Corrigé problème 6

Exercice 1

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 8 \\ -12 & -4 & -9 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Polynôme caractéristique de f ou de A :

$$\chi_f(\lambda)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 4 \\ 12 & 3-\lambda & 8 \\ -12 & -4 & -9-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 4 \\ 12 & 3-\lambda & 8 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix}=(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 4 \\ 12 & 3-\lambda & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 4 \\ 12 & -5-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-1-\lambda)\left(\lambda^2-1\right)=-(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

Polynôme caractéristique de g ou de C :

$$\chi_g(\lambda)=\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & -3-\lambda & -2 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(-1-\lambda)\left(\lambda^2-1\right)=-(\lambda-1)(\lambda+1)^2.$$

$\boxed{f \text{ et } g \text{ admettent les mêmes valeurs propres : 1 et -1 (double)}}$

2. Sous-espaces propres de f :

$u=(x,y,z)\in E_1 \Leftrightarrow f(u)=u \Leftrightarrow f(u)-u=0$

soit $\begin{cases} 4x+2y+4z=0 \\ 12x+2y+8z=0 \\ -12x-4y-10z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ 6x+y+4z=0 \\ -6x-2y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2z=0 \\ 6x+y+4z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x \\ y=-z \end{cases}$

$E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, z=-2x \text{ et } y=-z\}$

$\dim E_1=1$ et $E_1=Vect(1,2,-2)$

$u=(x,y,z)\in E_{-1} \Leftrightarrow f(u)=-u \Leftrightarrow f(u)+u=0$

soit $\begin{cases} 6x+2y+4z=0 \\ 12x+4y+8z=0 \\ -12x-4y-8z=0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x+y+2z=0$

$E_{-1}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 3x+y+2z=0\}$

$\dim E_{-1}=2$ donc f est diagonalisable.

Sous-espaces propres de g.

$u=(x,y,z)\in F_1 \Leftrightarrow g(u)=u \Leftrightarrow g(u)-u=0$

$$\text{soit}\quad \begin{cases} -2x-2y-2z=0 \\ -4y-2z=0 \\ 4y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2y \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2y \\ x=y \end{cases}$$

$F_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, z=-2y \text{ et } y=x\}$

$\dim F_1=1$ et $F_1=Vect(1,1,-2)$

$u=(x,y,z)\in F_{-1} \Leftrightarrow g(u)=-u \Leftrightarrow g(u)+u=0$

$$\text{soit}\quad \begin{cases} -2y-2z=0 \\ -2y-2z=0 \\ 4y+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow y+z=0$$

$F_{-1}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, y+z=0\}$

$\dim F_{-1}=2$ donc g est diagonalisable.

3. On cherche une base B' de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont à la fois vecteurs propres de f et vecteurs propres de g ; la première composante non nulle de chacun de ces vecteurs doit être égale à 1.

On a déjà $v_1=(1,2,-2)$ qui est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1 et on remarque que $v_1\in F_{-1}$, donc $v_1=(1,2,-2)$ est aussi un vecteur propre de g associé à la valeur propre -1.

On a aussi $v_2=(1,1,-2)$ qui est un vecteur propre de g associé à la valeur propre 1 et on remarque que $v_2\in E_{-1}$, donc $v_2=(1,1,-2)$ est aussi un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1. (3+1-4=0)

Il reste à trouver un vecteur $v_3\in E_{-1}\cap F_{-1}$ soit $v_3=(x,y,z)$ vérifiant : $\begin{cases} 3x+y+2z=0 \\ y+z=0 \\ x=1 \end{cases}$

Ce système admet l'unique solution $(1,3,-3)$

Et $B'=(v_1,v_2,v_3)$

4 . Des calculs précédents on déduit que

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix},\ A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C'=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$