

Corrigé problème 7

Partie 1

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J^3 = I.$$

$$2. \chi_J(\lambda) = \det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1.$$

Les valeurs propres de J sont les racines du polynôme $-\lambda^3 + 1$.

$$1 - \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, j, j^2\}.$$

La matrice J est diagonalisable sur le corps $\mathbb{C}$ car elle admet 3 valeurs propres complexes distinctes : $1, j, j^2$.

Elle n'est diagonalisable sur le corps $\mathbb{R}$ car elle n'admet qu'une seule valeur propre réelle.

$$3. \text{ Calcul des vecteurs propres : } U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ \lambda = 1 : JU = U &\Leftrightarrow (J - I)U = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} -y + z &= 0 \\ x - z &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow x = y = z \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } J \text{ pour } \lambda = 1$$

$$\begin{aligned} -jx + y &= 0 \\ \lambda = j : JU = jU &\Leftrightarrow (J - jI)U = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} -jy + z &= 0 \\ x - jz &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} y &= jx \\ z &= jy \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } J \text{ pour } \lambda = j.$$

$$\lambda = j^2 : JU = j^2 U \Leftrightarrow (J - j^2 I)U = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -j^2 x + y = 0 \\ -j^2 y + z = 0 \\ x - j^2 z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = j^2 x \\ z = j^2 y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } J \text{ pour } \lambda = j^2.$$

$$\text{On a donc } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

$$4. M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = aI + bJ + cJ^2.$$

a. $H \neq \emptyset$ car $I \in H$

b. Soient $M(a, b, c) \in H$ et $M(a', b', c') \in H$. Alors

$$M(a, b, c) + M(a', b', c') = aI + bJ + cJ^2 + a'I + b'J + c'J^2 = (a + a')I + (b + b')J + (c + c')J^2$$

$$\text{donc } M(a, b, c) + M(a', b', c') = M(a + a', b + b', c + c') \in H$$

$$\text{c. Soit } k \in \mathbb{C}. kM(a, b, c) = k(aI + bJ + cJ^2) = kaI + kbJ + kcJ^2$$

$$\text{donc } kM(a, b, c) = M(ka, kb, kc) \in H.$$

On a montré que $H = \{M(a, b, c), (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}$ est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{C})$.

I, J et J^2 forment une famille libre de $M_3(\mathbb{C})$. et $M(a, b, c) = aI + bJ + cJ^2$ donc H est engendré par I, J et J^2 et H est de dimension 3.

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } J^2 \text{ pour } \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j^2 \\ 1 \\ j \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } J^2 \text{ pour } \lambda = j^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ 1 \\ j^2 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } J^2 \text{ pour } \lambda = j$$

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = aI + bJ + cJ^2$$

$$\text{or } J = PDP^{-1} \text{ et } J^2 = PD^2P^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } M(a, b, c) = aPIP^{-1} + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} = P(aI + bD + cD^2)P^{-1}$$

$$aI + bD + cD^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & bj & 0 \\ 0 & 0 & bj^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & cj \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+bj+cj^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+bj^2+cj \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $M(a, b, c)$ sont : $a+b+c$, $a+bj+cj^2$, $a+bj^2+cj$

$$6. (\alpha, b, c) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \alpha + b + c \in \mathbb{R}$$

$$\alpha + bj + cj^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha + bj + cj^2 = \overline{\alpha + bj + cj^2} \Leftrightarrow \alpha + bj + cj^2 = \alpha + bj^2 + cj$$

$$\text{car } (\alpha, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

$$\alpha + bj + cj^2 = \alpha + bj^2 + cj \Leftrightarrow bj + cj^2 = bj^2 + cj \Leftrightarrow (b-c)j + (c-b)j^2 = 0 \Leftrightarrow (b-c)(j-j^2) = 0$$

$$\text{or } (j-j^2) \neq 0 \text{ donc } b = c$$

$$\text{de même } \alpha + bj^2 + cj \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = c$$

donc les valeurs propres de $M(a, b, c)$ sont réelles si et seulement si $b = c$.

b. Les valeurs propres de $M(a, b, b)$ sont : $a+2b$ et $a+b(j+j^2) = a-b$ car $1+j+j^2=0$ et cette valeur propre est double.

