PETIT FORMULAIRE D'ANALYSE VECTORIELLE POUR PHYSICIENS

Remarques préliminaires :

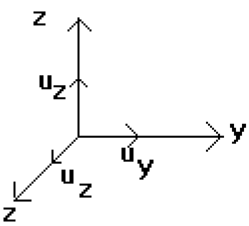
1) On considèrera ici que toutes les fonctions étudiées vérifient toutes les propriétés de dérivabilité et de continuité nécessaires aux différentes définitions et aux différents théorèmes énoncés. C'est le cas (quasi) général en physique et en chimie!...

2) On appellera opérateurs toutes les applications que l'on va définir ici et qui seront des applications :
de $\Re^3$ dans $\Re^3$ (à un vecteur correspond un vecteur)
de $\Re^3$ dans $\Re$ (à un vecteur correspond un scalaire)
de$\Re$ dans $\Re^3$ (à un scalaire correspond un vecteur)
de $\Re$ dans $\Re$ (à un scalaire correspond un scalaire)

3) Les opérateurs que l'on va définir concernent des fonctions (scalaires ou vectorielles) des coordonnées d'un point : cela n'exclut pas que ces fonctions puissent, en plus, dépendre du temps.

I) RAPPEL DES TROIS SYSTEMES DE COORDONNEES UTILISES :

1) Coordonnées cartésiennes :

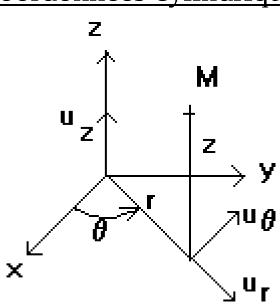


base orthonormée directe : (u_x, u_y, u_z)

coordonnées : (x,y,z)

$$dOM = dxu_x + dyu_y + dzu_z$$
$$(dOM)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$d\tau = dx.dy.dz$$

2) Coordonnées cylindriques ou semi-polaires :



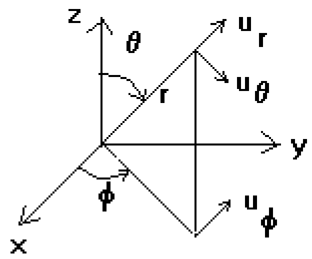
base orthonormée directe : (u_r, u_θ, u_z)

coordonnées: (r,θ,z)

$$r \in \Re^+ ; z \in \Re ; \theta \in [0;2\pi[$$

$$dOM = dru_r + r.d\theta u_\theta + dzu_z$$
$$(dOM)^2 = (dr)^2 + (r.dr)^2 + (dz)^2$$
$$d\tau = r.dr.d\theta.dz$$

3) Coordonnées sphériques ou polaires :



base orthonormée directe : $(u_r, u_\theta, u_\varphi)$

coordonnées: (r,θ,ϕ)

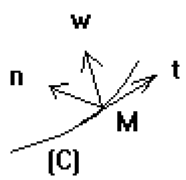
$$r \in \Re^+ ; \theta \in [0;\pi[; \varphi \in [0;2\pi[$$

$$dOM = dr u_r + r.d\theta u_\theta + r.\sin\theta.d\varphi u_\varphi$$
$$(dOM)^2 = (dr)^2 + (r.d\theta)^2 + (r.\sin\theta.d\varphi)^2$$
$$d\tau = r^2.\sin\theta.dr.d\theta.d\varphi$$

4) Coordonnées locales : trièdre de Frenet :

si un point M décrit une trajectoire (C), le trièdre de Frenet est le trièdre : (t, n, w), où :

t est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire (C) en M
n est le vecteur : normale principale à la trajectoire (C) en M
$w = t \wedge n$ est le vecteur : binormale à la trajectoire (C) en M



II) DEFINITIONS ELEMENTAIRES : POTENTIEL (SCALAIRE) ; CHAMP (VECTORIEL); CIRCULATION D'UN CHAMP VECTORIEL ; FLUX D'UN CHAMP VECTORIEL :

