MP5 Physique

plan du cours d'électrocinétique

OPÉRATEURS LINÉAIRES EN RÉGIME NON SINUSOÏDAL

I) DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE EN SÉRIE DE FOURIER :

1) Théorème de Fourier :

théorème : toute fonction périodique f de période T définie sur $\Re$ et ne présentant par période qu'un nombre fini de discontinuités est égale à la somme d'une série de fonctions unique, appelée sa série trigonométrique ou de Fourier :

- À un instant t où f(t) est continu, cette série est donnée par :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n.\cos(n\omega t)+b_n.\sin(n\omega t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} V_n.\cos\left(n\omega t+\varphi_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c_n}\exp(jn\omega t)$$

où: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, avec :

si n > 0 :

$$a_n = \frac{2}{T}.\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).\cos(n\omega t).dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}.\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).\sin(n\omega t).dt$$

et pour n = 0 :

$$a_0 = \frac{1}{T}.\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).dt \quad \text{et } b_0 = 0$$

$$b_0 = 0$$

ou bien :

$$V_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}$$

$$\cos\varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}}$$

$$\sin\varphi_n = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}}$$

ou bien : $$\underline{c_n} = \frac{1}{T}.\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).\exp(-jn\omega t).dt$$

- À un instant t où f(t) est discontinu, cette série est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t_-) + f(t_+)\right]$$

la pulsation ω est appelée (pulsation) fondamentale
les pulsations n.ω (n > 1) sont appelées (pulsations) harmoniques

théorème :

- Si la fonction f est paire, tous les coefficients b_n sont nuls
- Si la fonction f est impaire, tous les coefficients a_n sont nuls

définition : le spectre d'un signal périodique est l'ensemble des valeurs des coefficients de la série de Fourier en laquelle se développe le signal

2) Formule de Parseval :

$$\frac{1}{T}.\int_{t_0}^{t_0+T} \left(f(t)\right)^2.dt = a_0{}^2 + \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right) = a_0{}^2 + \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{\infty}\left(V_n{}^2\right) = c_0{}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c_n}.\underline{\bar{c}_n}$$

3) Exemple : signal périodique rectangulaire :

si f(t) est T périodique et si : f(t) = E si $t \in \left[0;\frac{T}{2}\right[$

f(t) = - E si $t \in \left[\frac{T}{2};T\right[$

alors : $$f(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2p+1)\omega t\right)}{2p+1} = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2p+1)\frac{2\pi}{T}t\right)}{2p+1}$$

4) Exemple : signal périodique triangulaire :

si f(t) est T périodique, paire et en dents de scie, de valeur maximale $\frac{E}{2}$ et de valeur minimale $-\frac{E}{2}$, de valeur moyenne nulle, c'est-à-dire si : $f(t) = E.\frac{2}{T}\left(t - \frac{T}{4}\right)$ si $t \in \left[0;\frac{T}{2}\right[$

$f(t) = -E.\frac{2}{T}\left(t - \frac{3T}{4}\right)$ si $t \in \left[\frac{T}{2};T\right[$

alors : $$f(t) = -\frac{4E}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos((2p+1)\omega t)}{(2p+1)^2} = -\frac{4E}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2p+1)\frac{2\pi}{T}t\right)}{(2p+1)^2}$$

II) DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION NON PÉRIODIQUE EN INTÉGRALE DE FOURIER : TRANSFORMATION DE FOURIER :

1) Transformation de Fourier :

définition : on appelle transformée de Fourier f de la fonction f de t la fonction de ω définie par :

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\exp(-j\omega t).dt$$

théorème d'inversion : : toute fonction non périodique f de t, de carré sommable, de transformée de Fourier f , fonction de ω, peut s'écrire :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega).\exp(j\omega t).d\omega$$

On dit que f est la transformée de Fourier inverse de f

remarque : généralisation de la notion de transformation de Fourier :

théorème : toute fonction non périodique f d'un élément de $\Re^n$ dans C, de carré sommable, peut s'écrire :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}.\int_{-\infty}^{+\infty} f(k).\exp(jkx).dk$$

où : $$f(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\exp(-jkx).dx$$

définitions : f est la transformée de Fourier de f

f est la transformée de Fourier inverse de f

2) Formule de Parseval-Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f(t))^2.dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(\omega)\right|^2.d\omega$$

interprétation physique : l'énergie d'un signal quelconque peut être calculée aussi bien dans le domaine temporel (par $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(t)\right)^2.dt$) que dans le domaine spectral (par : $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(\omega)\right|^2.d\omega$, $\left|f(\omega)\right|^2$ représentant da densité spectrale d'énergie)

III) EXEMPLE SIMPLE :

si f est la fonction créneau : f(t) = a pour t [-τ/2;+τ/2]
f(t) = 0 pour t < -τ/2 ou t > +τ/2

alors : $$f(\omega) = \frac{a.\tau}{\sqrt{2\pi}}.\sin c\left(\frac{\omega.\tau}{2}\right)$$

où : $$\sin c(X) = \frac{\sin(X)}{X}$$

cas limite de l'impulsion de Dirac δ : $\tau \to 0$, $a \to \infty$, $a.\tau = K = cons\tan te$

alors : $TF(\delta) = \dfrac{K}{\sqrt{2\pi}}, \forall \omega$ ω

IV) FILTRE EN RÉGIME NON SINUSOÏDAL :

