Problème 15 : suites et intégrales

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entrainer à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.

Ce problème utilise le calcul d'intégrales classiques pour montrer la convergence d'une suite et le calcul de sa limite

On étudie dans cet exercice la suite (S_n) définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

.

A cet effet, on introduit pour tout $k \in \mathbb{N}$, les deux intégrales suivantes :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\,dt \text{ et } J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\,dt.$$

1. En étudiant la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = \frac{\pi}{2}\sin t - t$, montrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, : $0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}\left(I_k - I_{k+1}\right)$

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, : $I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k$.

4. Déduire des résultats précédents que $\lim_{k \to +\infty} \frac{J_k}{I_k} = 0$.

5. Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}^*$,, I_k en fonction de J_k et J_{k-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_k.

6. En déduire, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la relation : $\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$.

7. Calculer I_0 et J_0, puis montrer que la suite (S_n) converge et déterminer sa limite.