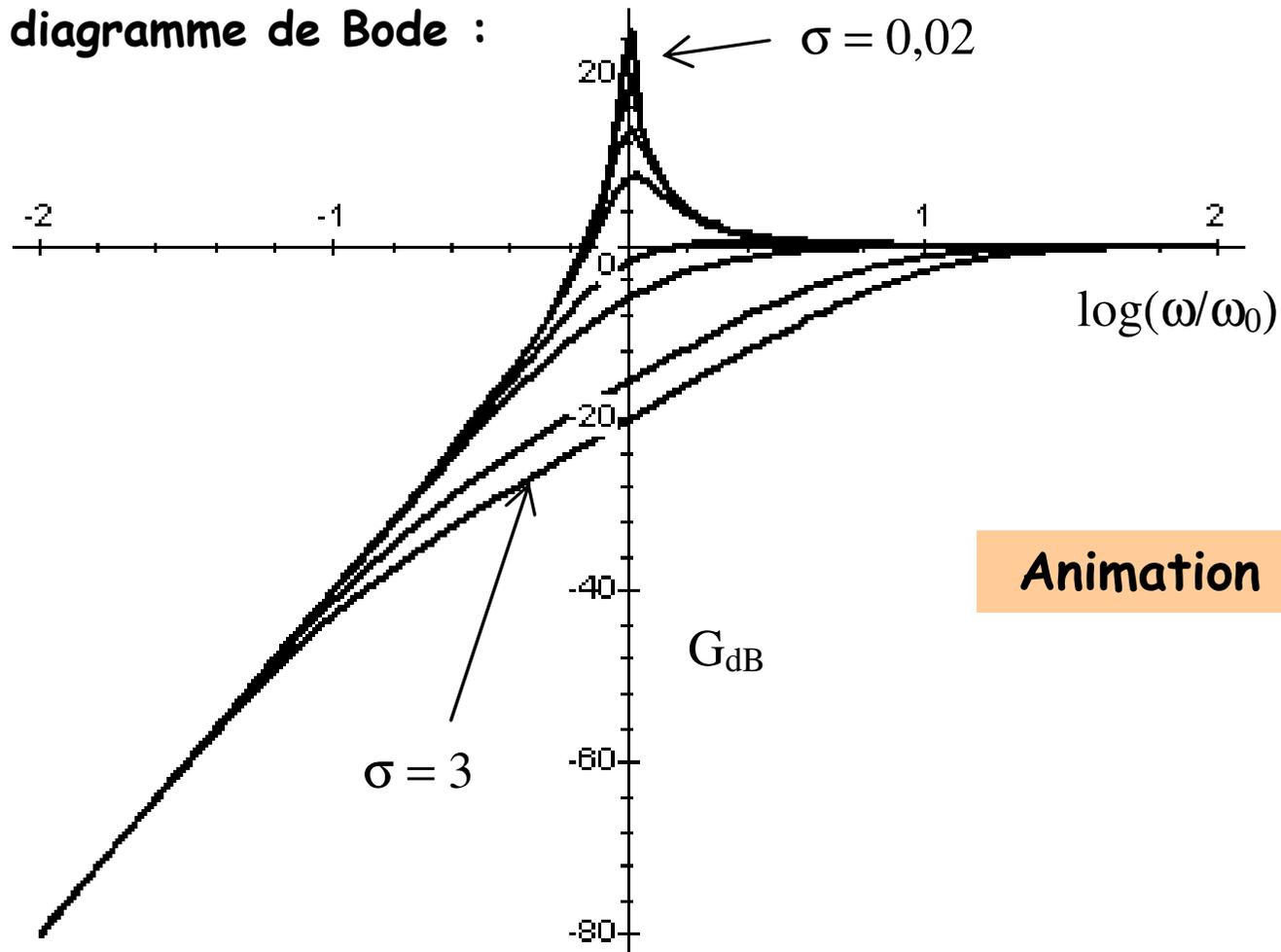
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad \sigma = \frac{1}{2} RC \omega_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad ; \quad K = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} G(\omega) &= \frac{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4\sigma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \\ \varphi_{\text{passe-haut}} &= \varphi_{\text{passe-bas}} + \pi \end{aligned}$$

