plan du cours d'électrocinétique

OPÉRATEURS LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOIDAL PERMANENT

I) NOTION D'OPÉRATEUR :

1) Définition générale d'un opérateur :

définition : un opérateur est un système transformant une grandeur d'entrée en une grandeur de sortie

remarque : il existe des opérateurs à plusieurs entrées et/ou à plusieurs sorties

2) Opérateur linéaire :

définition : un opérateur est linéaire si, et seulement si, lorsque deux signaux d'entrée $e_1(t)$ et $e_2(t)$ correspondent à deux signaux de sortie $s_1(t)$ et $s_2(t)$, alors le signal d'entrée $\lambda e_1(t)+\mu e_2(t)$ correspond au signal de sortie $\lambda s_1(t)+\mu s_2(t)$

II) OPÉRATEURS LINÉAIRES RÉGIS PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS :

étude générale : si un opérateur est régi par l'équation :

$$b_0.s+\sum_{k=1}^{m} b_k.\frac{d^k s}{dt^k}=a_0.e+\sum_{i=1}^{n} a_i.\frac{d^i e}{dt^i} \qquad (E)$$

où les coefficients a_0, a_i, b_0, b_k sont des constantes
alors, si l'on pose :

$$b_0.s+\sum_{k=1}^{m} b_k.\frac{d^k s}{dt^k}=0 \qquad (E_0)$$

on a :

1) l'opérateur est linéaire

2) la solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E_0), les conditions initiales intervenant uniquement sur la solution générale de (E_0)

III) OPÉRATEURS LINÉAIRES RÉGIS PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS EN RÉGIME SINUSOIDAL FORCÉ :

1) Utilisation des nombres complexes pour la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants :

pour résoudre l'équation : $$b_0.s+\sum_{k=1}^{m} b_k.\frac{d^k s}{dt^k}=A_0.\cos(\omega t+\psi) \quad (E)$$

(remarque : cette équation est un cas particulier de l'équation (E) du paragraphe précédent lorsque a_k est nul pour k non nul et lorsque e(t) est une fonction sinusoïdale)

1) on s'assurera de la convergence de la solution de l'équation (E_0) homogène associée à (E) (faute de quoi l'étude ci-dessous est sans objet)

2) on cherchera une solution particulière de (E) de la manière suivante :

on résoudra l'équation complexe associée :

$$b_0.\underline{s}+\sum_{k=1}^{m} b_k.\frac{d^k \underline{s}}{dt^k}=A_0.\exp[j(\omega t+\psi)] \qquad (\underline{E})$$

on cherchera alors une solution $\underline{s}$ de ($\underline{E}$) sous la forme : $\underline{s}=\underline{s}^*.\exp[j\omega t]$

on posera habituellement : $\underline{s}^*=s_0.\exp[j\varphi]$ (S_0 réel positif et ϕ réel)

puis on déduira de $\underline{s}$ trouvé : s = Re($\underline{s}$)

3) lorsque la solution générale de (E) est devenue négligeable, la solution générale de (E) se réduit à la solution particulière que l'on vient de déterminer (et qui ne fait pas intervenir de conditions initiales) : il s'agit alors d'un « régime sinusoïdal permanent » ou « forcé »

IV) OPÉRATEURS LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOIDAL PERMANENT :

1) Impédance d'un condensateur et d'une bobine :

a) Définition générale de l'impédance ou de l'admittance d'un dipôle passif :

En régime sinusoïdal permanent, en formalisme complexe, l'impédance $\underline{z}$ d'un dipôle passif est définie, en convention récepteur, par la relation : $\underline{z}=\frac{\underline{u}}{\underline{i}}$

En régime sinusoïdal permanent, en formalisme complexe, l'admittance $\underline{y}$ d'un dipôle passif est définie, en convention récepteur, par la relation : $\underline{z}=\frac{\underline{i}}{\underline{u}}=\frac{1}{\underline{z}}$

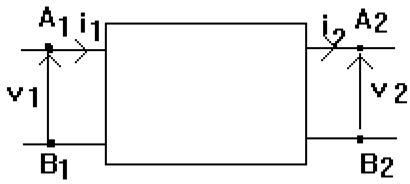
b) Impédance d'un condensateur :

L'impédance d'un condensateur de capacité C est, en régime sinusoïdal permanent de pulsation ω : $\underline{z_C} = \dfrac{1}{jC\omega}$

c) Impédance d'une bobine (non résistive) :

L'impédance d'une bobine d'inductance L est, en régime sinusoïdal permanent de pulsation ω : $\underline{z_L} = jL\omega$

2) Notion de fonction de transfert :



on considère l'opérateur ci-dessus, supposé linéaire et régi par une équation différentielle à coefficients constants dont la solution ne diverge pas, et où le signal d'entrée est la tension sinusoïdale : $v_1 = V_{1\max}.\cos(\omega t) = V_1.\sqrt{2}.\cos(\omega t)$, le signal de sortie étant alors la tension sinusoïdale : $v_2 = V_{2\max}.\cos(\omega t + \varphi) = V_2.\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi)$

définition : si $\underline{v_1}$ et $\underline{v_2}$ sont les grandeurs complexes associées à v_1 et v_2 respectivement, alors la fonction de transfert (ou transmittance) de l'opérateur est par définition :

