

Problème 1 : Réduction de matrice

Chaque problème porte sur un thème principal mais aborde néanmoins plusieurs parties du programme. Il convient d'aborder les questions les unes après les autres car le résultat d'une question (même si on n'a pas réussi à la démontrer) est souvent utile pour répondre à une question ultérieure. Il faut toutefois éviter de piocher pour grappiller des points. S'entraîner à chercher aide à progresser dans la résolution des problèmes.

Les deux parties de ce problème sont largement indépendantes. La première porte sur les racines d'un polynôme. Dans la seconde, on reprend la matrice dans un cas particulier : calcul des valeurs propres et des sous-espaces propres en vue de déterminer si la matrice est diagonalisable. Elles se terminent par l'utilisation des propriétés d'une matrice de projection.

Partie A

Soient deux réels p et q . On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_N(x)$ de la matrice N .

On rappelle qu'un polynôme $P(x)$ admet une racine x_0 double s'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ avec $Q(x_0) \neq 0$.

2. Montrer que si x_0 est une racine double de $P(x)$ alors x_0 est aussi une racine du polynôme dérivé $P'(x)$.

On suppose qu'il existe un réel α racine double du polynôme caractéristique $P_N(x)$.

3. Montrer que nécessairement p et q doivent vérifier la relation : (R) : $4p^3 = 27q^2$
4. Déterminer les plus petits entiers positifs qui vérifient (R).

Partie B

Dans cette partie on prend $p = 3$ et $q = 2$. La matrice N est donc ici $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_N(x)$ de cette matrice N .
2. Déterminer les racines λ_1 et λ_2 du polynôme $P_N(x)$, λ_1 étant la racine négative. Préciser leurs multiplicités.
3. Déterminer une base de E_1 , sous-espace propre de N associé à la valeur propre λ_1 .
4. Déterminer une base de E_2 , sous-espace propre de N associé à la valeur propre λ_2 .
5. Quelles sont les dimensions des sous-espaces propres E_1 et E_2 ? La matrice N est-elle diagonalisable ? (on précisera pourquoi)
6. On pose $M = N + I$ où I est la matrice de l'identité
 - a. Calculer $P = \frac{1}{9}M^2$.
 - b. Calculer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres de P .
 - c. Montrer que P est la matrice d'une projection.
 - d. Préciser les sous-espaces image et noyau de la matrice P .