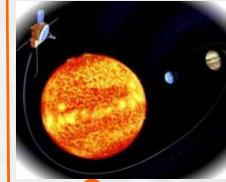
Etude mathématique similaire à celle du filtre passe - bas



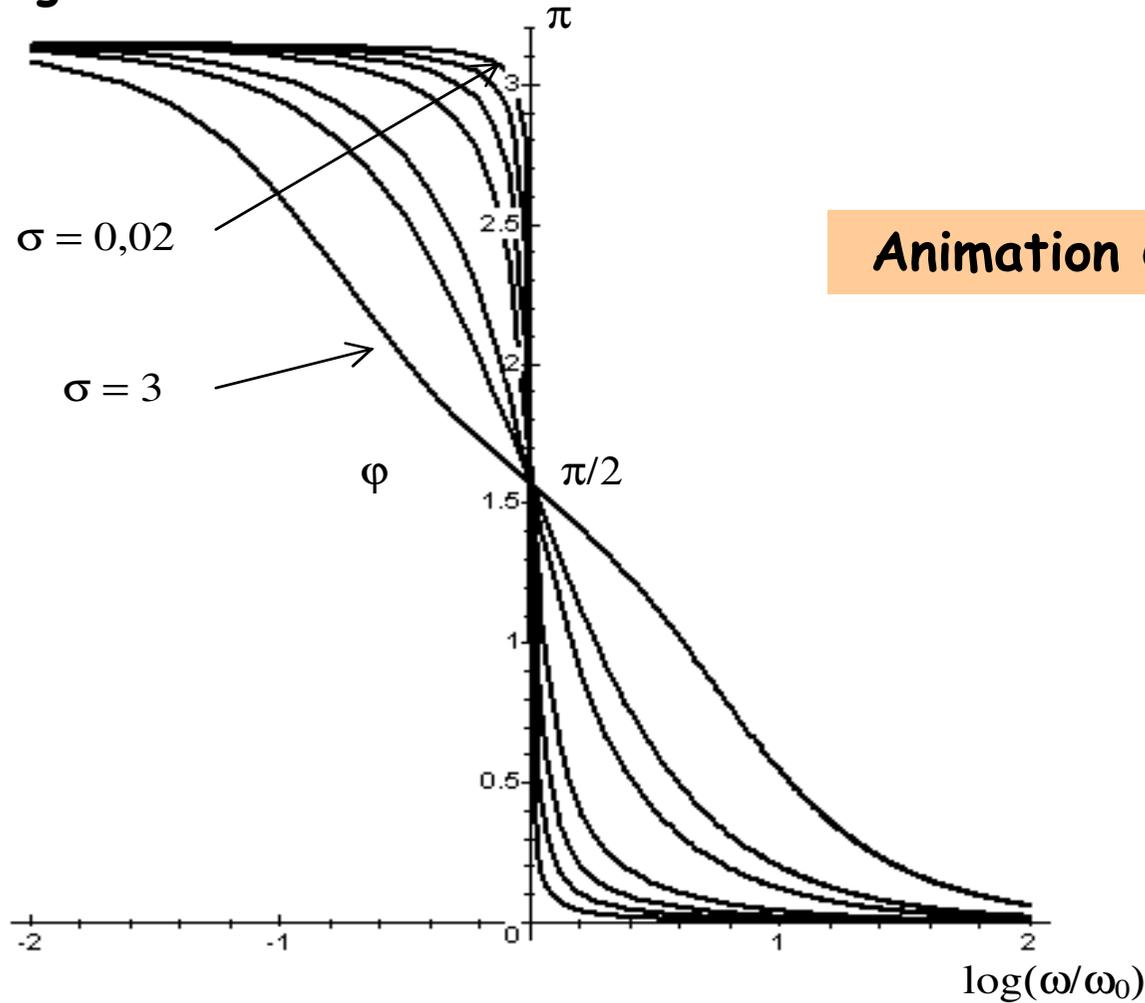
Tracé du diagramme de Bode :

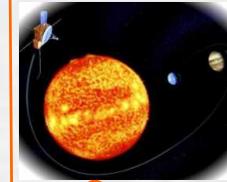


Animation Cabri



Tracé du diagramme de Bode :