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}(p) = \frac{\underline{v_2}}{\underline{v_1}} = \frac{V_2}{V_1}.\exp[j\varphi]$$

3) Gain d'un opérateur :

définition : sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations que ci-dessus, on définit :

1) le gain en tension G(ω) de l'opérateur : $G(\omega) = \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \left|\frac{V_2}{V_1}.\exp[j\varphi]\right| = \frac{V_2}{V_1}$

2) le gain en tension logarithmique (ou en décibels (dB)) G_{dB} de l'opérateur :
$G_{dB} = 20.\log_{10}(G(\omega))$

4) Diagrammes de Bode d'un opérateur :

définition : on appelle diagramme de Bode d'un opérateur relatif à l'amplitude le diagramme : $G_{dB} = f(\log_{10}(\omega))$

définition : on appelle diagramme de Bode d'un opérateur relatif à la phase le diagramme : $\varphi = f(\log_{10}(\omega))$

remarque : on appelle diagrammes de Bode asymptotiques des diagrammes de Bode approchés dans lesquels les branches infinies (lorsque $\log_{10}(\omega)$ devient infini) sont remplacées par les asymptotes aux courbes des diagrammes réels

5) Bande passante ; fréquences de coupure à -3dB :

définition : dans le cas où la fonction $G(\omega)$ présente un maximum pour une pulsation ω_0, la bande passante est l'intervalle de fréquences $[f_1;f_2]$ ou de pulsations $[\omega_1;\omega_2]$ à l'intérieur duquel $G(\omega)$ est supérieur à $\frac{G(\omega_0)}{\sqrt{2}}$

définition : dans la définition précédente, les fréquences f_1 et f_2 s'appellent fréquences de coupure à -3dB

6) Opérateurs linéaires fondamentaux définis à partir de leur fonction (c'est-à-dire de leur fonction de transfert):

(voir le cours de première année et la feuille de schémas de montages)

a) Amplificateurs : amplificateur inverseur ou non inverseur

b) Intégrateur

c) Dérivateur

d) Filtres :

α) filtres à action sur l'amplitude :

filtre passe-bande (exemple du circuit RLC série)
filtre coupe-bande
filtre passe-haut
filtre passe-bas

β) filtres à action sur la phase : déphaseur

γ) classification des filtres en fonction de leur ordre :

1) passe-bas du premier ordre : $H(j\omega) = \dfrac{A}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

2) passe-bas du deuxième ordre : $H(j\omega) = \dfrac{A}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0} + \alpha\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \dfrac{H_0}{1 + j\dfrac{x}{Q} + -x^2}$

3) passe-haut du premier ordre : $H(j\omega) = \dfrac{A}{1 + \dfrac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}} = \dfrac{Aj\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

4) passe-haut du deuxième ordre : $H(j\omega) = \dfrac{A}{\left(1 + \dfrac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_0}} + \alpha\left(\dfrac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}\right)^2\right)} = \dfrac{H_0 x^2}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$

5) passe-bande du deuxième ordre :

$$H(j\omega) = \frac{A}{\left(1 + \alpha j\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(1 + \frac{\beta}{j\frac{\omega}{\omega_0}}\right)} = \frac{B}{1 + Q\left(j\frac{\omega}{\omega'_0} - j\frac{\omega'_0}{\omega}\right)} = \frac{B}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

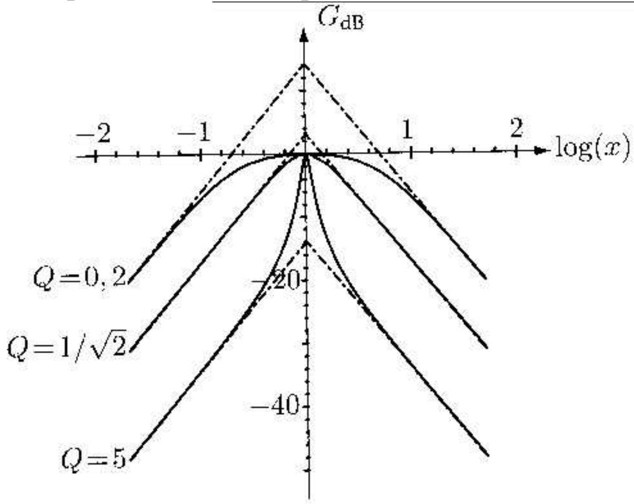
définitions (rappels) : ω'_0 = pulsation propre du filtre

Q = facteur de qualité du filtre

$\sigma = \dfrac{1}{2Q}$ = coefficient d'amortissement du filtre

le phénomène de résonance est le maximum de la fonction G(ω)