1) Cas où le signal d'entrée est périodique, mais non sinusoïdal :

théorème : si le signal d'entrée d'un opérateur est un signal périodique, de période T et de pulsation ω, mais non sinusoïdal, on décompose ce signal en série de Fourier, sous forme réelle :

$$e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k \cos(k\omega_f t + \psi_k)$$

puis on associe à cette série de Fourier réelle une série complexe $\underline{e}(t)$ dont e(t) est la partie réelle :

$$\underline{e}(t) == \sum_{k=0}^{\infty} E_k \exp(j(k\omega_f t + \psi_k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{E_k}.\exp(jk\omega_f t)$$

le signal de sortie de l'opérateur (linéaire) est alors, sous forme complexe :

$$\underline{s}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{E_k}.\underline{H}(jk\omega_f).\exp(jk\omega_f t)$$

d'où le signal de sortie réel : $$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty}.\left|\underline{E_k}\,\underline{H}(jk\omega_f)\right|\cos\left(k\omega_f t + \mathrm{Arg}\left(\underline{E_k}\,\underline{H}(jk\omega_f)\right)\right)$$

2) Cas où le signal d'entrée est quelconque :

théorème : si le signal d'entrée d'un opérateur est un signal quelconque, on détermine la transformée de Fourier de ce signal: $$\underline{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e(t).\exp(-j\omega t).dt$$

(avec : $e(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{E}(\omega).\exp(+j\omega t).dt$)

alors le signal de sortie de l'opérateur (linéaire) est : $s(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{E}(\omega).\underline{H}(j\omega).\exp(+j\omega t).dt$

ce qui revient à dire que la relation entre les transformées de Fourier du signal d'entrée et du signal de sortie s'écrit très simplement : $\underline{S}(\omega)=\underline{H}(j\omega).\underline{E}(\omega)$, où $\underline{H}(j\omega)$ est la fonction de transfert de l'opérateur

3) Exemple simple : filtre passe - bas :

filtre passe - bas d'ordre 1, de fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

qualitativement, ce filtre coupe toutes les harmoniques de pulsation $\omega_n = n.\omega_{fondamental}$ supérieure à ω_0

résultat à retenir : un filtre passe-bas d'ordre 1 est intégrateur pour les pulsations supérieures à sa pulsation de coupure, c'est-à-dire en dehors de sa bande passante

4) Exemple simple : filtre passe - haut :

filtre passe - haut d'ordre 1, de fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega)=\dfrac{A}{1+\dfrac{1}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}}=\dfrac{A}{1-j\dfrac{\omega_0}{\omega}}$

qualitativement, ce filtre coupe toutes les harmoniques de pulsation $\omega_n = n.\omega_{fondamental}$ inférieure à ω_0

résultat à retenir : un filtre passe-haut d'ordre 1 est dérivateur pour les pulsations inférieures à sa pulsation de coupure, c'est-à-dire en dehors de sa bande passante

5) Exemple simple : filtre passe - bande :

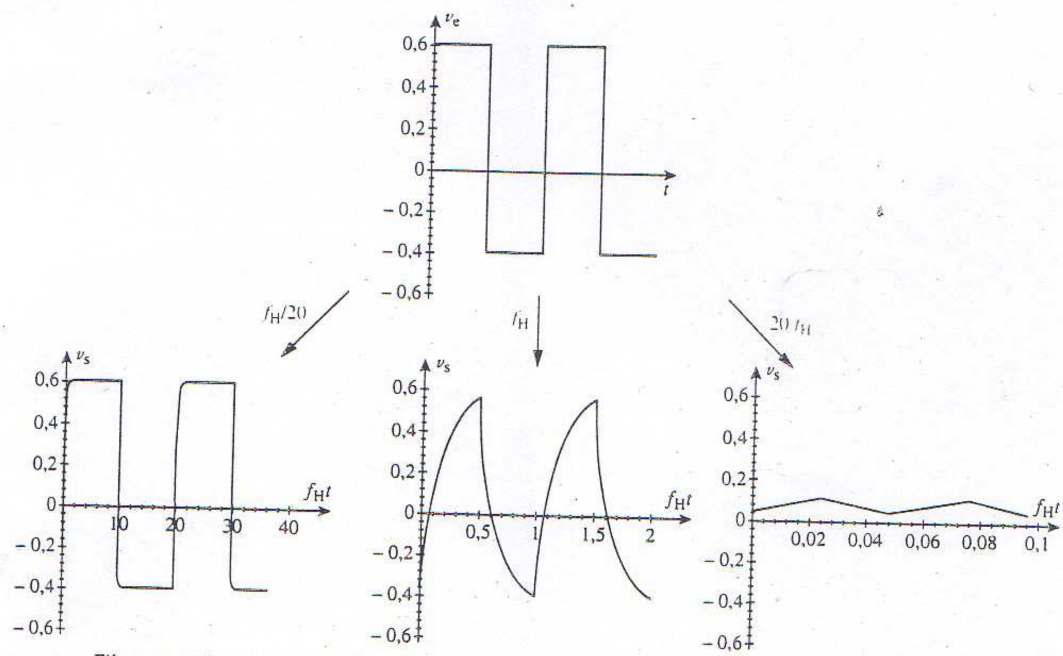
filtre passe - bas d'ordre 2, de fonction de transfert : $H(j\omega)=\dfrac{B}{1+Q\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}-j\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

qualitativement, ce filtre coupe toutes les harmoniques de pulsation $\omega_n = n.\omega_{fondamental}$ situées « hors de » la bande passante

résultat à retenir : un filtre passe-bande d'ordre 2 est intégrateur pour les pulsations supérieures à sa pulsation de coupure haute et dérivateur pour les pulsations inférieures à sa pulsation de coupure basse