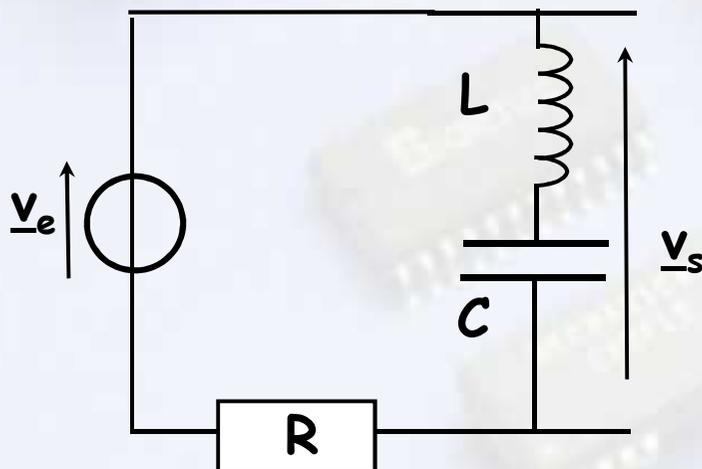


➤ III - Filtrés du 2^{ème} ordre (passifs) :

1) Circuit (R,L,C) série :

d) Aux bornes de (C + L) en sortie ouverte (filtre réjecteur ou coupe - bande) :

étude qualitative



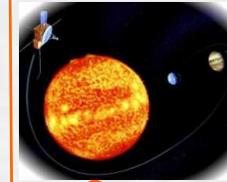
La règle du diviseur de tension donne :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On souhaite écrire cette fonction de transfert sous la forme normalisée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0}} K$$





Par identification, on retrouve les mêmes caractéristiques :

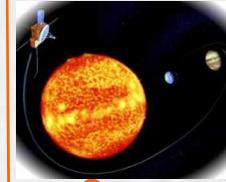
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad \sigma = \frac{1}{2} RC \omega_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad ; \quad K = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0}} \\ \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 + \frac{2j\sigma}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}} \end{aligned} \right\}$$

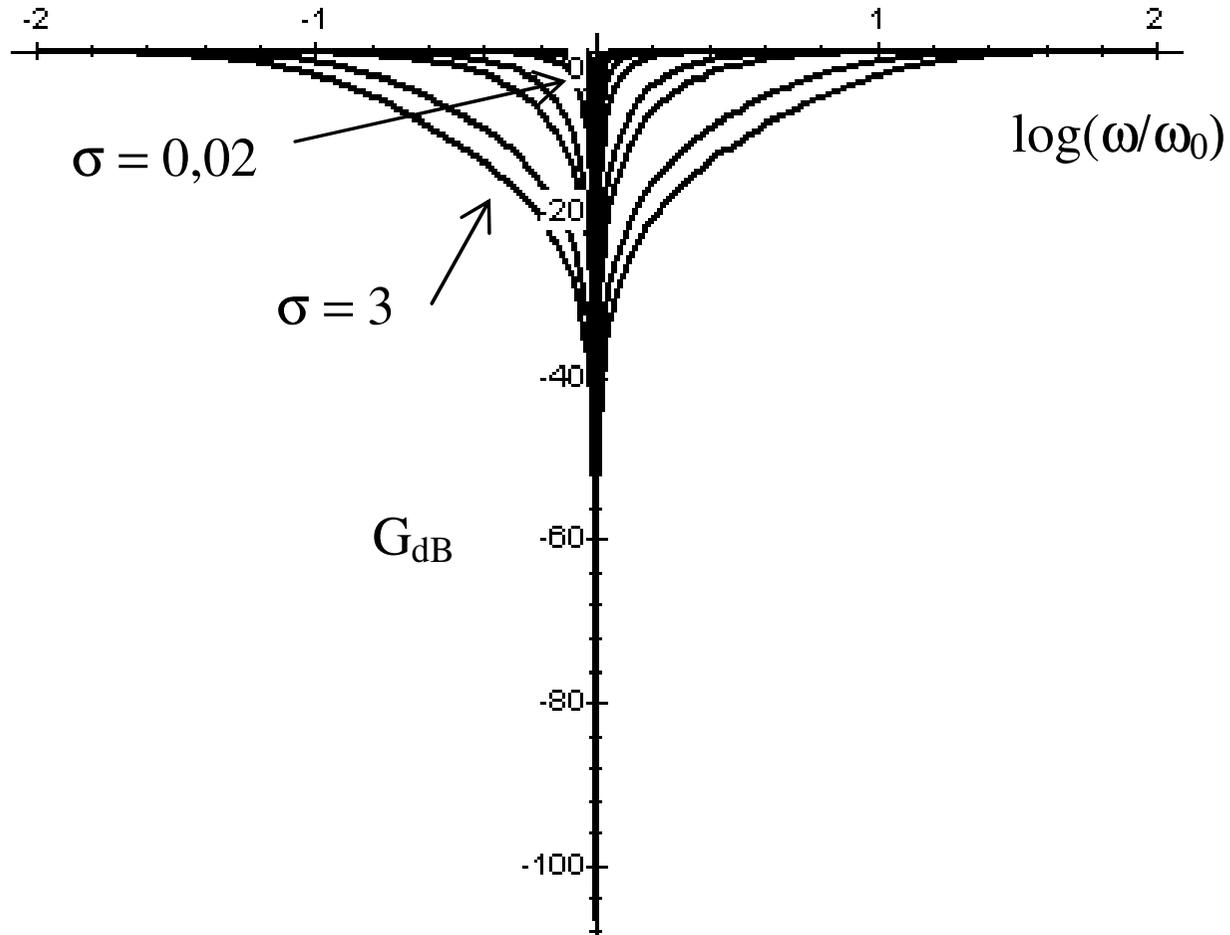
$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$

