Problème 6 : Codiagonalisation

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entrainer à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.

Ce problème consiste à faire un choix judicieux de vecteurs propres afin que les deux endomorphismes soient diagonalisables dans une même base.

Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ respectivement représentés dans la base canonique B de $\mathbb{R}^3$ par les matrices A et C suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 8 \\ -12 & -4 & -9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Former les polynômes caractéristiques de f et de g. En déduire les valeurs propres de f et de g.

2. Déterminer, par leurs équations, les sous-espaces propres de f et de g.

3. Construire une base B' de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont à la fois vecteurs propres de f et vecteurs propres de g ; la première composante non nulle de chacun de ces vecteurs sera obligatoirement prise égale à 1.

4. Donner la matrice de passage de la base B à la base B', ainsi que les matrices A' et C' qui représentent respectivement f et g dans base B'.