Le sous espace propre associé à $a + 2b$ est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le sous espace propre associé à $a - b$ est donné par :

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} ax + by + bz = (a-b)x & bx + by + bz = 0 \\ bx + ay + bz = (a-b)y & \Leftrightarrow bx + by + bz = 0 \\ bx + by + az = (a-b)z & bx + by + bz = 0 \end{array}$$

et le sous espace propre associé à $a - b$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Partie 2

1. Les valeurs propres de $M(a, b, b)$ sont : $a + 2b$ et $a - b$.

$f_{a,b,b}$ a pour seules valeurs propres 1 et -1 si et seulement si $\begin{array}{l} a + 2b = 1 \\ a - b = -1 \end{array}$ ou $\begin{array}{l} a + 2b = -1 \\ a - b = 1 \end{array}$

$$\begin{array}{l} a + 2b = 1 \\ a - b = -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{array}$$

D'après la question précédente le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite

engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le sous espace propre associé à la valeur propre -1 est le plan d'équation

$x + y + z = 0$. Ces deux sous espaces sont orthogonaux.

$f_{a,b,b}$ est la rotation d'axe dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle π ou retournement.

$$\begin{array}{l} a + 2b = -1 \\ a - b = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Le sous espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

$f_{a,b,b}$ est la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$.

2. $f_{a,b,b}$ a pour seules valeurs propres 1 et 0 si et seulement si $\begin{matrix} a+2b=1 \\ a-b=0 \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} a+2b=0 \\ a-b=1 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} a+2b=1 \\ a-b=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{3} \end{matrix}$$

Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

$f_{a,b,b}$ est la projection orthogonale sur droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} a+2b=0 \\ a-b=1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a=\frac{2}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{matrix}$$

Le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

$f_{a,b,b}$ est la projection orthogonale sur plan d'équation $x + y + z = 0$.

3.a. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale de déterminant 1 donc c'est une matrice de rotation.

On a vu que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J pour $\lambda = 1$ donc l'axe de la rotation est droite engendrée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$; Déterminons $\vec{w}$, image de $\vec{v}$ par cette rotation :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On sait que $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\vec{v}, \vec{w})$ donc $-1 = 2 \cos(\vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \cos(\vec{v}, \vec{w}) = -\frac{1}{2}$

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale de déterminant 1 donc c'est une matrice de rotation.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur propre de J^2 pour $\lambda = 1$ donc on a le même axe de rotation.

Déterminons $\vec{w'}$, image de $\vec{v}$ par la rotation de matrice J^2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{w'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-1 = 2 \cos(\vec{v}, \vec{w'}) \Leftrightarrow \cos(\vec{v}, \vec{w'}) = -\frac{1}{2}$$

b. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation si et seulement si c'est une matrice orthogonale de déterminant 1

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $ab + bc + ca = 0$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2 - ab - ac + bc + b^2 + c^2 - 2bc)$$

comme $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $ab + bc + ca = 0$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a + b + c$ et finalement

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$f_{a,b,c}$ est une rotation si et seulement si : $ab + bc + ca = 0$

$$a + b + c = 1$$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est encore un vecteur propre pour $\lambda = 1$ donc l'axe de la rotation est encore la droite

engendrée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$; Déterminons $\vec{w}$, image de $\vec{v}$ par cette rotation :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ c-b \\ b-a \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$\|\vec{w}\|^2 = (a-c)^2 + (c-b)^2 + (b-a)^2 = 2 = 2$$

$$\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| = 2a - b - c = 3a - (a + b + c) = 3a - 1$$

On sait que $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\vec{v}, \vec{w})$ donc $3a - 1 = 2 \cos(\vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{3a-1}{2}$