Problème 4 : matrices et endomorphismes, applications

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entrainer à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.
La première partie commence par un calcul classique de valeurs et vecteurs propres d'une matrice. Ces résultats seront utilisés dans la suite pour des matrices dépendant de deux paramètres pour ces mêmes recherches mais sans calcul du polynôme caractéristique.
La seconde partie utilise la notion d'endomorphisme bijectif d'un espace vectoriel pour trouver une primitive d'une fonction qui sera utile pour un calcul d'intégrale.

Partie 1.

On considère l'ensemble des matrices à coefficients complexes $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note I et J les matrices : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^2.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres (à coefficients complexes) de la matrice J.

On considère l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. de la forme $M = aI + bJ$ où a et b sont des nombres complexes.

3. Calculer M^2 et M^3.
   a. Montrer que si X est un vecteur propre pour la matrice J, alors X est aussi vecteur propre pour toute matrice M de E.
   b. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres (que l'on exprimera en fonction de a et de b) d'une matrice M de E.
   c. Les matrices de E sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
4. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Partie 2.

Soit α et β deux réels non nuls. On note f_1 et f_2 les fonctions numériques réelles définies par : $f_1(x) = \cos(\beta x)e^{\alpha x}$ et $f_2(x) = \sin(\beta x)e^{\alpha x}$.

F désigne l'ensemble des fonctions : $F = \{f, f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Montrer que $B = (f_1, f_2)$ est une base de F.
3. Donner la dimension de F.

On considère l'application φ, définie sur F, qui à f associe f', fonction dérivée de f.

4. Montrer que φ est un endomorphisme de F.
5. Donner la matrice M de φ dans la base B.
6. φ est-elle une application bijective de F vers F ? Si oui, donner M^{-1}.
7. Donner un triplet (r,s,t) de $\mathbb{R}^3$ tel que $rM^2 + sM + tI = 0$ où 0 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *On peut remarquer que* $M - \alpha I = \beta J$ *et utiliser le résultat de* I.1.
8. Montrer que toutes les fonctions de F vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre que vous donnerez.
9. Donner dans F l'unique primitive de la fonction $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.
10. En utilisant ce qui précède , calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos(3x)e^{4x} - 3\sin(3x)e^{4x}\right)dx$$