Corrigé problème 13

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc continue sur $\mathbb{R}$), donc φ qui est la primitive de f qui s'annule en 0, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = f(x)$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) = f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \int_0^x (x-t) f(t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt = x\varphi(x) - \int_0^x tf(t)\,dt$.

Comme plus haut, ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = \varphi(x) + x\varphi'(x) - xf(x) = \varphi(x) + xf(x) - xf(x)$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = \varphi(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \psi''(x) = \varphi'(x) = f(x)$

2. $f(x) - \int_0^x f(t)dt = \sin x \Leftrightarrow f(x) - \varphi(x) = \sin x$

En dérivant les deux membres, on obtient : $f'(x) - \varphi'(x) = \cos x$ soit $\underline{f'(x) - f(x) = \cos x}$
f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' - y = \cos x$; de plus f vérifie **(1)**, donc
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \int_0^x f(t)dt = \sin x$, donc $\underline{f(0) = 0}$

Résolution de : $y' - y = 0$.
C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre, donc une solution générale est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ke^x, K \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière de : $y' - y = \cos x$ sous la forme
$y(x) = A\cos x + B\sin x$, soit $y'(x) = -A\sin x + B\cos x, (A, B) \in \mathbb{R}^2$

y est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -A\sin x + B\cos x - A\cos x - B\sin x = \cos x$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (B - A)\cos x - (A + B)\sin x = \cos x$
$\Leftrightarrow \begin{cases} B - A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}$ car $(\cos, \sin)$ est une famille libre

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ke^x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x, K \in \mathbb{R}$.

Or $y(0) = 0 \Leftrightarrow K - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}$

Finalement l'unique solution de **(2)** qui vérifie **(1)** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(e^x - \cos x + \sin x)$

3. $f(x) - \int_0^x (x-t) f(t) dt = \sin x \Leftrightarrow f(x) - \psi(x) = \sin x$

En dérivant deux fois les deux membres, on obtient : $f'(x) - \psi'(x) = \cos x$, puis

$f''(x) - \psi''(x) = -\sin x$ soit $\underline{f''(x) - f(x) = -\sin x}$

f est solution de l'équation différentielle (F) : $y'' - y = -\sin x$; de plus f vérifie **(3)**, donc

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t) f(t) dt = \sin x$, donc $\underline{f(0) = 0}$

f vérifie aussi $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \psi'(x) = \cos x$, donc $f'(0) - \psi'(0) = 1$ soit $\underline{f'(0) = 1}$.

Résolution de : $y'' - y = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire du 2ème ordre. L'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ admet 2 racines distinctes 1 et -1, donc une solution générale est donnée par :

$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Recherche d'une solution particulière de : $y'' - y = -\sin x$ sous la forme

$y(x) = A\cos x + B\sin x, (A, B) \in \mathbb{R}^2$

soit $y'(x) = -A\sin x + B\cos x$ et $y''(x) = -A\cos x - B\sin x$

y est solution de (F) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -2A\cos x - 2B\sin x = -\sin x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2A = 0 \\ 2B = 1 \end{cases}$ car $(\cos, \sin)$ est une famille libre

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$

Les solutions de (F) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$y(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \lambda e^x - \mu e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x$ d'où $y'(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda - \mu + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \lambda - \mu = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases}\lambda+\mu=0\\ \lambda-\mu=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{4}\\ \mu=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Finalement l'unique solution de **(4)** qui vérifie **(3)** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{4}e^{x}-\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}\sin x=\frac{\operatorname{sh} x+\sin x}{2}$$

4. $I=\iint_D (x-y)\dfrac{sh\ y+\sin y}{2}dxdy$

$$\begin{aligned}
&=\int_0^1\left(\int_0^x (x-y)\frac{sh\ y+\sin y}{2}dy\right)dx\\
&=\int_0^1\left(\int_0^x (x-y)f(y)dy\right)dx\\
&=\int_0^1\left(f(x)-\sin x\right)dx \text{ d'après 3.}\\
&=\int_0^1\left(\frac{sh\,x+\sin x}{2}-\sin x\right)dx\\
&=\int_0^1\frac{sh\,x-\sin x}{2}dx=\left[\frac{ch\,x+\cos x}{2}\right]_0^1=\frac{ch1+\cos 1}{2}-1
\end{aligned}$$

$$\boxed{I=\iint_D (x-y)\frac{sh\ y+\sin y}{2}dxdy=\frac{ch1+\cos 1}{2}-1}$$