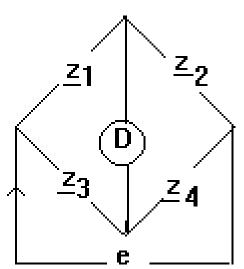
diagramme de Bode relatif à l'amplitude d'un filtre passe-bande d'ordre 2 :



définition : on appelle ordre d'un filtre passe-bas (respectivement : passe-haut) le nombre N tel que g_{dB} soit équivalent, lorsque ω tend vers l'infini (respectivement : vers zéro), à : - 20.N.log ω + cte (respectivement : + 20.N.log ω + cte)

6) Pont de Wheatstone :

définition : un pont de Wheatstone est le circuit ci-dessous :



D = détecteur de tension (entre A et B)

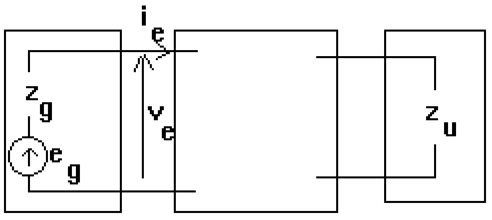
définition : on dit que le pont est équilibré si, et seulement si : $i_{détecteur} = 0$

théorème : le pont est équilibré si, et seulement si: $\underline{z}_1 . \underline{z}_4 = \underline{z}_2 . \underline{z}_3$

V) IMPÉDANCES D'ENTRÉE ET DE SORTIE D'UN OPÉRATEUR ; SCHÉMA ÉQUIVALENT EN ALTERNATIF :

1) Impédance d'entrée :

a Définition :



l'impédance d'entrée du montage est :

$z_e = v_e / i_e$

b) Remarques importantes :

1) z_e est indépendant de la source
2) z_e dépend de l'opérateur et de la charge

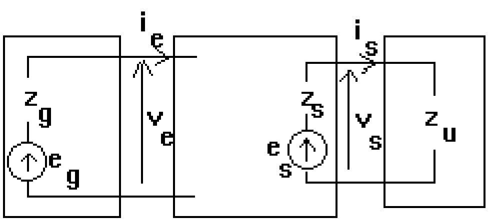
c) Exemples : diviseur de tension, diviseur de courant

d) Intérêt de la notion d'impédance d'entrée

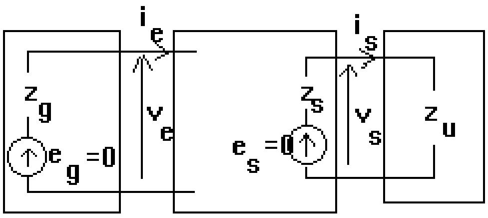
2) Impédance de sortie :

a) Définition :

l'impédance de sortie du montage est l'impédance du générateur de tension ou de courant auquel est équivalente la sortie de l'opérateur



b) Calcul et mesure dans le cas important où l'opérateur est un opérateur multiplication par une constante :



théorème: $z_S = v_S/i_S$ **si $e_g = 0$**

c) Calcul et mesure dans le cas général :

théorème : $z_S = v_S/i_S$ **si la source est éteinte**

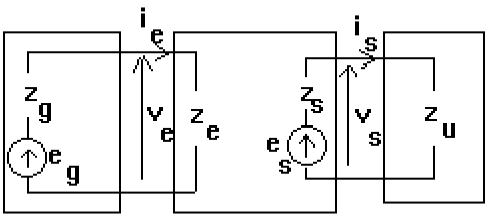
d) Remarques importantes :

1) z_S est indépendant de la charge
2) z_S dépend de l'opérateur et de la source

e) Exemples : diviseur de tension, diviseur de courant, sortie d'un amplificateur opérationnel idéal

f) Intérêt de la notion d'impédance de sortie

3) Schéma équivalent à un opérateur en alternatif:



VI) PUISSANCE EN RÉGIME SINUSOÏDAL :

1) Puissance instantanée reçue par un dipôle :

théorème : en convention récepteur, la puissance instantanée P(t) reçue par un dipôle parcouru par le courant i(t) et aux bornes duquel règne la tension u(t) est : P(t) = u(t).i(t)

2) Puissance moyenne ou réelle :
définition : la puissance moyenne Pm reçue par un dipôle est: Pm = < P(t) >

théorème : en régime sinusoïdal, si l'on a : $u(t) = U\sqrt{2}.\cos(\omega t)$

$$i(t) = I\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi)$$

alors : $P_m = U.I.\cos\varphi$

3) Puissance apparente :

définition : la puissance apparente reçue par un dipôle est, à U et I fixés, la valeur maximale de la puissance moyenne : $P_A = U.I$ (en régime sinusoïdal)

4) Puissance complexe :

définition : la puissance complexe $\underline{P}$ reçue par un dipôle est : $\underline{P} = \frac{1}{2}.\underline{u}.\overline{\underline{i}}$

théorème : la puissance moyenne P_m est la partie réelle de la puissance complexe $\underline{P}$