Problème 3: matrice et suites

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entrainer à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.
Ce problème consiste à déterminer deux suites données par des formules de récurrence puis à les utiliser pour calculer une puissance de matrices. La dernière question, indépendante des précédentes, permet de retrouver le même résultat par la méthode classique de diagonalisation de la matrice.

On donne les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par :
   $u_0 = 0, v_0 = 1, u_{n+1} = -u_n + v_n, v_{n+1} = 2u_n$.
   Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = u_n A + v_n I_3$.
4. a. On pose $x_n = u_n + v_n$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $x_n = 1$.
   b. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $y_n = 2u_n - v_n$.Montrer que la suite (y_n) est géométrique et préciser sa raison, puis exprimer y_n en fonction de n.
   c. En déduire u_n et v_n en fonction de n.
5. Déterminer la matrice A^n ;
   Le résultat est-il encore valable pour $n = -1$?
6. Montrer que la matrice A est diagonalisable et retrouver la matrice A^n par cette méthode.