

Corrigé problème 5

1. a) On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

- E n'est pas vide car la matrice nulle 0 appartient à E ; $0K = K0 = 0$

- $\forall M \in E, \forall N \in E, M + N \in E$

en effet : $(M + N)K = MK + NK = KM + KN = K(M + N) = M + N$

- $\forall M \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda M \in E$; en effet : $(\lambda M)K = \lambda MK = \lambda KM = K(\lambda M) = \lambda M$

Donc E est un espace vectoriel.

b) Supposons que E contienne une matrice inversible M , d'inverse M^{-1} .

Alors $MK = M \Rightarrow M^{-1}MK = M^{-1}M \Rightarrow K = I_3$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse sur K . Donc aucune matrice de E n'est inversible.

$$2.a) MK = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix}$$

$$KM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

d'où $MK = KM = M \Rightarrow (c = g = a = k)$ et $(b = h)$ et $(f = d)$.

$$M \text{ est donc une matrice de la forme } M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

b) Cette matrice a deux colonnes égales donc son déterminant est nul et la matrice n'est pas inversible.

c) Une base de E est constituée des matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Car M s'écrit de manière unique sous la forme $M = aE_1 + bE_2 + dE_3 + eE_4$.

Cette base est formée de 4 matrices de E donc E est de dimension 4.

3. Soit F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$

a) On vérifie facilement que $F \subset E$; montrons que F est un sous-espace vectoriel de E .

-La matrice nulle 0 appartient à F .

- F est clairement stable par addition et multiplication par un réel.

Une base de F est constituée des matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Car toute matrice M de F s'écrit de manière unique sous la forme $M = xE_1 + yE_5 + zE_4$.

Cette base est formée de 3 matrices de E donc E est de dimension 3.

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

i) Calcul du polynôme caractéristique :

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 6-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & 4 \\ \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = \lambda(8 - (4-\lambda)(6-\lambda)) = \lambda(-\lambda^2 + 10\lambda - 16) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-8)$$

Les valeurs propres de B sont : 0, 2 et 8

Recherche des vecteurs propres : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\lambda = 0 : BX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \text{ et } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2 : BX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 8 : BX = 8X \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x = z \end{cases} \text{ et } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) B admet 3 valeurs propres distinctes donc B est diagonalisable .

$$\text{En notant } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ on a } D = P^{-1}BP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } D = P^{-1}BP \Leftrightarrow B = PDP^{-1}$$

$$\text{donc } B^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 8^n \\ 0 & -2 \times 2^n & 8^n \\ 0 & 2^n & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } B^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2^n + 2 \times 8^n & -2 \times 2^n + 2 \times 8^n & 2^n + 2 \times 8^n \\ -2 \times 2^n + 2 \times 8^n & 4 \times 2^n + 2 \times 8^n & -2 \times 2^n + 2 \times 8^n \\ 2^n + 2 \times 8^n & -2 \times 2^n + 2 \times 8^n & 2^n + 2 \times 8^n \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ a) } \varphi(A) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{i,j}$$

$$\forall A \in E, \forall B \in E, \varphi(A+B) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} (a_{i,j} + b_{i,j}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{i,j} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} b_{i,j} = \varphi(A) + \varphi(B)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in E, \varphi(\lambda A) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} (\lambda a_{i,j}) = \lambda \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{i,j} = \lambda \varphi(A)$$

Donc φ est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$

b) $\text{Im } \varphi$ est un sev de $\mathbb{R}$ (car $\varphi: F \rightarrow \mathbb{R}$) et $\text{Im } \varphi \neq \{0\}$ donc $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}$

D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } \varphi = \dim F - \dim \text{Im } \varphi = 3 - 1$

Soit $\dim \text{Ker } \varphi = 2$

$$c) M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$$

$$\varphi(M) = x - y + x - y + z - y + x - y + x$$

$$\text{soit } \varphi(M) = 4x - 4y + z$$

$$M \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow 4x - 4y + z = 0$$

On en déduit que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $\text{Ker } \varphi$