

Problème 5 : espace vectoriel matrices

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entraîner à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.

L'objectif de ce problème est d'étudier des espaces vectoriels de matrices, d'en définir des bases. Il se termine par l'étude d'une forme linéaire.

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble des matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$;

1. a) Montrer que E est un espace vectoriel.
b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E

- a) Montrer que : $k = g = c = a$, $h = b$, $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E .
- b) Retrouver le fait que les matrices de E ne sont pas inversibles.
- c) Déterminer une base de E et vérifier que $\dim E = 4$.
- d)

3. On considère l'ensemble F des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ où x, y, z sont des

réels.

- a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F .
- b) Dans cette question, on appelle B la matrice de F telle que : $x = 3, y = 2, z = 4$.
 - i) Déterminer les valeurs propres de B et les vecteurs propres associés.
 - ii) La matrice B est-elle diagonalisable ?
 - iii) Calculer B^n

4. On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A de F associe le nombre $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{i,j}$ où $a_{i,j}$ désigne l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

a) Montrer que φ est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer $\text{Im } \varphi$. En déduire que $\text{Ker } \varphi$ est de dimension 2.

c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $\text{Ker } \varphi$. Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de x, y, z et en déduire une base de $\text{Ker } \varphi$.