Problème 16 : intégrales et suites

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entrainer à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.

Ce problème exploite des intégrales définies et généralisées, les méthodes d'intégration par parties et de changement de variable pour déterminer le terme général d'une suite

On considère les fonctions F_k définies par $F_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{ch^k(t)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier l'existence de $F_k(x)$ pour tout réel x.
2. $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on note $I_k = \lim_{x \to +\infty} F_k(x)$. Justifier l'existence de I_k.
3. Calculer I_1 ; on peut utiliser le changement de variable $u = sh\,t$.
4. Calculer pour $y \in \mathbb{R}$, par une intégration par parties, $J(y) = \int_0^y \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$. En déduire la valeur de $K(y) = \int_0^y \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.
5. A l'aide du changement de variable précédent, exprimer $F_3(x)$ avec la fonction K.
6. On pose $w_p = I_{2p-1}$

a. Exprimer l'intégrale par le changement de variable précédent.

b. Vérifier que $\frac{1}{(1+u^2)^{p+1}} = \frac{1}{(1+u^2)^p} - \frac{u^2}{(1+u^2)^{p+1}}$ et démontrer la relation de récurrence $w_{p+1} = \frac{2p-1}{2p} w_p$.

c. En déduire l'expression de w_{p+1} à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et du nombre π.