Problème 13 : fonctions définies par une intégrale et calcul d'une intégrale double

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entraîner à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.

Etude de fonctions définies par une intégrale, recherche de solutions d'équations différentielles et utilisation des résultats pour calculer une intégrale double

f désigne une fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions φ et ψ définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$

et $\psi(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer les deux premières dérivées de ces deux fonctions.

2. Montrer que si f vérifie l'équation : **(1)** $f(x) - \int_0^x f(t) dt = \sin x$, elle vérifie également l'équation : **(2)** $f'(x) - f(x) = \cos x$. Déterminer alors l'unique solution de **(2)** qui vérifie **(1)**.

3. Montrer que si f vérifie l'équation : **(3)** $f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt = \sin x$, elle vérifie également l'équation : **(4)** $f''(x) - f(x) = -\sin x$. Déterminer alors l'unique solution de **(4)** qui vérifie **(3)**.

4. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé on considère le domaine D caractérisé par $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq x$. Déterminer l'intégrale double

$$I = \iint_D (x-y) \frac{\sin y + \sin x}{2} dx dy$$