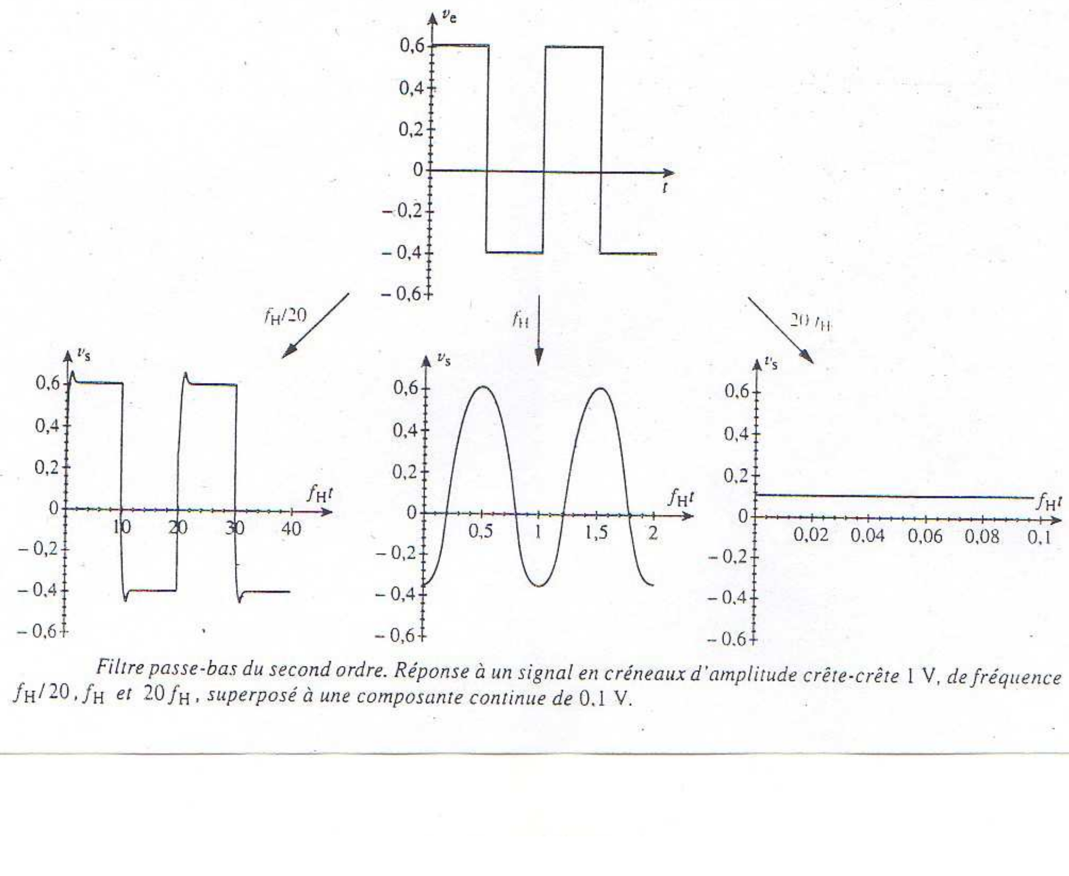
filtre passe-bas : réponse à un signal périodique rectangulaire

filtre d'ordre 1



Filtre passe-bas du premier ordre. Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence $f_H/20$, f_H et $20 f_H$, superposé à une composante continue de 0,1 V.

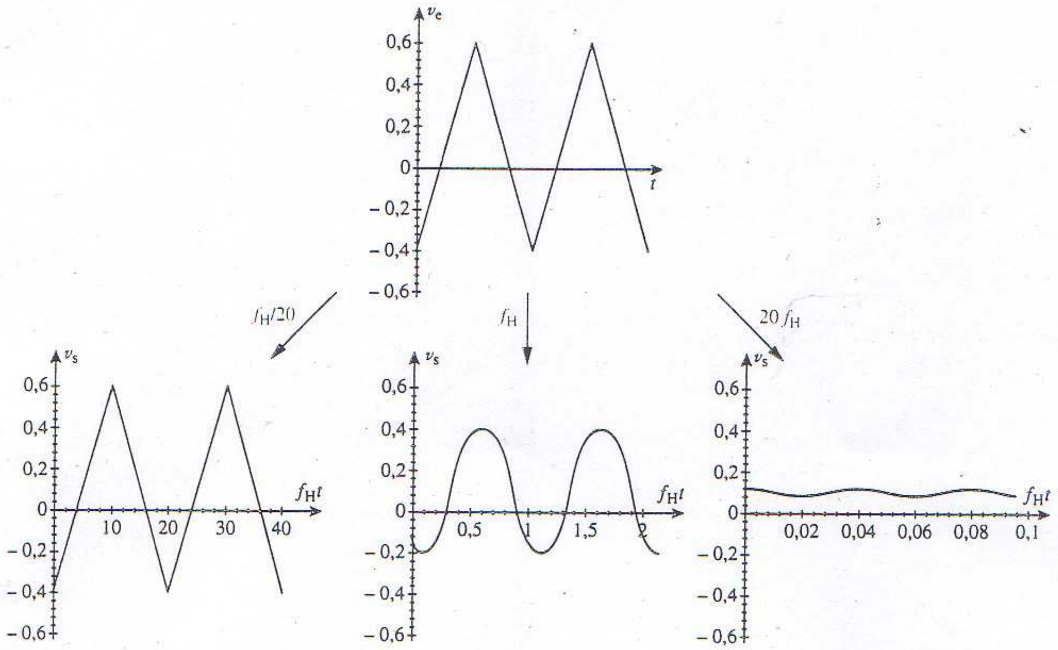
filtre d'ordre 2



Filtre passe-bas du second ordre. Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence $f_H/20$, f_H et $20 f_H$, superposé à une composante continue de 0,1 V.