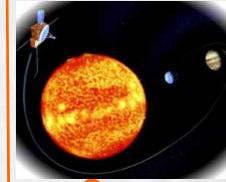
$$\varphi_{\text{réjecteur}} = \varphi_{\text{passe-bas}} \pm \pi$$

Etude mathématique similaire à celle du filtre passe - bande

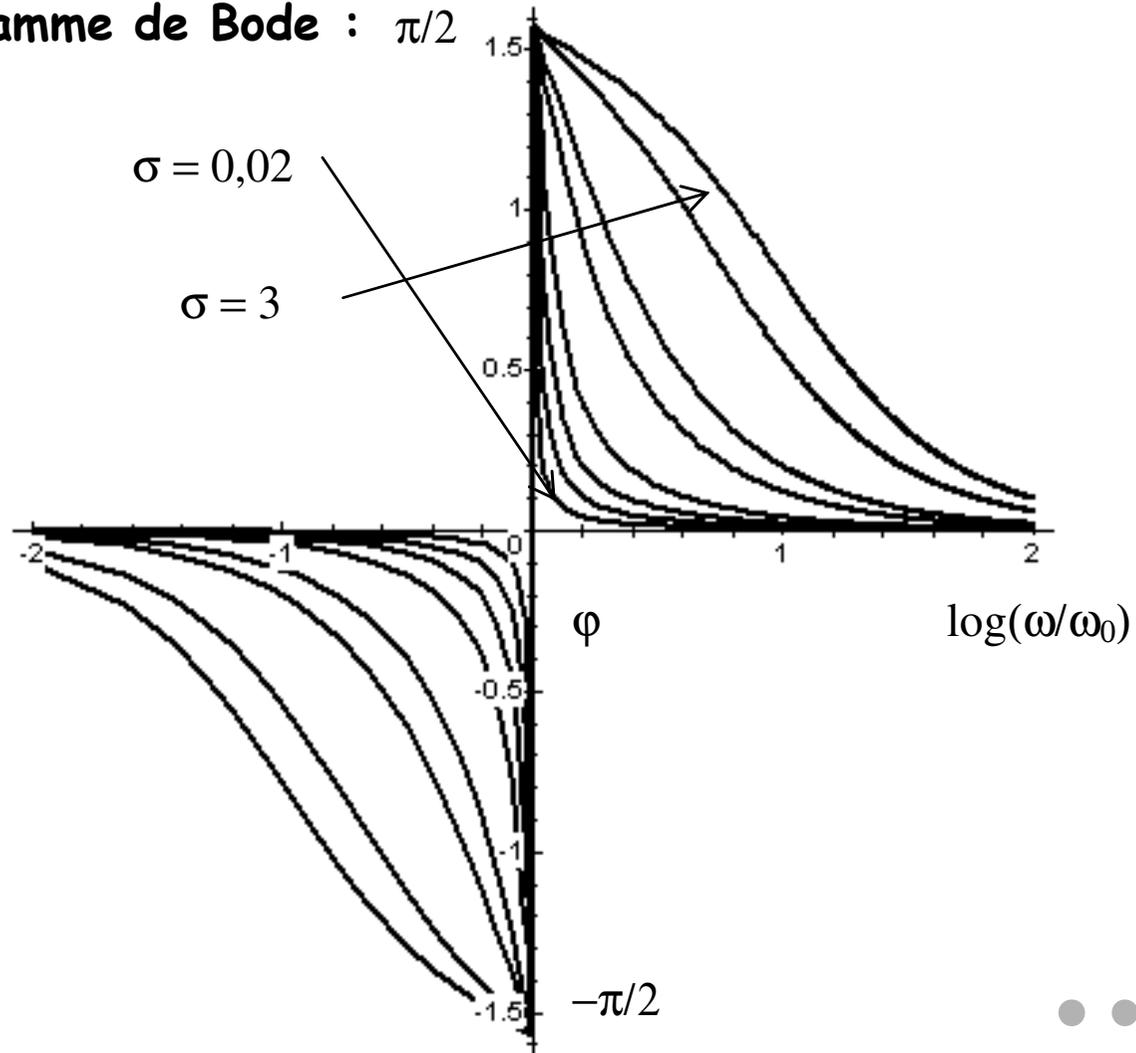


Tracé du diagramme de Bode :





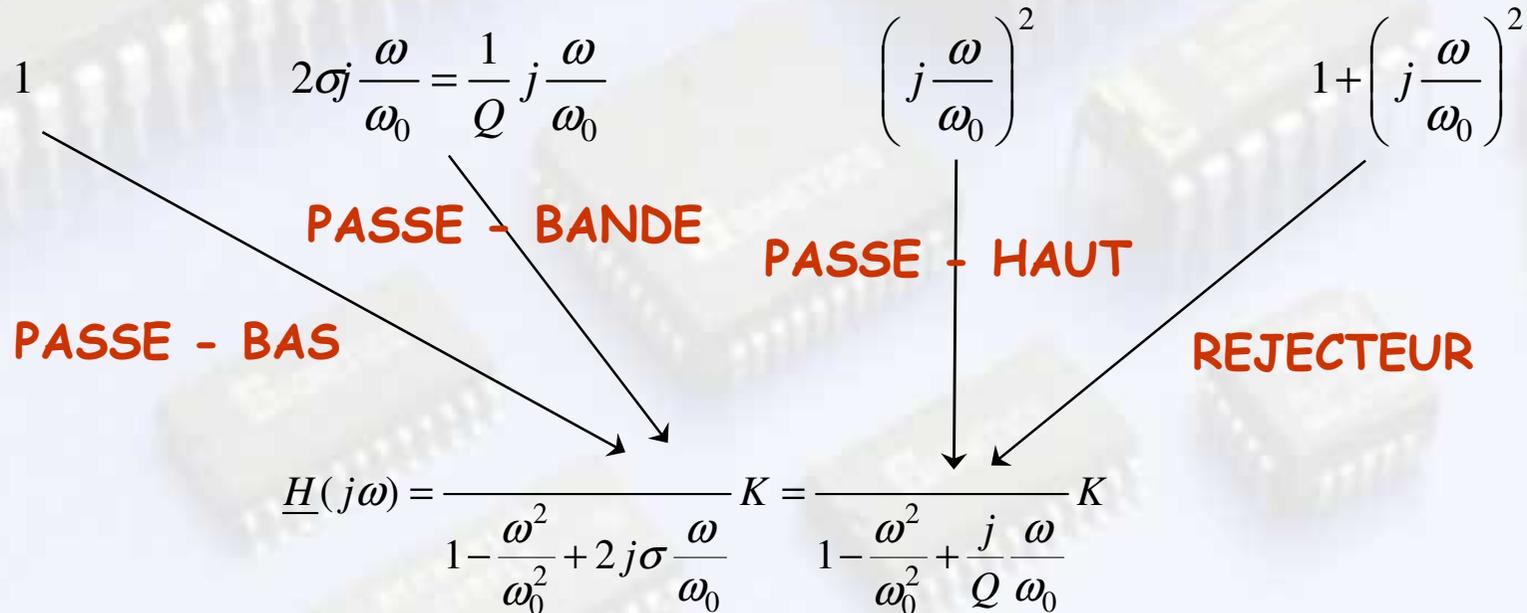
Tracé du diagramme de Bode : $\pi/2$





➤ **III - Filtrés du 2^{ème} ordre (passifs) :**

2) **Conclusion sur les filtres du 2nd ordre :**

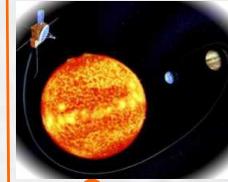


ω_0 : pulsation propre du filtre ; Q : facteur de qualité et σ : facteur d'amortissement ($\sigma = 1/2Q$).

