

Problème 7 : géométrie euclidienne

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entraîner à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.

La première partie demande le calcul de valeurs et vecteurs propres d'une matrice à coefficients complexes en utilisant les calculs effectués sur une matrice plus simple.

La seconde partie reprend les mêmes matrices mais à coefficients réels à déterminer afin de retrouver des applications géométriques classiques : rotations, réflexions, projections.

Notations : $M_3(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 sur le corps $\mathbb{C}$. a, b, c sont des nombres complexes. On note I, J et $M(a, b, c)$ les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Partie 1

1. Calculer J^2 et J^3 .
2. Déterminer les valeurs propres de J . La matrice J est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$? L'est-elle sur le corps $\mathbb{C}$?
3. Pour chaque valeur propre de J déterminer le vecteur propre associé ayant 1 pour première composante, et une matrice P de passage à une base de vecteurs propres.
4. Exprimer la matrice $M(a, b, c)$ à l'aide des matrices I, J et J^2 . En déduire que $H = \{M(a, b, c), (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}$ est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{C})$. Préciser la dimension de H .
5. Montrer que les vecteurs propres de J sont aussi vecteurs propres de J^2 ainsi que de $M(a, b, c)$. En déduire les valeurs propres de $M(a, b, c)$.
6. On suppose dans cette question que les coefficients (a, b, c) sont réels.
 - a. Montrer que les valeurs propres de $M(a, b, c)$ sont réelles si et seulement si $b = c$.
 - b. Déterminer les valeurs propres de $M(a, b, b)$ ainsi que les sous espaces propres associés pour $b \neq 0$.

Partie 2

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, de base orthonormée $B = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. On note id l'endomorphisme identité de E . Dans cette partie on s'intéresse à une étude géométrique des endomorphismes $f_{a,b,c}$ différents de id dont la matrice dans la base $B = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est $M(a,b,c)$ en supposant que les coefficients (a,b,c) sont réels. Il est recommandé d'utiliser les résultats de la première partie.

1. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et -1. Précisez les sous espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans ces deux cas.
2. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et 0. Précisez les sous espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans ces deux cas.
3. Montrer que J et J^2 sont des matrices de rotations de E , préciser le cos de leur angle de rotation.
4. Déterminer les conditions sur a,b,c pour que $f_{a,b,c}$ soit une rotation. Préciser l'axe de la rotation ainsi que le cosinus de son angle en fonction de a,b,c .