Problème 14 : intégrales

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entrainer à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.

Les trois premières questions sont largement indépendantes et seront utilisées pour le calcul de l'intégrale généralisée introduite au début.

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente à l'aide d'une intégration par parties puis en déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les suites $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, , I_n et J_n sont bien définies.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, , $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$.
   c) En déduire que $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \frac{\pi}{2}$.

3. Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(0) = 0$ et $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$.
   a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,, $I_n = J_n + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n+1)t\, dt$.
   c) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n+1)t\, dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On effectuera pour cela une intégration par parties de cette intégrale.
   d) En déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

4. A l'aide d'un changement de variable sur I_n, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.