1) Potentiel scalaire :

définition : on appelle potentiel scalaire U(M) toute application qui, à un point M de l'espace physique, fait correspondre un nombre réel : U(M) (on parle aussi, de façon synonyme, de "champ scalaire")

2) Champ vectoriel :

définition : on appelle champ vectoriel toute application $a(M)$ qui, à un point M de l'espace physique, fait correspondre un vecteur de l'espace vectoriel $\Re^3$: $a(M)$

3) Circulation d'un champ vectoriel $a(M)$:

a) Circulation élémentaire :

définition : si on considère un déplacement élémentaire du point M : dOM , alors la circulation élémentaire $\delta C(M)$ du champ vectoriel a de M à M+dM est, par définition : $\delta C(M) = a(M).dOM$

b) Circulation finie le long d'une courbe (Γ) ouverte :

définition : la circulation du champ vectoriel a le long de (Γ), de M_1 à M_2, est par définition :

$$C_{M_1}^{M_2} = \int_{M_1}^{M_2} a(M).dOM$$

remarque importante : cette définition dépend (en général) du chemin (Γ) suivi de M_1 à M_2

c) Circulation le long d'une courbe fermée (Γ) orientée :

définition : la circulation du champ vectoriel a le long d'une courbe fermée (Γ)orientée est, par définition :

$$C_{\Gamma orientée} = \oint_{\Gamma orientée} a(M).dOM$$

remarque : en général : $C_{\Gamma orientée} \neq 0$

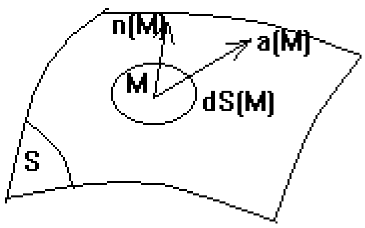
4) Flux d'un champ vectoriel :

a) Flux élémentaire :

définition : si on considère une surface élémentaire dS(M) autour du point M, orientée par le vecteur unitaire $n(M)$ et si $a(M)$ est la valeur du champ vectoriel en M, alors le flux élémentaire dϕ(M) de ce champ à travers dS(M) est, par définition : $d\Phi(M) = a(M).n(M).dS(M)$

b)Flux à travers une surface finie ouverte :

on suppose que la surface (S) est orientée (par continuité à partir d'un élément quelconque dS de cette surface) :

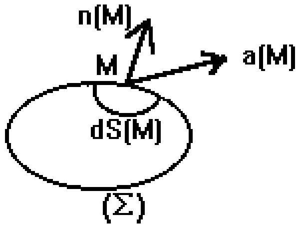


définition : le flux $\Phi_S(a)$ du champ vectoriel a à travers la surface S orientée est, par définition :

$$\Phi_S(a) = \iint_S d\Phi(M) = \iint_S a(M).n(M).dS(M)$$

remarque: le flux $\Phi_S(a)$ de a à travers la surface (S) ouverte dépend (évidemment!) de la surface (S); en particulier, les flux de a à travers deux surfaces (S_1) et (S_2) s'appuyant sur le même contour (fermé) (Γ) sont en général différents

c) Flux sortant d'une surface fermée (Σ) :



par convention, on oriente toujours la surface fermée (Σ) vers l'extérieur

définition : le flux $\Phi_S(a)$ du champ vectoriel a sortant de la surface fermée (Σ) est :

$$\Phi_\Sigma(\mathrm{a}) = \oiint_\Sigma \mathrm{a(M).n(M).dS(M)}$$

remarque : en général : $\Phi_\Sigma(a) \neq 0$

III) OPERATEURS : GRADIENT ; DIVERGENCE ; ROTATIONNEL ; LAPLACIEN :

toutes les définitions de ce paragraphe sont données dans un système de coordonnées cartésiennes

1) Gradient d'un potentiel scalaire (ou champ scalaire) U(M) :

définition : $$gradU(M) = \frac{\partial U}{\partial x} u_x + \frac{\partial U}{\partial y} u_y + \frac{\partial U}{\partial z} u_z$$

remarque : $\mathrm{gradU(M)}$ est un ***VECTEUR*** qui a la dimension de U divisée par une longueur

