Corrigé problème 17

Exercice 1

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$v_n = \ln u_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k}{n}$$

1. $\forall k\in\{1,2,...,n\}, \frac{k}{n} \le x \le \frac{k+1}{n} \Rightarrow \forall k\in\{1,2,...,n\}, \ln\frac{k}{n} \le \ln x \le \ln\frac{k+1}{n}$

$$\Rightarrow \forall k\in\{1,2,...,n\}, \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln\frac{k}{n}\,dx \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x dx \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln\frac{k+1}{n}\,dx$$

$$\Rightarrow \forall k\in\{1,2,...,n\}, \frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x dx \le \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}.$$

2. On en déduit que $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \le \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x dx \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}$

soit $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k}{n} \le \int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x dx \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\frac{k+1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{n}$

donc $\boxed{v_n \le \int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,dx \le v_n - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}}$

3. $\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,dx = \left[x\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1}dx = -\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n}$

donc $-1 - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \le v_n - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \Rightarrow -1 + \frac{1}{n} \le v_n$

et $\boxed{-1 + \frac{1}{n} \le v_n \le -1 - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = \lim\limits_{X\to 0} X\ln X = 0$ (croissances comparées)

on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-1-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{n}\right) = -1$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -1}$ (théorème d'encadrement des limites)

et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^{-1}}$ (continuité de la fonction exponentielle)

Exercice 2

1. $J = \int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1} = \int_0^1 \frac{2dt}{4t^2-4t+2} = \int_0^1 \frac{2dt}{(2t-1)^2+1} = \left[\arctan(2t-1)\right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan(-1)$

soit $\boxed{J = \int_0^1 \frac{dt}{2t^2-2t+1} = \frac{\pi}{2}}$.

2. a. $I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$ donc $I(p+1,q+1) = \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q+1}\,dt$.

On pose $u(t) = (1-t)^{q+1}$ donc $u'(t) = -(q+1)(1-t)^q$

$v'(t) = t^{p+1}$ avec $v(t) = \frac{t^{p+2}}{p+2}$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc en intégrant par parties on a :

$$\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q+1}\,dt = \left[\frac{t^{p+2}}{p+2}(1-t)^{q+1}\right]_0^1 + \frac{q+1}{p+2}\int_0^1 t^{p+2}(1-t)^q\,dt = \frac{q+1}{p+2}\int_0^1 t^{p+2}(1-t)^q\,dt$$

Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, I(p+1,q+1) = \frac{q+1}{p+2} I(p+2,q)$.

b. On obtient donc

$I(n,n) = \frac{n}{n+1} I(n+1,n-1)$

$I(n+1,n-1) = \frac{n-1}{n+2} I(n+2,n-2)$

$I(n+2,n-2) = \frac{n-2}{n+3} I(n+3,n-3)$

$\vdots$

$I(2n-1,1) = \frac{1}{2n} I(2n,0)$

soit $I(n,n)=\frac{n}{n+1}\times\frac{n-1}{n+2}\times\frac{n-2}{n+3}\times\ldots\times\frac{1}{2n}I(2n,0)=\frac{(n!)^2}{(2n)!}I(2n,0)$

$I(2n,0)=\int_0^1 t^{2n}dt=\frac{1}{2n+1}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, I(n,n)=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

c. L'étude de la fonction $t\mapsto t(1-t)$ sur $[0,1]$ et le tableau de variation montrent que $\forall t\in[0,1],\ 0\le t(1-t)\le\frac{1}{4}$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}2^k t^k(1-t)^k=\sum_{k=0}^{n}\left(2t(1-t)\right)^k=\frac{1-\left(2t(1-t)\right)^{n+1}}{1-2t(1-t)}=\frac{1-\left(2t(1-t)\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}}$$ car $2t(1-t)\neq 1$

4. $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k(k!)^2}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{n}2^kI(k,k)=\sum_{k=0}^{n}2^k\int_0^1 t^k(1-t)^k\,dt=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}2^kt^k(1-t)^k dt$(on peut sans problème poser $I(0,0)=1$)

donc $S_n=\int_0^1\frac{1-\left(2t(1-t)\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}dt=\int_0^1\frac{1}{2t^2-2t+1}dt-\int_0^1\frac{\left(2t(1-t)\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}dt$

on a vu que $\int_0^1\frac{dt}{2t^2-2t+1}=\frac{\pi}{2}$

on va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\left(2t(1-t)\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}dt=0$

$\forall t\in[0,1],\ 0\le t(1-t)\le\frac{1}{4}\Rightarrow 0\le\left(2t(1-t)\right)^{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}$.

$2t^2-2t+1=\frac{1}{2}\left(4t^2-4t+2\right)=\frac{(2t-1)^2}{2}+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$

donc $0\le\frac{\left(2t(1-t)\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}\le\frac{1}{2^{n+2}}$ et $0\le\int_0^1\frac{\left(2t(1-t)\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}dt\le\frac{1}{2^{n+2}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\left(2t(1-t)\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}dt=0$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi}{2}}$