Ces grandeurs dépendent de la nature du filtre (voir exemples à suivre).

Lycée *Clemenceau*

PCSI 1 - Physique



➤ **III - Filtrés du 2^{ème} ordre (passifs) :**

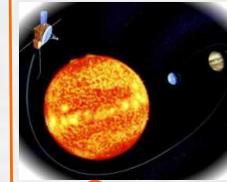
3) Quelques exemples de filtres du 2nd ordre :

**Animation Cabri
(Pont de Wien)**

**Animation Java
(Wien, Colpitts, ...)**

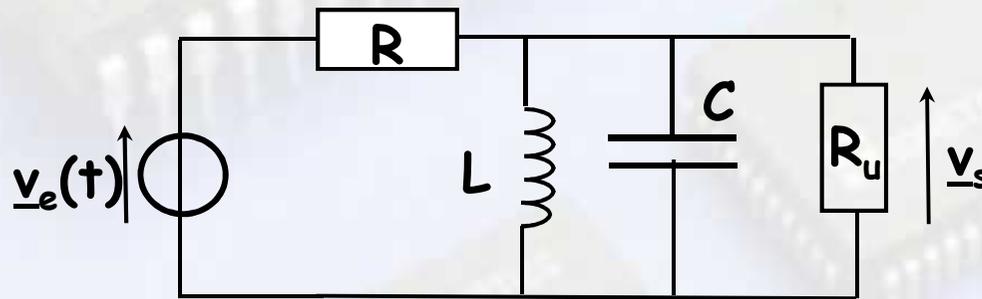
Voir également feuilles de TD





➤ III - Filtrés du 2^{ème} ordre (passifs) :

4) Circuit parallèle (RLC) en sortie « non ouverte » : Etude qualitative



$$y_{-éq} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega + \frac{1}{R_u}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{1 + R y_{-éq}}$$

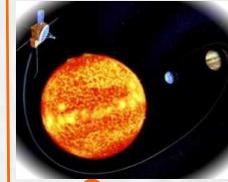
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{R_u}\right) + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ;$$

$$K = \frac{R_u}{R + R_u}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_u} \right) \sqrt{\frac{L}{C}} ; \Delta\omega = 2\sigma\omega_0 = \frac{1}{C} \frac{R + R_u}{RR_u}$$