2) Divergence d'un champ vectoriel $\mathrm{a(M)}$:

définition : si : $\mathrm{a(M) = a_x u_x + a_y u_y + a_z u_z}$

alors : $$diva(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

remarque : $\mathrm{diva(M)}$ est un ***SCALAIRE*** qui a la dimension de a divisée par une longueur

3) Rotationnel d'un champ vectoriel $\mathrm{a(M)}$:

définition : si : $\mathrm{a(M) = a_x u_x + a_y u_y + a_z u_z}$

alors : $$\mathrm{rota(M)} = \left[\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right] u_x + \left[\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right] u_y + \left[\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right] u_z$$

remarque : $\mathrm{rota(M)}$ est un ***VECTEUR*** qui a la dimension de a divisée par une longueur

4) Laplacien d'un potentiel scalaire (ou champ scalaire) U(M) :

définition : $$\Delta U(M) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

remarque : ΔU(M) est un ***SCALAIRE*** qui a la dimension de U divisée par le carré d'une longueur

5) Laplacien d'un champ vectoriel $\underline{a(M)}$:

définition: si $a(M) = a_x u_x + a_y u_y + a_z u_z$

alors : $$\Delta a = \Delta a_x . u_x + \Delta a_y . u_y + \Delta a_z . u_z$$

remarque : $\Delta a(M)$ est un VECTEUR qui a la dimension de a divisée par le carré d'une longueur

6) Relations utiles :

$$grad(U.V) = U.gradV + V.gradU$$

$$div(\alpha.a) = \alpha.diva + (grad\alpha).a$$

$$rot(\alpha.a) = \alpha.rota + (grad\alpha) \wedge a$$

$$div(a \wedge b) = (rota).b - (rotb).a$$

$$\Delta U = div(gradU)$$

$$rot(rota) = grad(diva) - \Delta a$$

7) Remarque : opérateur nabla :

on peut utiliser un "vecteur opérateur" fictif, de "coordonnées cartésiennes" : $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$

c'est l'opérateur "nabla", noté : $$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_x + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) u_y + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) u_z$$

la signification concrète de cet opérateur est la suivante :

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} u_x + \frac{\partial U}{\partial y} u_y + \frac{\partial U}{\partial z} u_z$$ donc : $$\nabla U = gradU$$

$$\nabla.a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$ donc : $$\nabla.a = diva$$

$$\nabla \wedge a = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$ donc : $$\nabla \wedge a = rota$$

$$\left(\nabla^2\right)a = \Delta a$$

ATTENTION : DANGER DE L'UTILISATION DE L'OPERATEUR NABLA :

"l'opérateur nabla n'est pas associatif",c'est-à-dire :

$$\nabla\left(\nabla.a\right) \neq \left(\nabla^2\right)a$$

en effet : $$\nabla\left(\nabla.a\right) = \mathrm{grad}(\mathrm{diva})$$

$$\left(\nabla^2\right)a = \Delta a$$

et $$grad(diva) = \Delta a + rot(rota) \neq \Delta a(\textit{généralement})$$

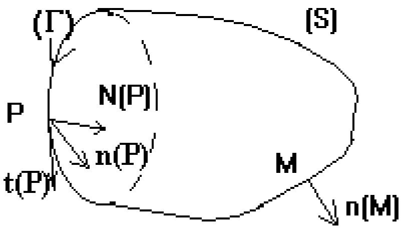
conclusion : il faut être prudent dans l'utilisation de l'opérateur nabla (dont on peut d'ailleurs se passer)...

