

Problème 2 : Espaces vectoriels et applications linéaires, matrices

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entraîner à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.

L'exercice 1 est un exercice d'entraînement sur les notions de bases des espaces vectoriels. L'exercice 2 consiste à utiliser la réduction d'une matrice pour calculer une puissance de celle-ci.

Exercice 1

1. On considère l'application $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, t) \mapsto x - y - z + t$. Montrer que f est linéaire et que f est surjective.
2. Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y - z + t = 0\}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Déterminer une base de cet espace vectoriel (justifiez votre choix).
3. Montrer que $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = t \text{ et } y = z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et sa dimension.
4. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
5. Déterminer la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection p sur F parallèlement à G .
6. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A sans calculer le polynôme caractéristique.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 de base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f un endomorphisme de E dont la matrice A dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A . Déterminer les valeurs propres de f , les sous-espaces propres associés ainsi qu'une base de chaque sous espace propre. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ telle que la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}'$ soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer T^2 et T^3 , en déduire T^n pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ce résultat sera ensuite démontré par récurrence.
4. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1} .
5. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.