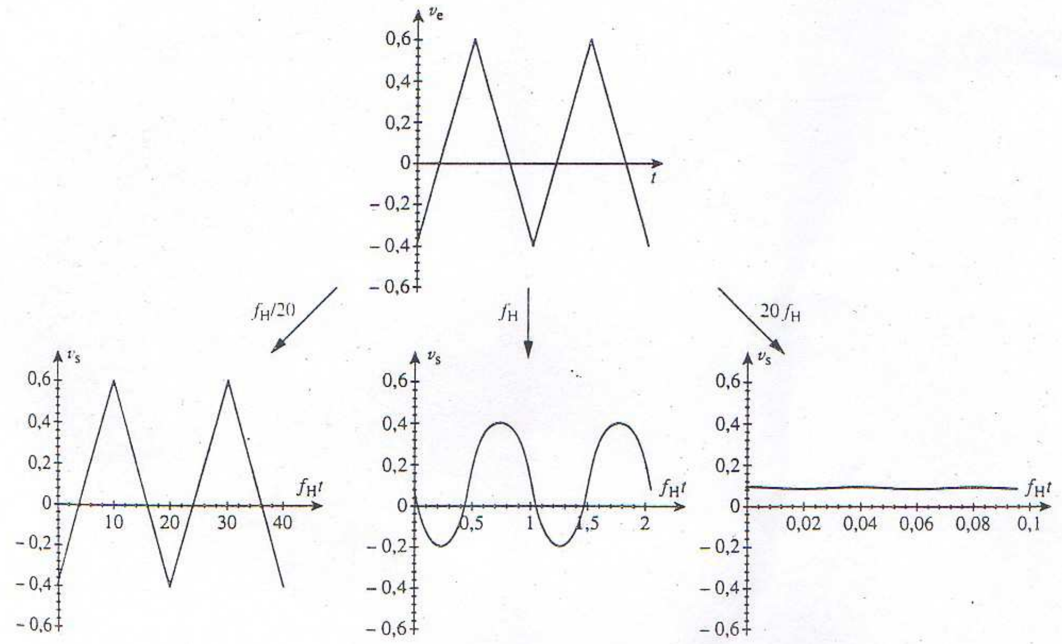
filtre passe-bas : réponse à un signal triangulaire

filtre d'ordre 1



Filtre passe-bas du premier ordre. Réponse d'un signal triangulaire d'amplitude crête-crête 1 V, *de fréquence* $f_H/20$, f_H *et* $20 f_H$, *superposé à une composante continue de* 0,1 V.

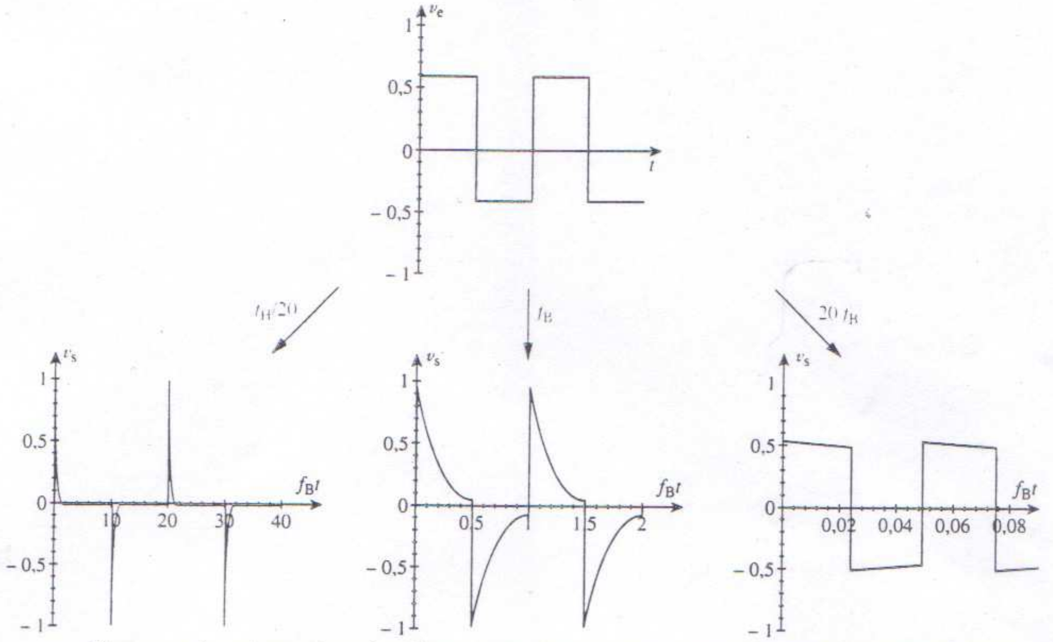
filtre d'ordre 2



Filtre passe-bas du deuxième ordre. Réponse d'un signal triangulaire d'amplitude crête-crête 1 V, *de fréquence* $f_H/20$, f_H *et* $20 f_H$, *superposé à une composante continue de* 0,1 V.