IV) TRANSFORMATION D'UNE INTEGRALE LE LONG D'UN CONTOUR FERME EN UNE INTEGRALE DE SURFACE :

1) Théorème de Stokes :

convention d'orientation :
soit un contour fermé (Γ) orienté et une surface (ouverte) (S) s'appuyant sur (Γ) ; soit P un point quelconque de (Γ) ; alors:
$t(P)$ = vecteur unitaire tangent en P à (Γ), dans le sens de l'orientation choisie pour (Γ)
$N(P)$ = vecteur unitaire normal à (Γ) en P et situé dans le plan tangent à (S) en P, orienté depuis P vers la surface (S)
$n(P) = t(P) \wedge N(P)$ est le vecteur unitaire normal à la surface (S) en P

(quand on tourne un tire-bouchon normal en M à la surface (S) en un point de S dans le sens de l'orientation de (Γ), le tire bouchon se translate dans le sens de n(M)) alors, tous les éléments dS(M) autour des différents points M de (S) sont orientés par continuité à partir des vecteurs n(P) concernant les points P de (Γ)



théorème de Stokes :
si (Γ) est une courbe fermée orientée et si (S) est une surface ouverte s'appuyant sur la courbe (Γ) et orientée comme indiqué ci-dessus ("règle du tire-bouchon"), alors :

$$\oint_\Gamma a(P).dP = \iint_S rot\,a(M).n(M).dS(M)$$

2) Formule de Kelvin (appelée aussi parfois formule du gradient, à ne pas confondre avec l'autre formule du gradient ci-dessous) :

si (Γ) est une courbe fermée orientée et si (S) est une surface ouverte s'appuyant sur la courbe (Γ) et orientée selon la règle du tire-bouchon, alors :

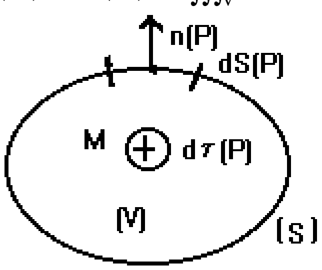
$$\oint_\Gamma U(P).dP = -\iint_S grad\,U(M) \wedge n(M).dS(M)$$

V) TRANSFORMATION D'UNE INTEGRALE DE SURFACE EN UNE INTEGRALE DE VOLUME :

1) Théorème d'Ostrogradsky ou formule de la divergence :

si (Σ) est une surface fermée orientée vers l'extérieur et si *V* est le volume intérieur délimité par cette surface (Σ), alors :

$$\oiint_\Sigma a(P).n(P).dS(P) = \iiint_V div\,a(M).d\tau(M)$$



remarque : vecteur surface d'un contour :

$$S(\Gamma) = \iint_S n(M).dS(M) = \frac{1}{2}.\oint_\Gamma r \wedge dr \qquad \text{où : } \quad r = OP$$

2) Formule du rotationnel :

si (Σ) est une surface fermée orientée vers l'extérieur et si *V* est le volume intérieur délimité par cette surface (Σ), alors :

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{a}(P) \wedge \mathbf{n}(P).dS(P) = -\iiint_V \mathbf{rot\,a}(M).d\tau(M)$$

3) Formule du gradient :

si (Σ) est une surface fermée orientée vers l'extérieur et si *V* est le volume intérieur délimité par cette surface (Σ), alors :

$$\oiint_{\Sigma} U(P)\mathbf{n}(P).dS(P) = \iiint_V \mathbf{grad}U(M).d\tau(M)$$

VI) ASPECT INTRINSEQUE DES OPERATEURS : GRADIENT ; DIVERGENCE ; ROTATIONNEL :

On peut établir diverses relations indépendantes du système de coordonnées considéré relatives aux opérateurs: gradient, divergence, rotationnel . Ces relations établissent le caractère intrinsèque de ces opérateurs et permettent de dégager leur signification physique ; elles permettent également d'obtenir l'expression de ces opérateurs dans différents systèmes de coordonnées.

