Problème 17 : suites et intégrales

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entrainer à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.

Problème composé de deux exercices indépendants.
Ex 1. on pourra exploiter la représentation graphique de la fonction ln et les encadrements d'aires.
Ex 2. Intégrale d'une somme ou somme d'une intégrale ?

<u>Exercice 1</u>

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$; on pose $v_n = \ln u_n$

1. Montrer que $\Rightarrow \forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x dx \leq \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}$.
2. En déduire que $v_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\, dx \leq v_n - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.
3. Calculer $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\, dx$, en déduire un encadrement de v_n, puis $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

<u>Exercice 2</u>

1. Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1}$.
2. Pour tous p et q entiers naturels non nuls, on pose $I(p,q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q\, dt$.

a. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, I(p+1, q+1) = \frac{q+1}{p+2} I(p+2, q)$.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

3. Pour $t \in [0,1]$, montrer que $0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ et calculer $\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$

(on pose $0^0 = 1$).

4. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}$. Montrer en écrivant S_n sous forme d'une intégrale et en utilisant les questions précédentes que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$.