

Problème 8 : endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entraîner à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.

Ce problème utilise les propriétés des produits scalaire et vectoriel afin de déterminer tous les endomorphismes vérifiant une propriété donnée.

Soit un espace vectoriel euclidien E de dimension 3, muni de la base orthonormée directe $B = (e_1, e_2, e_3)$.

On note $u \cdot v$ et $u \wedge v$ le produit scalaire et le produit vectoriel des vecteurs u et v .

On se propose de déterminer l'ensemble H de tous les endomorphismes f de E vérifiant : $\forall u \in E, u \cdot f(u) = 0$.

On note M la matrice de f dans la base B et $m_{i,j}$ le terme général de M .

1. Pour $1 \leq k \leq 3$ calculer $e_k \cdot f(e_k)$. En déduire que la matrice M de f dans la base B a tous les termes de sa diagonale qui sont nuls.
2. Calculer le produit scalaire $(e_1 + e_2) \cdot f(e_1 + e_2)$, et en déduire que ${}^tM = -M$ (on dit que M est antisymétrique).
3. Si $w \in E$ est fixé, montrer que l'application $f: E \rightarrow E, u \mapsto w \wedge u$ est dans H . Préciser la matrice de f dans la base B en fonction des composantes (p, q, r) du vecteur $w \in E$.
4. Montrer réciproquement que si $f \in H$ alors il existe un vecteur $w \in E$, à déterminer en fonction des coefficients de la matrice M de f tel que $f: u \mapsto w \wedge u$.
5. Soit l'endomorphisme g de E ayant dans la base B pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}. \text{ Montrer que } g \in H, \text{ en précisant le vecteur } w \in E \text{ associé.}$$

Préciser la norme de ce vecteur.

6. Déterminer l'unique valeur propre réelle de la matrice A et une base du sous-espace propre associé.