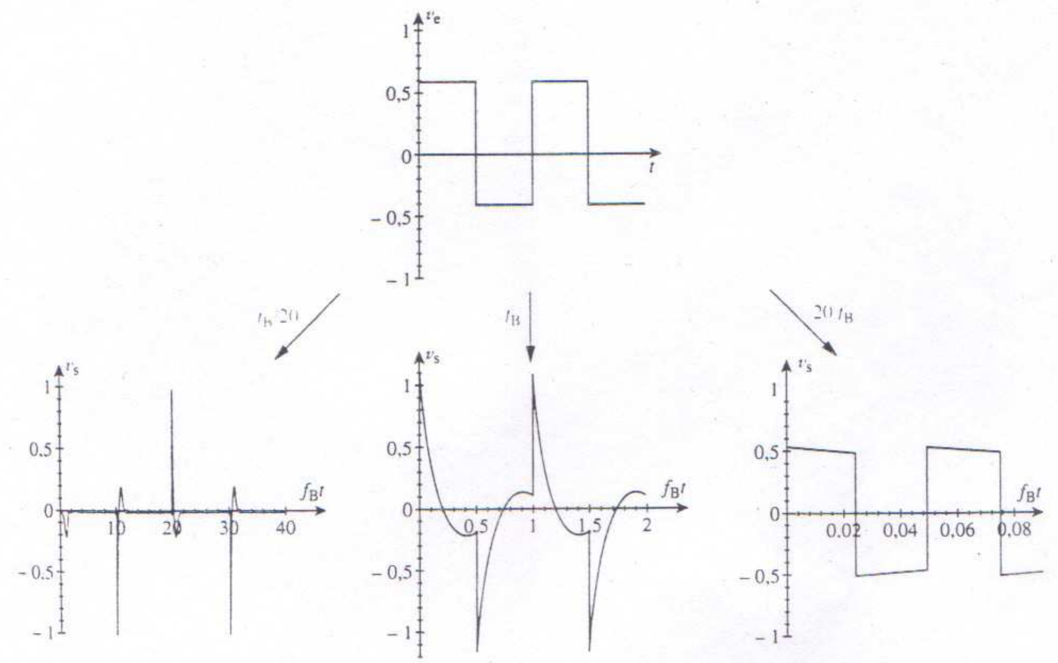
filtre passe-haut : réponse à un signal périodique rectangulaire

filtre d'ordre 1



. *Filtre passe-haut du premier ordre. Réponse à un signal créneau d'amplitude* 1 V, *de fréquence* $f_B/20$, f_B *et* $20\,f_B$, *superposé à une composante continue de* 0,1 V.

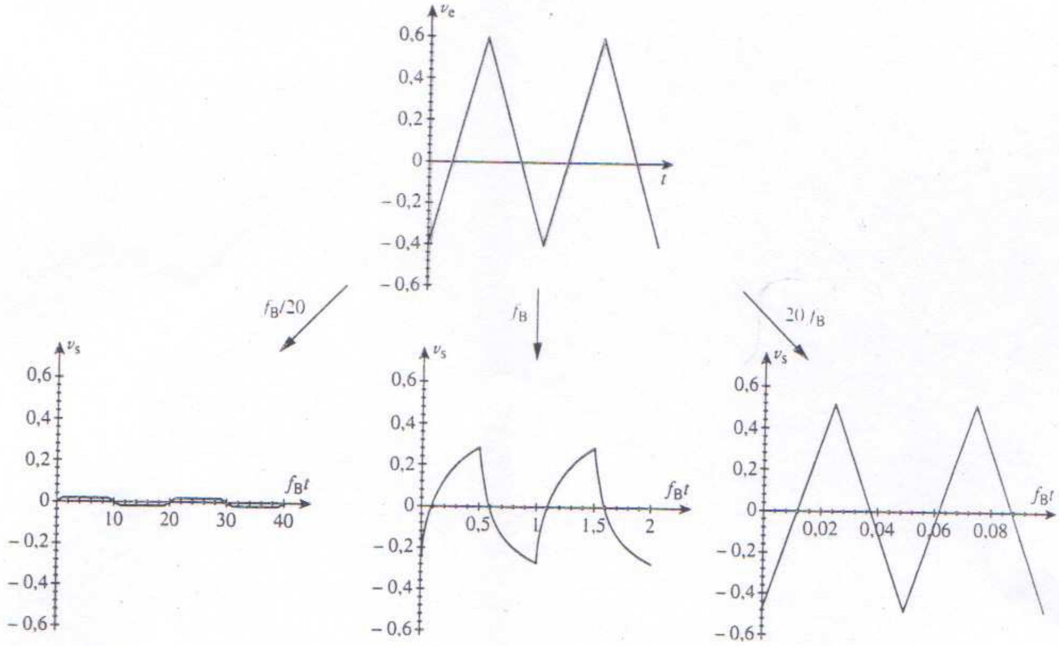
filtre d'ordre 2



Filtre passe-haut du deuxième ordre ($Q = 0{,}7$). *Réponse à un signal créneau d'amplitude* 1 V, *de fréquence* $f_B/20$, f_B *et* $20\,f_B$, *superposé à une composante continue de* 0,1 V.

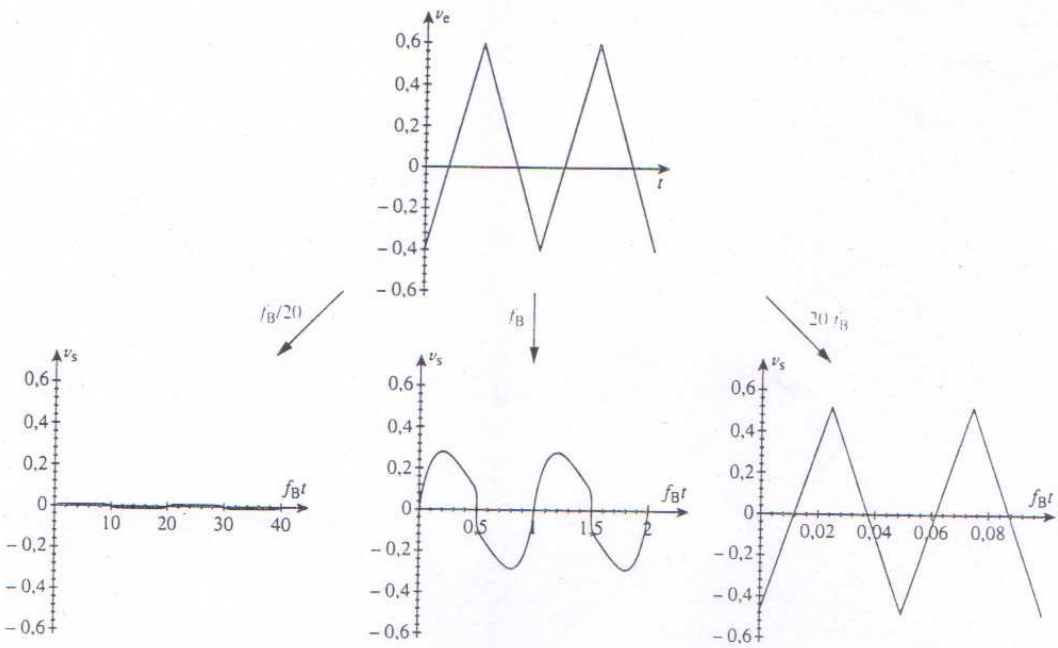
filtre passe-haut : réponse à un signal périodique triangulaire

