

Corrigé problème 15

1. Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = \frac{\pi}{2} \sin t - t$.

f est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f'(t) = \frac{\pi}{2} \cos t - 1$ et $f''(t) = -\frac{\pi}{2} \sin t$

$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, f''(t) < 0$ donc f' est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

de plus f' est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$ donc il existe un unique réel $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Et on déduit que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(t) \geq 0$

Donc $\boxed{\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], t \leq \frac{\pi}{2} \sin t}$.

$$2. I_k - I_{k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) (1 - \cos^2(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) \sin^2(t) dt$$

$$\text{donc } \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+1}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) \left(\frac{\pi^2}{4} \sin^2(t) \right) dt.$$

$$\text{Or } \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{\pi}{2} \sin t \geq t \geq 0 \Rightarrow \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t \geq t^2$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^{2k} t \geq 0, \text{ donc } \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^{2k}(t) \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t \geq t^2 \cos^{2k}(t)$$

$$\text{et } \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+1}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) \left(\frac{\pi^2}{4} \sin^2(t) \right) dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t) dt = J_k$$

$$\text{D'autre part } \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], t^2 \cos^{2k} t \geq 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k} t dt \geq 0.$$

$$\text{D'où finalement : } \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+1})$$

$$3. I_{k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2}(t) dt$$

on pose :

$$u(t) = \cos^{2k+1}(t) \text{ donc } u'(t) = -(2k+1)\sin(t)\cos^{2k}(t)$$

$$v'(t) = \cos(t) \text{ avec } v(t) = \sin(t)$$

u et v sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc on peut intégrer u par parties :

$$I_{k+1} = \left[\sin(t)\cos^{2k+1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{2k}(t) dt = (2k+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t))\cos^{2k}(t) dt$$

$$\text{soit } I_{k+1} = (2k+1)(I_k - I_{k+1}) \Leftrightarrow (1+2k+1)I_{k+1} = (2k+1)I_k$$

$$\text{et } \forall k \in \mathbb{N}, I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k$$

$$4. I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2} > 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k \text{ donc par une récurrence immédiate on}$$

montre que $\forall k \in \mathbb{N}, I_k > 0$, donc

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq I_k \leq \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k-1}) &\Rightarrow 0 \leq \frac{I_k}{I_k} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{I_{k-1}}{I_k}\right) \Rightarrow 0 \leq \frac{I_k}{I_k} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{2k+1}{2k+2}\right) \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{I_k}{I_k} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{2k+2}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k+2} = 0 \text{ donc } \boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{I_k}{I_k} = 0}$$

$$5. I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) dt$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u(t) = \cos^{2k}(t) \text{ donc } u'(t) = -2k \sin(t)\cos^{2k-1}(t)$$

$$v'(t) = 1 \text{ avec } v(t) = t$$

u et v sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc on peut intégrer par parties :

$$I_k = \left[t \cos^{2k}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + k \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \sin(t) \cos^{2k-1}(t) dt = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \sin(t) \cos^{2k-1}(t) dt$$

on pose :

$$u(t) = \sin(t)\cos^{2k-1}(t) \text{ donc } u'(t) = \cos(t)\cos^{2k-1}(t) - (2k-1)\sin^2(t)\cos^{2k-2}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^{2k}(t) - (2k-1)(1 - \cos^2(t))\cos^{2k-2}(t) \\
&= 2k \cos^{2k}(t) - (2k-1)\cos^{2k-2}(t)
\end{aligned}$$

$$v'(t) = 2t \text{ avec } v(t) = t^2$$

u et v sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc on peut intégrer par parties :

$$I_k = k \left(\left[t^2 \sin(t) \cos^{2k-1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2k \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t) dt + (2k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k-2}(t) dt \right).$$

$$\text{Finalement pour } k \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{I_k = k(2k-1)J_{k-1} - 2k^2 J_k}$$

$$6. \forall k \in \mathbb{N}, J_k > 0 \text{ donc } \frac{k(2k-1)J_{k-1}}{I_k} - \frac{2k^2 J_k}{I_k} = 1$$

$$\text{or, d'après la question 3, } \forall k \in \mathbb{N}^*, I_k = \frac{2k-1}{2k} I_{k-1} \Leftrightarrow \frac{2k-1}{I_k} = \frac{2k}{I_{k-1}}$$

$$\text{on obtient alors : } \frac{2k^2 J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{2k^2 J_k}{I_k} = 1 \text{ soit pour } k \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}}$$

$$7. J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24} \quad I_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} \right) = 2 \left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n} \right)$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J_n}{I_n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 \frac{J_0}{I_0} = 2 \times \frac{\pi^3}{24} \times \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\text{soit } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$