LES SIGNAUX ÉCHANTILLONNÉS

I) GÉNÉRALITÉS :

1. Signal numérique :

Un signal numérique est une succession de valeurs numériques obtenues à partir de mesures périodiques d’un signal analogique

2. Architecture d'un système numérique :

Opérations successives : échantillonnage, conversion analogique-numérique (ou : quantification), traitement, conversion numérique-analogique

3. Algorithme :

Exemple d’un filtre passe-bas : $\underline{H} = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \dfrac{1}{1+j\omega\omega}$

équation différentielle associée : $\tau\dfrac{dy}{dt} + y = x$

résolution numérique : $y_n = \dfrac{T_E}{\tau+T_E}x_n + \dfrac{\tau}{\tau+T_E}y_{n-1}$

II) L'ÉCHANTILLONNAGE :

1. Modélisation de la fonction échantillonnage :

Le signal échantillonné $x_{ech}(t)$ est pratiquement constitué d’impulsions équidistantes et de même largeur ε

2. Spectre du signal échantillonné :

Idée : si on observe $x_{ech}(t)$, plus la fréquence d'échantillonnage est grande plus il sera possible de reconstituer correctement x(t)

- Cas simple où : $x(t) = X.\cos\omega t$

Alors :
$$x_{ech}(t) = A_0 X\cos(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X.[\cos((n\Omega_E - \omega)t) + \cos((n\Omega_E + \omega)t)]$$

$$x_{ech}(t) = A_0 X\cos(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n X}{2}.[\cos((n\Omega_E - \omega)t) + \cos((n\Omega_E + \omega)t)]$$

$$x_{ech}(t) = A_0 X\cos(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{T_E}\sin c\left(\frac{n\Omega_E\varepsilon}{2}\right)\frac{X}{2}.[\cos((n\Omega_E - \omega)t) + \cos((n\Omega_E + \omega)t)]$$

Donc, si ε est très petit :

$$x_{ech}(t) \approx \frac{\varepsilon X}{T_E}\cos(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon X}{T_E}.[\cos((n\Omega_E - \omega)t) + \cos((n\Omega_E + \omega)t)]$$

Le spectre du signal échantillonné contient alors les fréquences f et $n.F_E$-f, $n.F_E$+f (n entier)

- Généralisation à un signal x(t) quelconque :

Alors : le signal échantillonné $x_{ech}(t)$ contient toutes les fréquences comprises entre 0 et f_M et toutes les fréquences comprises entre $n.f_E-f_M$ et $n.f_E+f_M$

3. Théorème de Shannon ; phénomène de repliement de spectre :

Résultat qualitatif : si le spectre de x(t) contient toutes les fréquences comprises entre 0 et f_M, alors si a fréquence d'échantillonnage f_E diminue ou si la fréquence maximale du spectre de x(t) f_M augmente, il peut y avoir apparition dans le spectre du signal échantillonné $x_{ech}(t)$ de fréquences n'existant pas dans le spectre de x(t) : c'est le phénomène de repliement de spectre ou aliasing

Résultat quantitatif : théorème de Shannon :

Pour éviter le phénomène de repliement du spectre il faut que la fréquence d'échantillonnage du signal soit supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du signal :

$\boxed{f_E > 2f_M}$ (S) ou (NS)

III) LA QUANTIFICATION :

1. La conversion analogique-numérique (CAN) :

a) Plage de conversion :

La plage de conversion d'un CAN est l'intervalle de tension analogique d'entrée bornée du CAN (par exemple : [0;5V] ou [-5V;+5V] ou [-10;+10V]).

La plage de conversion d'un CAN ne dépend que de ce CAN et non du signal traité.

remarque : si U_M est la valeur maximale du signal entrant dans le CAN, la plage de conversion est $2U_M$

b) Résolution :

La résolution ou pas de quantification ou quantum ou pas d'un CAN est l'intervalle de tension d'entrée à laquelle correspondra un même nombre binaire en sortie du CAN

La résolution d'un CAN ne dépend que de ce CAN et non du signal traité.

remarque : on peut définir aussi, éventuellement, lorsque la grandeur initiale porteuse d'information est d'une nature autre qu'une tension la résolution en cette grandeur : en ce cas la résolution est l'intervalle de cette grandeur auquel correspondra un même nombre binaire en sortie du CAN

c) Dynamique :

La dynamique d'un signal est le rapport entre la tension maximale et la tension minimale que peut prendre ce signal. C'est une grandeur sans dimension.

Pour un signal traité par un CAN, ce sera le nombre binaire le plus élevé divisé par le nombre binaire le plus faible (qui est 1, et non 0, car 0 correspond à un signal nul), donc le nombre de codes binaires différents que peut fournir le CAN moins 1 (correspondant à 0).

Pour un convertisseur à N bits, la dynamique est donc : 2^N-1, qu'on arrondit en général à 2^N et qu'on peut aussi exprimer sous forme logarithmique : dyn = $20\log(2^N)$

d) <u>Relation entre dynamique, résolution et plage de conversion :</u>

définition : on appelle bit de poids faible (en anglais Least Significant Bit, ou LSB), pour un nombre binaire donné, le bit ayant dans une représentation donnée la moindre valeur (celui de droite dans l'écriture habituelle)

La résolution correspond à la variation d'une unité du code binaire : cette unité est égale à la variation du bit de poids le plus faible LSB

Si ΔV_{max} est la plage de conversion et N le nombre de bits du CAN, on a : $\boxed{LSB = \frac{\Delta V_{max}}{2^N}}$

2. <u>Bruit de quantification :</u>

définition : le rapport signal sur bruit S/N est, en décibels :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10\log\left(\frac{\text{valeur quadratique moyenne du signal}}{\text{valeur quadratique moyenne du bruitl}}\right)$$

a) Quantification par défaut

b) Quantification centrée