filtre d'ordre 1



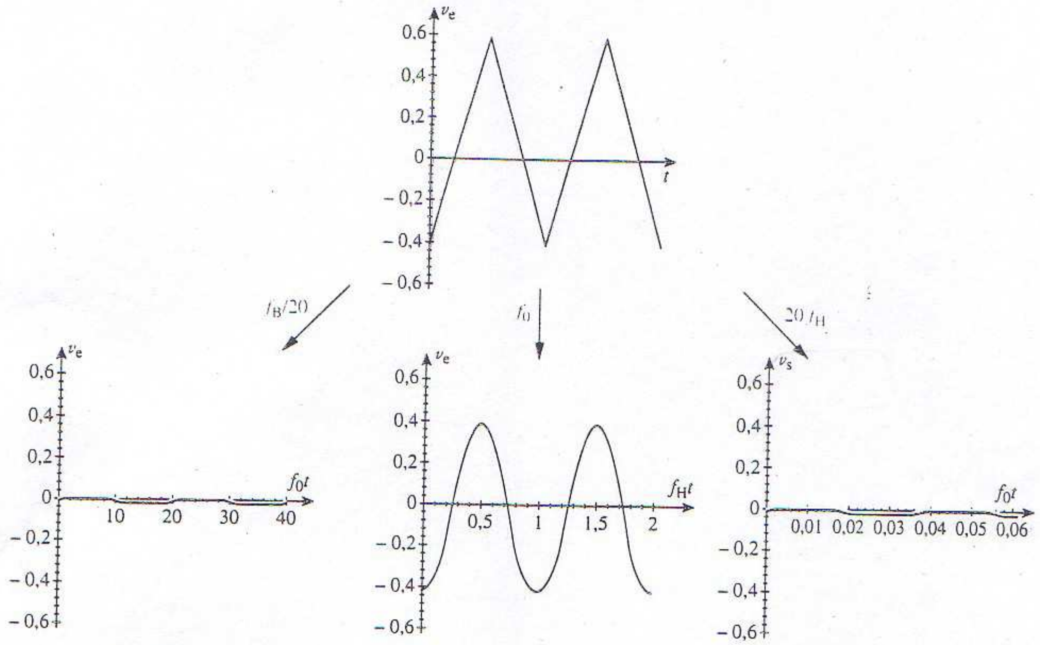
Filtre passe-haut du premier ordre. Réponse à un signal triangulaire d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence $f_B/20$, f_B et $20 f_B$, superposé à une composante continue de 0,1 V.

filtre d'ordre 2

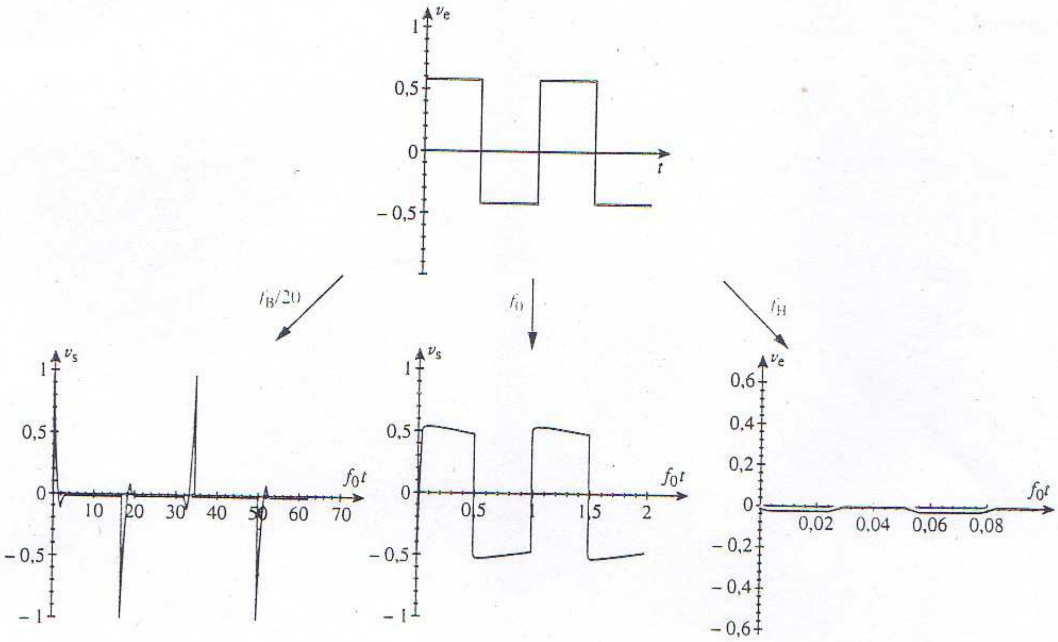


Filtre passe-haut du deuxième ordre ($Q = 0,7$). Réponse à un signal triangulaire d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence $f_B/20$, f_B et $20 f_B$, superposé à une composante continue de 0,1 V.