➤ **IV - Exemples de filtres actifs (du 1^{er} ou du 2^{ème} ordre) :**

1) **Structure de Rauch :**

**Animation Java
(Structure de Rauch)**

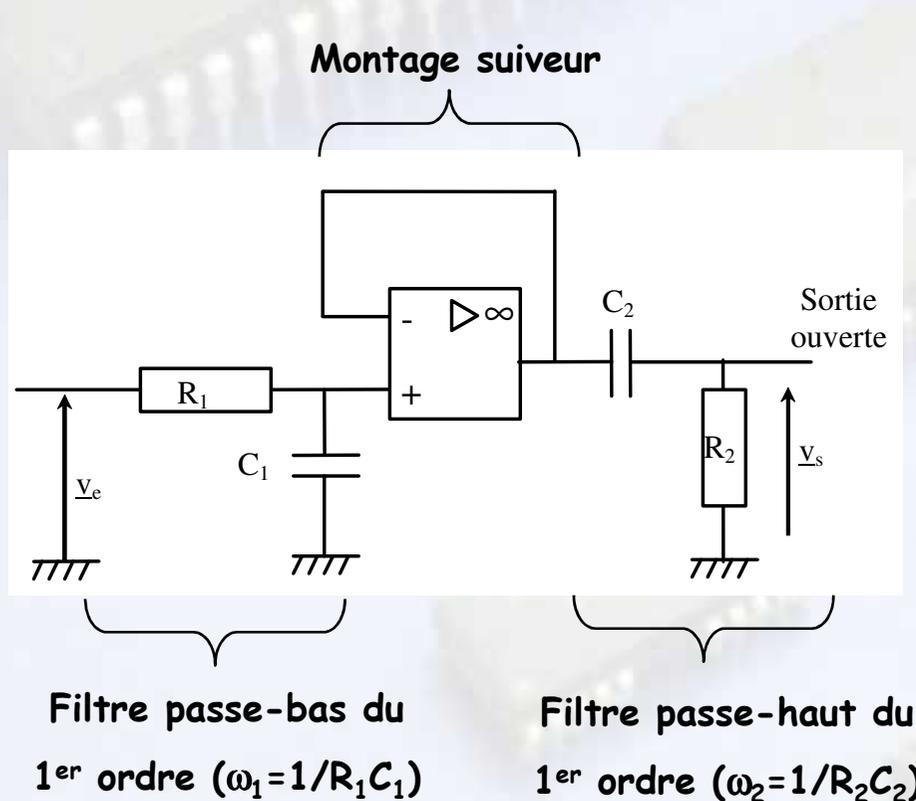
2) **Filtre de Sallen - Kay :**

**Animation Java
(Filtre de Sallen-Kay)**



➤ IV - Exemples de filtres actifs (du 1^{er} ou du 2^{ème} ordre) :

3) Mise en cascade de deux filtres du 1^{er} ordre :

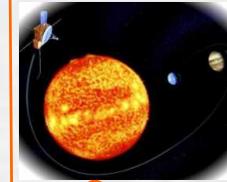


$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \quad ; \quad \underline{H}_2(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

Le montage suiveur permet de multiplier les deux fonctions de transfert (valables en sortie ouverte) :

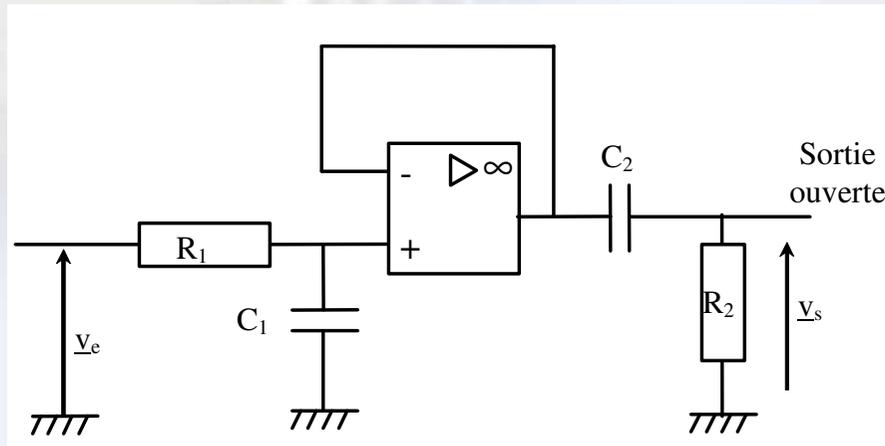
$$\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2 = \left(\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}} \right) \left(\frac{j\frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \right)$$





➤ IV - Exemples de filtres actifs (du 1^{er} ou du 2^{ème} ordre) :

3) Mise en cascade de deux filtres du 1^{er} ordre :



$$\underline{H} = \frac{2\sigma j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2\sigma j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} K$$

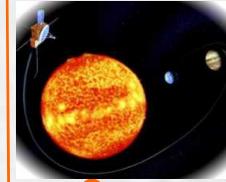
$$K = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

Filtre passe-bande du 2nd ordre peu sélectif ($\sigma > 1$)