1) Gradient :

Si l'on utilise la définition du gradient d'une fonction scalaire U(M) à partir des coordonnées cartésiennes du point M :

si U = U(x,y,z) alors : $\mathbf{grad}U(M) = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z$

on constate immédiatement que :

$$\mathbf{grad}U(M).\mathbf{dM} = \frac{\partial U}{\partial x}.dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU(M)$$

On peut en déduire une définition intrinsèque du gradient: en un point M donné, le gradient de U est un vecteur porté par la normale en M à la surface (Σ) contenant le point M et définie par : U(P) = U(M) (où P est un point courant de (Σ), appelée surface équi-U ou iso-U), dirigé dans le sens croissant de U

2) Divergence :

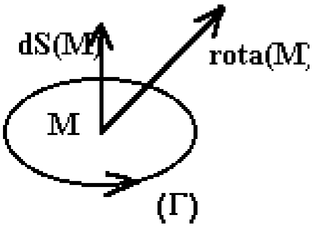
Si l'on applique le théorème d'Ostrogradsky pour un champ vectoriel a(M) à un volume élémentaire dτ(M) entourant un point M, on obtient pour le flux dΦ(M) sortant de dΣ(M), surface fermée entourant dτ(M) :
dΦ(M) = div a(M).dτ(M)
On peut donc en déduire, par pasage à la limite, une définition intrinsèque de la divergence :

$$div\,\mathbf{a}(M) = \frac{d\Phi(M)}{d\tau(M)}$$

En termes physiques,la divergence représente "le flux sortant localement par unité de volume"

3) Rotationnel :

Soit, autour d'un point M, un contour fermé élémentaire (Γ),de vecteur surface $dS(M)$, les orientations de (Γ) et de $dS(M)$ se déduisant l'une de l'autre par la règle habituelle :



La circulation δC du champ vectoriel a le long de (Γ) peut se calculer par le théorème de Stokes :

$$\delta C = rota(M).dS(M)$$

Cette expression fournit une définition intrinsèque possible du rotationnel car elle permet, en choisissant des contours d'orientations différentes, de calculer les coordonnées du rotationnel dans n'importe quel repère

En termes physiques,"la projection du rotationnel sur un axe représente la circulation locale par unité d'aire autour de cet axe"

VII) EXPRESSIONS DES DIFFERENTS OPERATEURS DANS LES DIFFERENTS SYSTEMES DE COORDONNEES ORTHOGONALES :

On va ici faire une étude dont les résultats seront valables dans n'importe quel repère de coordonnées orthogonales, en particulier en coordonnées cylindriques et sphériques

1) Notation générale :

On considère un système quelconque de coordonnées orthogonales.
On note,dans ce système de coordonnées:
s_1, s_2, s_3 les coordonnées d'un point courant M
u_1, u_2, u_3 les vecteurs unitaires de la base orthonormée locale associée au système de coordonnées

rappel :

1) coordonnées cylindriques : coordonnées r,θ,z
base locale: (u_r, u_θ, u_z)

2) coordonnées sphériques : coordonnées r,θ,ϕ
base locale: $(u_r, u_\theta, u_\varphi)$

alors, si dM est le vecteur déplacement élémentaire le plus général autour du point M, on a :

$$dM = \sum_i \mu_i . ds_i . u_i \qquad i = 1, 2, 3$$

μ_i est alors appelé "multiplicateur" de la coordonnée s_i

On peut alors dresser le tableau suivant des multiplicateurs correspondant aux systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques:

multiplicateur	μ_1	μ_2	μ_3
coordonnées cartésiennes $s_1=x$; $s_2=y$; $s_3=z$	1	1	1
coordonnées cylindriques $s_1=r$; $s_2=\theta$; $s_3=z$	1	r	1
coordonnées sphériques $s_1=r$; $s_2=\theta$; $s_3=\phi$	1	r	r.sinθ

<u>2) Expression générale des différents opérateurs: gradient, divergence, rotationnel, laplacien dans un système quelconque de coordonnées orthogonales :</u>

<u>a) Gradient :</u>

si l'on appelle $grad_i U$ la coordonnée suivant u_i du gradient de U, alors, en identifiant la relation de définition intrinsèque du gradient : $dU(M) = gradU(M).dM = \sum_i grad_i U(M).\mu_i.ds_i$