filtre passe - bande : $Q = 1$; $\omega_1 = 0,6\,\omega_0$; $\omega_2 = 1,6\,\omega_0$

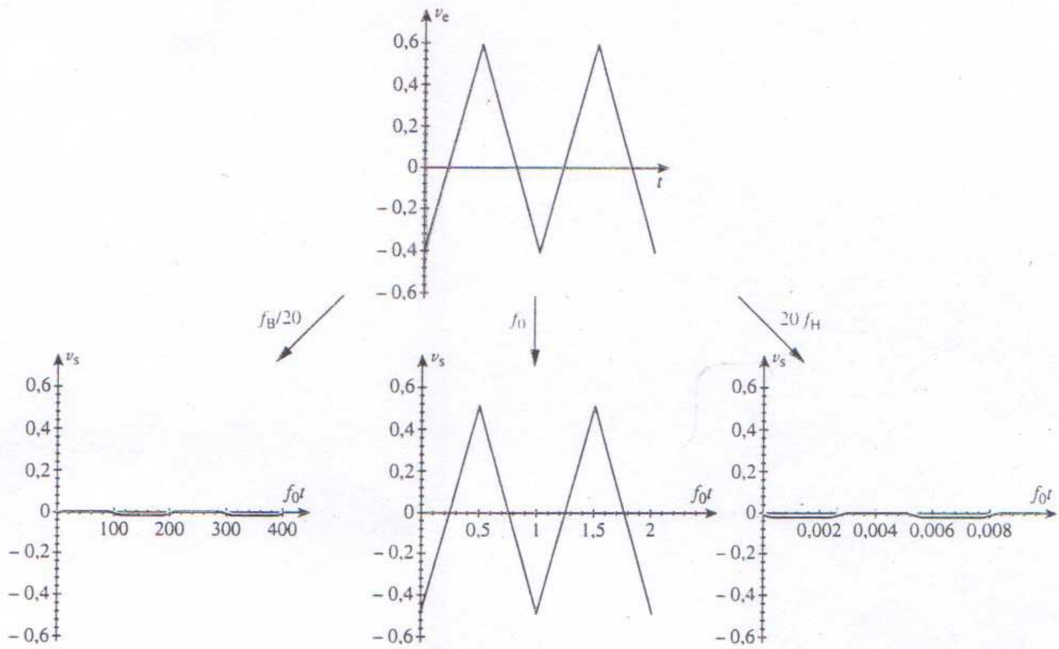


Filtre passe-bande de coefficient de qualité $Q = 1$, $f_B \approx 0,6\,f_0$ *et* $f_H \approx 1,6\,f_0$. *Réponse à un signal triangulaire d'amplitude crête-crête de fréquence* $f_B/20, f_0, 20\,f_H$ *superposé à une composante continue de* 0,1 V.

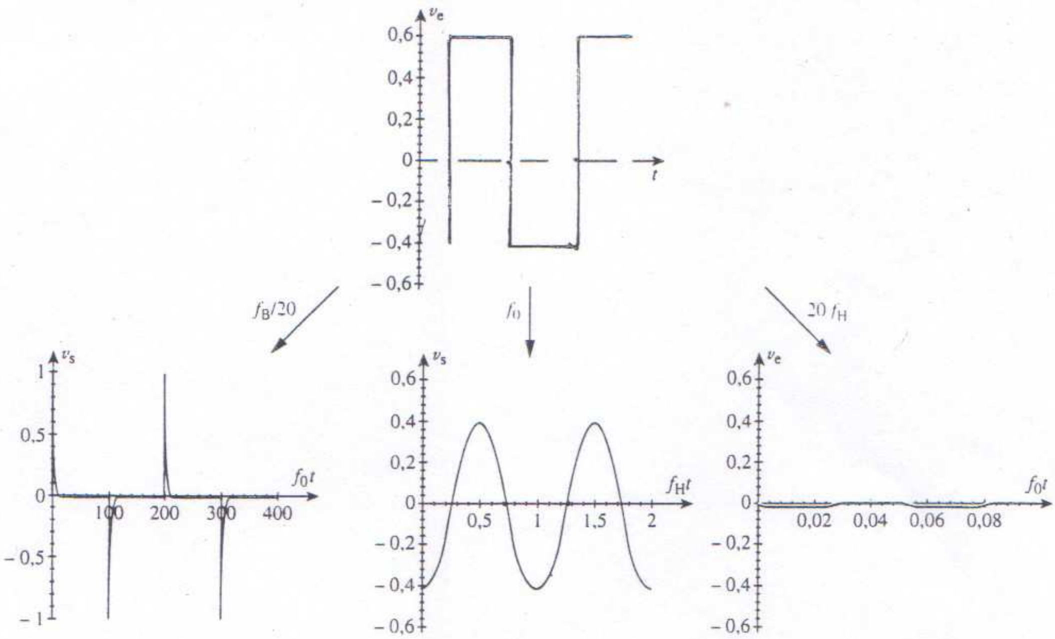


Filtre passe-bande de coefficient de qualité $Q = 1$, $f_B \approx 0,6\,f_0$ *et* $f_H \approx 1,6\,f_0$. *Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête-crête* 1 V *de fréquence* $f_B/20, f_0, 20\,f_H$ *superposé à une composante continue de* 0,1 V.

filtre passe-bande : $Q = 0,1$; $\omega_1 = 0,1 . \omega_0$; $\omega_2 = 10 . \omega_0$

