

Corrigé problème 8

On note M la matrice de f dans la base B et m_{ij} le terme général de cette matrice.

1. $\forall k \in \{1, 2, 3\}, f(e_k) = \sum_{i=1}^3 m_{ik} e_i$ donc
 $\forall k \in \{1, 2, 3\}, e_k, f(e_k) = e_k, \sum_{i=1}^3 m_{ik} e_i = \sum_{i=1}^3 m_{ik} e_k, e_i = m_{kk} e_k$ car B est une base orthonormée.

Or $\forall k \in \{1, 2, 3\}, e_k, f(e_k) = 0$ par hypothèse sur f donc **tous les termes de la diagonale de M sont nuls.**

2. $(e_i + e_j), f(e_i + e_j) = 0$, et d'autre part,

$$\begin{aligned} (e_i + e_j), f(e_i + e_j) &= (e_i), f(e_i) + (e_j), f(e_i) + (e_i), f(e_j) + (e_j), f(e_j) \\ &= (e_i), f(e_i) + (e_i), f(e_j) = e_i, \sum_{k=1}^3 m_{ki} e_k + e_j, \sum_{k=1}^3 m_{kj} e_k = m_{ji} + m_{ij} \end{aligned}$$

donc $m_{ji} = -m_{ij}$

d'après les résultats des questions 1 et 2, M est une matrice antisymétrique.

3. Soit $w \in E$ fixé.

$$\forall u \in E, f(u) = w \wedge u$$

f est linéaire car le produit vectoriel est linéaire par rapport à la 2^{ème} variable.

Si $\forall u \in E, f(u) = w \wedge u$, alors $u, f(u) = u, (w \wedge u) = [u, w, u] = 0$

car le produit mixte $[u, w, u]$ est égal au déterminant de $\begin{pmatrix} u & w & u \end{pmatrix}$ qui est nul en raison de l'égalité de deux vecteurs. Il en résulte que $f \in H$

$$\text{Si } w = p e_1 + q e_2 + r e_3, \text{ alors } \begin{cases} w \wedge e_1 = r e_2 - q e_3 \\ w \wedge e_2 = -r e_1 + p e_3 \\ w \wedge e_3 = q e_1 - p e_2 \end{cases}$$

$$\text{la matrice de } f \text{ dans la base } B \text{ est alors } \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

4. Réciproquement soit $f \in H$. Sa matrice M dans la base B est alors une matrice

$$\text{antisymétrique d'après la questions 2, donc de la forme } \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Si (x, y, z) sont les composantes du vecteur $\mathbf{u}$, alors celle du vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ sont obtenues par

le produit matriciel
$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay + bz \\ -ax + cz \\ -bx - cy \end{pmatrix}$$

Dans ces composantes on reconnaît les 3 déterminants : $\begin{vmatrix} b & y \\ -a & z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a & z \\ -c & x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -c & x \\ b & y \end{vmatrix}$ et on a $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$ où les composantes du vecteur $\mathbf{w}$ sont $(-c, b, -a)$.

5. A est une matrice antisymétrique .

Si (x, y, z) sont les composantes du vecteur $\mathbf{u}$, alors celle du vecteur $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ sont obtenues par

le produit matriciel
$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}z \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y \end{pmatrix}$$
 et on vérifie que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}) = 0$

donc $\mathbf{g} \in H$ et les composantes du vecteur $\mathbf{w}$ associés sont $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

et $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\frac{4+4+1}{9}} = 1$

6. Déterminons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left(\lambda^2 + \frac{4}{9} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{4}{9} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3}\lambda \right) = -\lambda^3 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 + 1)$$

Ce polynôme n'admet qu'une seule racine réelle 0 (les deux autres racines sont complexes)

$\mathbf{g}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{w} = 0 = 0\mathbf{w}$ donc $\mathbf{w}$ est une base du sous espace propre associé.