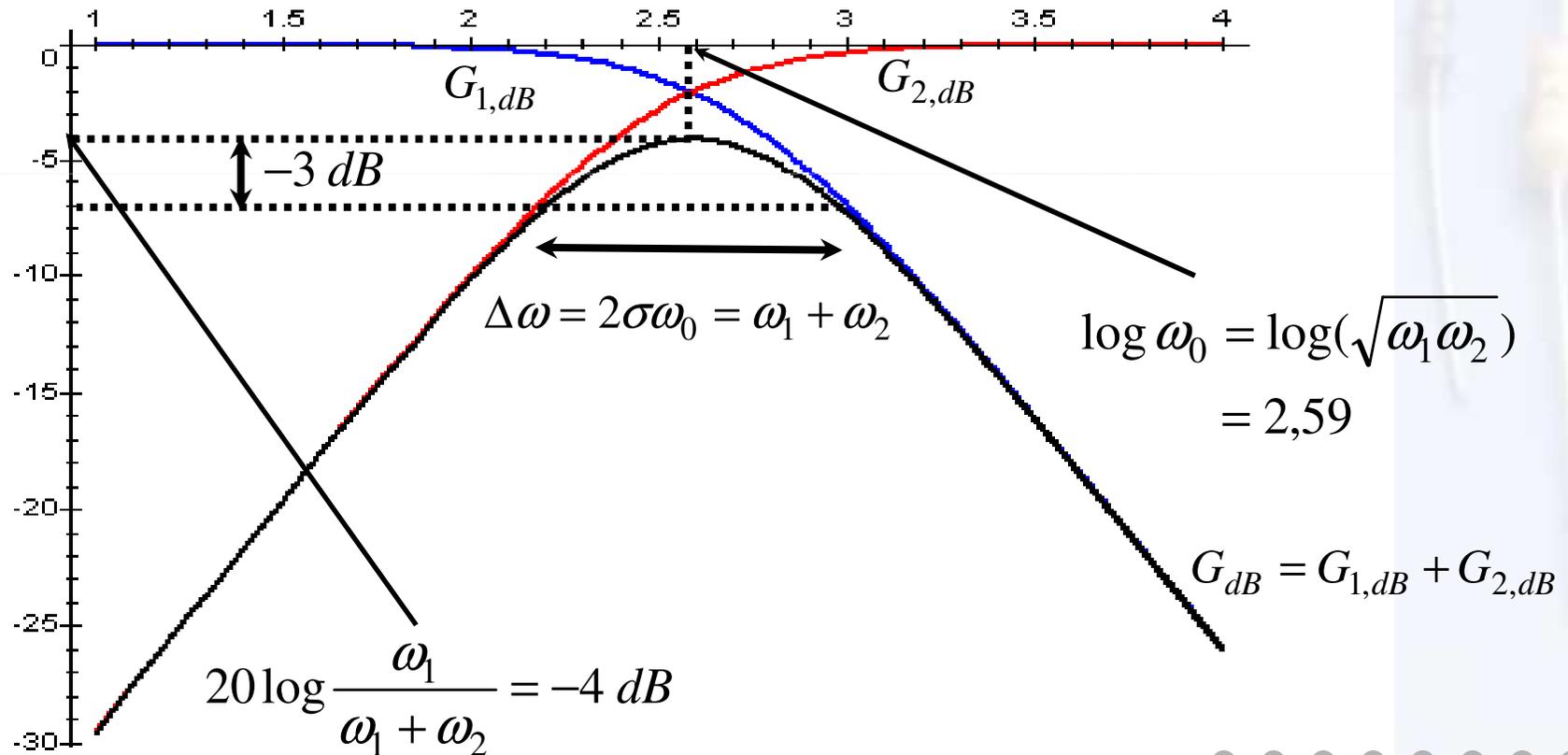
$$\sigma = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\sqrt{\omega_1 \omega_2}} > 1$$

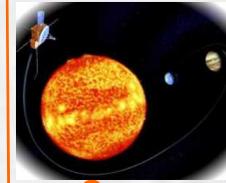




Tracé du diagramme de Bode : $G_{dB} = G_{1,dB} + G_{2,dB}$ et $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

On choisit : $\omega_1 = 500 \text{ rad.s}^{-1}$; $\omega_2 = 300 \text{ rad.s}^{-1}$





➤ V - Etude du régime transitoire à partir de la fonction de transfert :

Exercice n°8 : (stabilité d'un montage)

L'AOP est idéal. On posera :

$$\omega_1 = 1/R_1C_1 ; \omega_2 = 1/R_2C_2$$

$$\omega_c = \sqrt{\omega_1\omega_2} ; 0 < k < 1$$

a) Dans l'hypothèse de la stabilité d'un tel montage, déterminer la fonction de transfert d'un tel montage : $\underline{H}(j\omega) = \underline{v_s} / \underline{e}$

b) Montrer qu'il existe une valeur critique k_c de k telle que le système est instable pour $0 < k < k_c$ et stable pour $k_c < k < 1$.