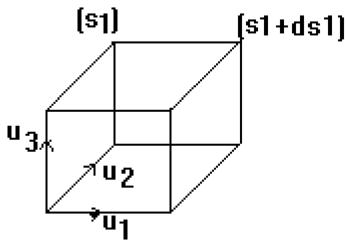
avec l'expression de la différentielle d'une fonction des trois variables s_1 , s_2 et s_3 :

$$dU = \sum_i \frac{\partial U}{\partial s_i}.ds_i$$

on obtient :
$$gradU(M) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\mu_i}.\frac{\partial U}{\partial s_i}.u_i$$

<u>b) Divergence :</u>

Construisons à partir d'un point M de coordonnées s_1 , s_2 , s_3 un pavé élémentaire dont les six faces sont définies par les valeurs s_1 , s_1+ds_1, etc...des coordonnées :



les longueurs du "parallélépipède" sont dl_1, dl_2, dl_3

L'élément de volume autour du point M,de coordonnées s_1 ,s_2 ,s_3 a pour expression :

$$d\tau = \prod_{i=1}^{3}(\mu_i.ds_i) = \mu_1.\mu_2.\mu_3.ds_1.ds_2 ds_3$$

le flux $d\Phi(M)$ du champ vectoriel a sortant de cet élément de volume peut être écrit sous la forme :
$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3$, où :
$d\Phi_1$ est le flux de a à travers les deux faces définies respectivement par les coordonnées s_1 et $s_1 + ds_1$, dont les aires sont, à des termes d'ordre supérieurprès, respectivement $(dl_2.dl_3)_{s1}$ et $(dl_2.dl_3)_{s1+ds1}$.
Si l'on tient compte de ce qu'un flux est compté positivement s'il est sortant et négativement s'il est entrant, on en déduit :

$$d\Phi_1 = (a_1.\mu_2.\mu_3.ds_2.ds_3)_{s1+ds1} - (a_1.\mu_2.\mu_3.ds_2.ds_3)_{s1} = \frac{\partial(a_1.\mu_2.\mu_3)}{\partial s_1}.ds_1.ds_2.ds_3$$

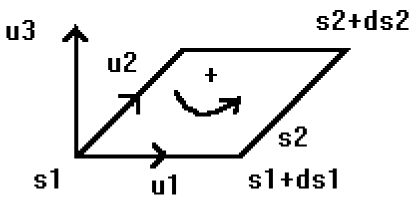
alors, si l'on prend comme définition intrinsèque de la divergence l'expression :

$$div a(M) = \frac{d\Phi(M)}{d\tau(M)}$$

on obtient : $$div a = \frac{1}{\mu_1.\mu_2.\mu_3}.\prod_{i=1}^{3}\frac{\partial(\mu_j.\mu_k.a_i)}{\partial s_i}$$ (i,j,k = 1,2,3 ; i,j,k tous différents)

<u>c) Rotationnel :</u>

Soit M un point de coordonnées s_1, s_2, s_3 . On considère un contour élémentaire (Γ) tracé sur la surface s_3 = constante et dont les quatre côtés , définis par les valeurs s_1 et s_1+ds_1, s_2 et s_2+ds_2 des coordonnées ont donc pour longueurs: dl_1 et dl_2 :



les longueurs du "rectangle" sont dl_1, dl_2

Le vecteur surface de (Γ) est, à des termes d'ordre supérieur près :
$dS = dl_1 dl_2 u_3 = \mu_1\mu_2 ds_1 ds_2 u_3$ $dS = dl_1.dl_2.u_3 = \mu_1.\mu_2.ds_1.ds_2.u_3$

