Corrigé problème 14

1. La fonction $t \longrightarrow \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\left]0,+\infty\right[$ et au voisinage de 0, $\frac{\sin t}{t} \sim 1$ donc cette fonction est continue sur $\left[0,+\infty\right[$.

On va donc regarder si $\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,dt$ admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$.

On pose $u(t) = \frac{1}{t}$ donc $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$

$v'(t) = \sin t$ avec $v(t) = -\cos t$

u et v sont de classe C^1 sur $\left[0, A\right]$ donc par intégration par parties on a :

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt = -\frac{\cos A}{A} + \cos 1 - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$ car $\forall A, \left|\cos A\right| \le 1$

$\forall t \in \left[1, A\right], \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \le \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge donc $\int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$.

On en conclut que $\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,dt$ admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente donc par la relation de Chasles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $t \to \frac{\sin(2n+1)t}{t}$ et $t \to \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ sont continues sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et au voisinage de 0, $\sin t \sim t$ donc $\frac{\sin(2n+1)t}{t} \sim 2n+1$ et $\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \sim 2n+1$. Les fonctions $t \to \frac{\sin(2n+1)t}{t}$ et $t \to \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ sont prolongeables par continuité en 0

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}\, I_n$ et J_n sont bien définies

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) = \sum_{k=1}^{n} Ré\, e^{i2kt} = Ré \sum_{k=1}^{n} e^{i2kt}$

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i2kt} = e^{2it} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2it}\right)^k = e^{2it} \frac{1-e^{2nit}}{1-e^{2it}} = e^{2it} \frac{e^{nit}\left(e^{-nit} - e^{nit}\right)}{e^{it}\left(e^{-it} - e^{it}\right)} = e^{(n+1)it} \frac{-2i \sin nt}{-2i \sin t} = e^{(n+1)it} \frac{\sin nt}{\sin t}$$

donc $Ré \sum_{k=1}^{n} e^{i2kt} = \frac{[\cos(n+1)t]\sin nt}{\sin t}$.

Or $\cos a . \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$, d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) = \frac{1}{2} \frac{\sin(2n+1)t - \sin t}{\sin t}$ et finalement

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$

c) Pour $t = 0$, on a $1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) = 2n+1$ et $\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t} \sim 2n+1$ au voisinage de 0,

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)\right) dt = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt)\, dt$

$= \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\sin(2kt)}{2k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

Comme $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}}\ \boxed{J_n = \frac{\pi}{2}}$

3. $f(0) = 0$ et $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$.

a) f est de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ (somme et quotient de fonctions de classe C^1 ne s'annulant pas sur cet intervalle)

Montrons que f est continue en 0. Il faut calculer la limite de $\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}=\frac{\sin t-t}{t\sin t}$ quand t tend vers 0.

Au voisinage de 0 :

$\frac{\sin t-t}{t\sin t}\sim\frac{\sin t-t}{t^2}$

$\sin t=t-\frac{t^3}{6}+o\left(t^3\right)$ donc $\sin t-t=\frac{-t^3}{6}+o(t^3)\sim\frac{-t^3}{6}$ et $\frac{\sin t-t}{t^2}\sim\frac{-t}{6}$

donc $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}=0$ donc f est continue en 0 et f est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$\forall t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right], \quad f'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{\cos t}{\sin^2 t}=\frac{-\sin^2 t+t^2\cos t}{t^2\sin^2 t}$

Au voisinage de 0 :

$\frac{-\sin^2 t+t^2\cos t}{t^2\sin^2 t}\sim\frac{-\sin^2 t+t^2\cos t}{t^4}$

$\sin t=t-\frac{t^3}{6}+o\left(t^4\right)$ *donc* $\sin^2 t=t^2-\frac{t^4}{3}+o\left(t^4\right)$

$\cos t=1-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)$ donc $t^2\cos t=t^2-\frac{t^4}{2}+o\left(t^4\right)$

donc $-\sin^2 t+t^2\cos t=\frac{t^4}{3}-\frac{t^4}{2}+o(t^4)=-\frac{t^4}{6}+o(t^4)\sim-\frac{t^4}{6}$

D'où $f'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{\cos t}{\sin^2 t}\sim-\frac{1}{6}$ au voisinage de 0, donc $\lim_{t\to 0}f'(t)=-\frac{1}{6}$

f étant continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, de classe C^1 sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ avec $\lim_{t\to 0}f'(t)=-\frac{1}{6}$, on peut en conclure que f est de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. avec $f'(0)=-\frac{1}{6}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n+1)t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}\right)\sin(2n+1)t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\sin(2n+1)t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\sin(2n+1)t\,dt$$

$= I_n - J_n$ car chacune de ces intégrales converge .

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}}$ $\boxed{, I_n = J_n + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n+1)t\,dt}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n+1)t\,dt$

f et sin étant de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on peut intégrer par parties et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n+1)t\,dt = \left[-f(t)\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos(2n+1)t\,dt.$$

Le terme entre crochet est nul car $f(0)=0$,

on a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n+1)t\,dt = \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos(2n+1)t\,dt$ et

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n+1)t\,dt\right| =$$

$$\frac{1}{2n+1}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos(2n+1)t\,dt\right| \le \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|f'(t)\cos(2n+1)t\right|dt \le \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|f'(t)\right|dt$$

f étant de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, f' est continue donc bornée sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)|\,dt$ est un réel *M.*

on a donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n+1)t\,dt \le \frac{M}{2n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

et donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n+1)t\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = J_n + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2n+1)t\,dt$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}}$

4. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$

En effectuant le changement de variable $u = (2n+1)t \quad du = (2n+1)dt$ on obtient :

$I_n = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin u}{u}\,du$ et par passage à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et finalement

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}}$$