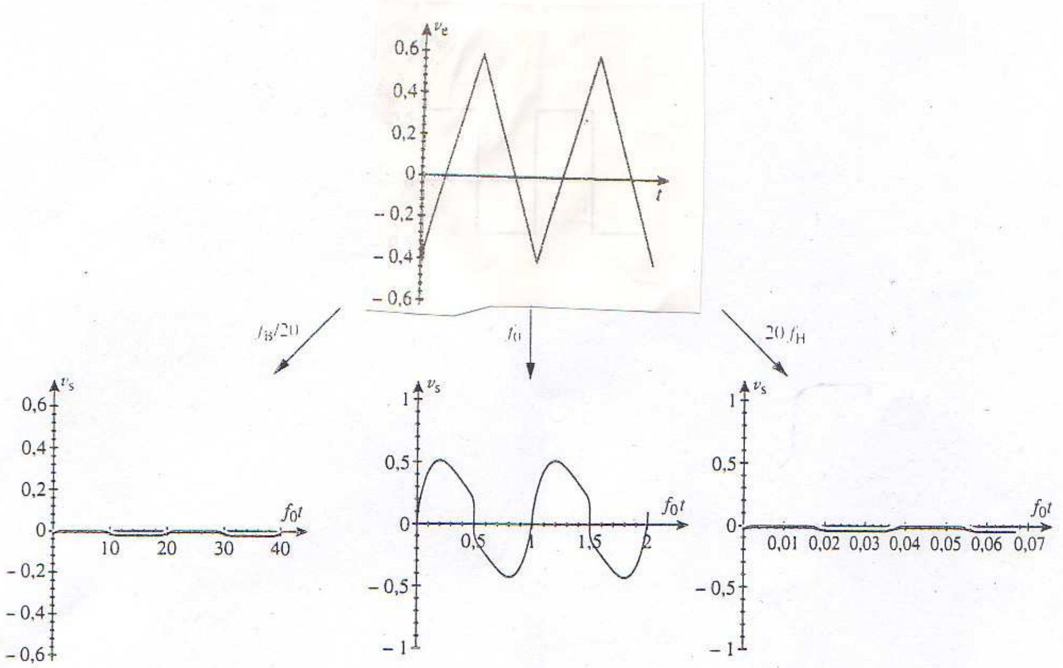


Filtre passe-bande de facteur de qualité $Q = 0,1$, $f_B \approx 0,1 f_0$ et $f_H \approx 10 f_0$. Réponse à un signal triangulaire d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence $f_B/20$, f_0 et $20 f_H$. Superposé à une composante continue de 0,1 V.

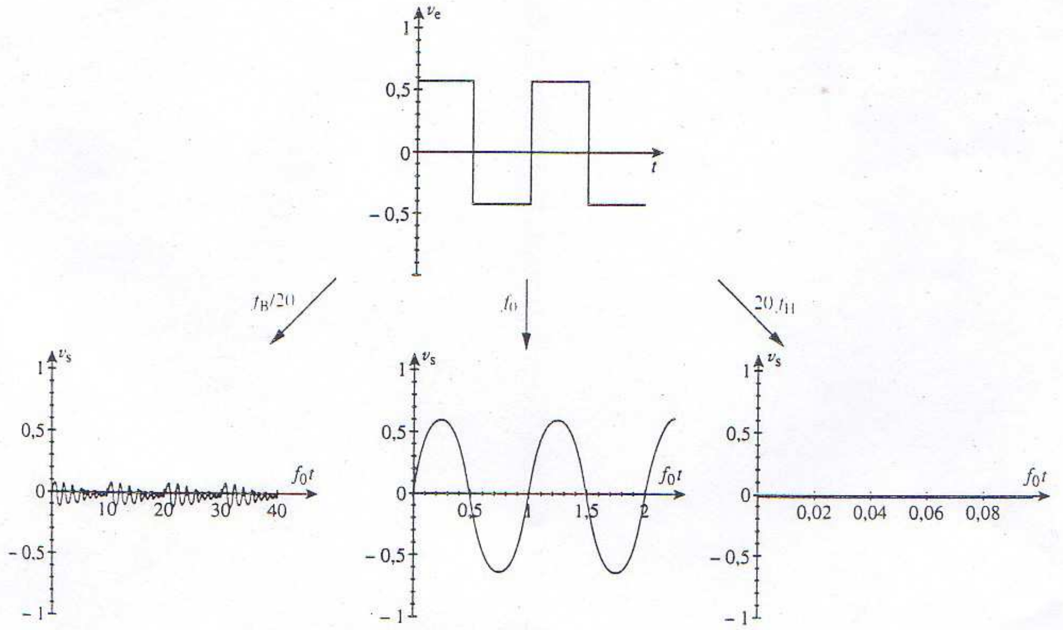


Filtre passe-bande de coefficient de qualité $Q = 0,1$, $f_B \approx 0,1 f_0$ et $f_H \approx 10 f_0$. Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête-crête 1 V de fréquence $f_B/20$, f_0, $20 f_H$ superposé à une composante continue de 0,1 V.

filtre passe-bande : $Q = 10$; $\omega_1 = 0{,}95\,\omega_0$; $\omega_2 = 1{,}05\,\omega_0$



Filtre passe-bande de coefficient de qualité $Q = 10$, $f_B \approx 0{,}95\, f_0$ et $f_H \approx 1{,}05\, f_0$. Réponse à un signal triangulaire d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence $f_B/20$, f_0, $20\, f_H$ superposé à une composante continue de 0,1 V.



Filtre passe-bande de coefficient de qualité $Q = 10$, $f_B \approx 0{,}95\, f_0$ et $f_H \approx 1{,}05\, f_0$. Réponse à un signal en créneaux d'amplitude crête-crête 1 V, de fréquence $f_B/20$, f_0, $20\, f_H$ superposé à une composante continue de 0,1 V.