La circulation δC du champ a le long de (Γ) peut être mise sous la forme :
$\delta C = \delta C_1 + \delta C_2$, où : δC_1 est la circulation le long des deux côtés parallèles à u_1, dont les coordonnées sont respectivement s_2 et $s_2 + ds_2$; en tenant compte de l'orientation de chacun de ces côtés, on obtient :

$$\delta C_1 = (a_1.dl_1)_{s2} - (a_1.dl_1)_{s2+ds2} = -\frac{\partial(\mu_1.a_1)}{\partial s_2}.ds_1.ds_2$$

de même, on a :

$$\delta C_2 = (a_2.dl_2)_{s1} - (a_2.dl_2)_{s1+ds1} = \frac{\partial(\mu_2.a_2)}{\partial s_1}.ds_1.ds_2$$

Si l'on utilise maintenant la définition intrinsèque du rotationnel donnée par : $$\delta C = rot a(M).dS(M)$$
on obtient :

$$\mathrm{rota.u}_3 = \frac{\delta C}{dS} = \frac{1}{\mu_1 . \mu_2} . \left[\frac{\partial(\mu_2 . a_2)}{\partial s_1} - \frac{\partial(\mu_1 . a_1)}{\partial s_2} \right]$$

et des expressions semblables pour les coordonnées du rotationnel de a selon u_1 et u_2 .

On peut récapituler l'ensemble de ces résultats dans le tableau suivant :

$$rota = \begin{vmatrix} \frac{u_1}{\mu_2 . \mu_3} & \frac{u_2}{\mu_3 . \mu_1} & \frac{u_3}{\mu_1 . \mu_2} \\ \frac{\partial}{\partial s_1} & \frac{\partial}{\partial s_2} & \frac{\partial}{\partial s_3} \\ \mu_1 . a_1 & \mu_2 . a_2 & \mu_3 . a_3 \end{vmatrix}$$

remarque importante : il faut développer formellement ce déterminant par rapport à la première ligne :

$$rota = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial s_2} & \frac{\partial}{\partial s_3} \\ \mu_2 . a_2 & \mu_1 . a_1 \end{vmatrix} . \frac{u_1}{\mu_2 . \mu_3} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial s_1} & \frac{\partial}{\partial s_3} \\ \mu_1 . a_1 & \mu_3 . a_3 \end{vmatrix} . \frac{u_2}{\mu_3 . \mu_1} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial s_1} & \frac{\partial}{\partial s_2} \\ \mu_1 . a_1 & \mu_2 . a_2 \end{vmatrix} . \frac{u_3}{\mu_1 . \mu_2} :$$

d) Laplacien d'un champ scalaire :

Le laplacien d'un champ scalaire peut être défini de façon intrinsèque par : $\Delta U = div(gradU)$

En se reportant aux résultats obtenus pour le gradient et la divergence, on obtient alors immédiatement :

$$\Delta U = \frac{1}{\mu_1 . \mu_2 . \mu_3} . \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\mu_j . \mu_k}{\mu_i} \frac{\partial U}{\partial s_i} \right]$$

(i,j,k = 1,2,3 ; i,j,k tous différents)

e) Laplacien d'un champ vectoriel :

Le laplacien d'un champ vectoriel peut être défini de manière intrinsèque par la formule :

$$\Delta a = \mathrm{grad}(\mathrm{diva}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rota})$$

Son expression peut donc être déduite de celles déjà données pour le gradient, la divergence et le rotationnel

3) Expressions des différents opérateurs en coordonnées cylindriques :

a) Gradient :

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} . \frac{\partial U}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} u_z$$

b) Divergence:

$$diva = \frac{1}{r}.\frac{\partial(r.a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

c) Rotationnel :

$$rota = \begin{vmatrix} \frac{u_r}{r} & u_\theta & \frac{u_z}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & r.a_\theta & a_z \end{vmatrix}$$

d) Laplacien scalaire :

$$\Delta U = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

e) Laplacien vectoriel :

$$\Delta \mathrm{a} = \left[\Delta \mathrm{A_r} - \frac{1}{\mathrm{r}^2}\left(\mathrm{A_r} + 2\frac{\partial \mathrm{A}_\theta}{\partial \theta}\right)\right]\mathrm{u_r} + \left[\Delta \mathrm{A}_\theta - \frac{1}{\mathrm{r}^2}\left(\mathrm{A}_\theta + 2\frac{\partial \mathrm{A_r}}{\partial \theta}\right)\right]\mathrm{u}_\theta + \Delta \mathrm{A_z u_z}$$

4) Expressions des différents opérateurs en coordonnées sphériques :

a) Gradient :

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}.\frac{\partial U}{\partial \theta}u_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}.\frac{\partial U}{\partial \varphi}u_\varphi$$

b) Divergence :

$$\mathrm{diva} = \frac{1}{\mathrm{r}^2}.\frac{\partial\left(\mathrm{r}^2.\mathrm{a_r}\right)}{\partial \mathrm{r}} + \frac{1}{\mathrm{r}.\sin\theta}.\frac{\partial\left(\mathrm{a}_\theta.\sin\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\mathrm{r}.\sin\theta}.\frac{\partial \mathrm{a}_\varphi}{\partial \varphi}$$

c) Rotationnel :

$$rota = \begin{vmatrix} \dfrac{u_r}{r^2.\sin\theta} & \dfrac{u_\theta}{r.\sin\theta} & \dfrac{u_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ a_r & r.a_\theta & r.\sin\theta.a_\varphi \end{vmatrix}$$

d) Laplacien scalaire :

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}.\frac{\partial\left(r^2.\frac{\partial U}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2.\sin\theta}.\frac{\partial\left(\sin\theta.\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2.\sin\theta}.\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

ou bien :

$$\Delta U = \frac{1}{r}.\frac{\partial^2(r.U)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2.\sin\theta}.\frac{\partial\left(\sin\theta.\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2.\sin\theta}.\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

VIII) THEOREME DE HELMHOLTZ ; CHAMPS VECTORIELS A CIRCULATION CONSERVATIVE OU A FLUX CONSERVATIF :

1) Théorème de Helmholtz :

théorème : tout champ vectoriel $C(M)$ fini, à support borné, indéfiniment différentiable peut se mettre sous la forme : $C(M) = rotA(M) - gradU(M)$

avec : $$A(M) = \frac{1}{4\pi}.\iiint_V \frac{rot_{M'}(C(M'))}{MM'}.d\tau(M')$$

$$U(M) = \frac{1}{4\pi}.\iiint_V \frac{div_{M'}(C(M'))}{MM'}.d\tau(M')$$

dans ce cas, A et U sont appelés respectivement potentiel vecteur et potentiel scalaire dont dérive le champ vectoriel $C(M)$

remarque importante : le couple de potentiels vecteur et scalaire dont dérive un champ vectoriel $C(M)$ n'est pas unique !

théorème : la donnée de la divergence et du rotationnel d'un champ vectoriel suffit à caractériser complètement ce champ vectoriel

2) Champs vectoriels à circulation conservative :

définition : un champ vectoriel a est dit à circulation conservative si, et seulement si sa circulation le long de tout contour fermé est nulle (ou encore si sa circulation entre deux points M_1 et M_2 est indépendante du chemin choisi entre M_1 et M_2, et cela quels que soient les points M_1 et M_2)

théorème : un champ vectoriel a est à circulation conservative si, et seulement s'il dérive d'un potentiel scalaire U, c'est-à-dire si, et seulement s'il existe un potentiel scalaire U tel que : $a = -gradU$ U

théorème : un champ vectoriel a est à circulation conservative si, et seulement si : $rota = 0$

2) Champs vectoriels à flux conservatif :

définition : un champ vectoriel a est dit à flux conservatif si, et seulement si son flux sortant de toute surface fermée est nul (ou encore si son flux à travers toutes les surfaces ouvertes s'appuyant sur un même contour fermé est le même, et cela quel que soit le contour fermé)

théorème : un champ vectoriel a est à flux conservatif si, et seulement s'il dérive d'un potentiel vecteur (ou champ vectoriel) d, c'est-à-dire si, et seulement s'il existe un champ vectoriel d tel que : $a = rotd$

théorème : un champ vectoriel a est à flux conservatif si, et seulement si : $diva = 0$