Corrigé problème 4

Partie 1.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1. J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

2. valeurs propres :

$$\chi_J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \text{ donc } \boxed{\text{les valeurs propres de } J \text{ sont } i \text{ et } -i.}$$

Vecteurs propres :

$$\underline{\lambda = i}$$

$$JU = iU \Leftrightarrow (J - iI)U = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -iy \text{ donc } \boxed{U = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}} \text{ convient}$$

$$\underline{\lambda = -i}$$

$$JV = -iV \Leftrightarrow (J + iI)V = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ix + y = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = iy \text{ donc } \boxed{V = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}} \text{ convient}$$

3. $M = aI + bJ$

$$M^2 = (aI + bJ)^2 = a^2I + 2abJ + b^2J^2 = (a^2 - b^2)I + 2abJ$$

$$M^3 = (aI + bJ)((a^2 - b^2)I + 2abJ) = a(a^2 - b^2)I + 2a^2bJ + b(a^2 - b^2)J - 2ab^2I$$

$$\text{soit } M^3 = (a^3 - 3ab^2)I + (3a^2b - b^3)J$$

4. Soit X est un vecteur propre pour la matrice J .

$$\text{Alors } JX = \lambda X \Rightarrow MX = (aI + bJ)X = aX + b\lambda X = (a + b\lambda)X$$

Donc X est un vecteur propre pour la matrice M avec $a + \lambda b$ comme valeur propre associée.

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre pour la matrice M pour la valeur propre $a + ib$

$V = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre pour la matrice M pour la valeur propre $a - ib$

et les matrices de E sont diagonalisables : $M = PDP^{-1}$

$$\text{avec } D = \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \text{ et après calcul } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$M^n = PD^nP^{-1} \text{ soit}$$

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a + ib)^n & 0 \\ 0 & (a - ib)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a + ib)^n + (a - ib)^n & i((a + ib)^n - (a - ib)^n) \\ i((a + ib)^n - (a - ib)^n) & (a + ib)^n + (a - ib)^n \end{pmatrix}$$

Partie 2.

$$f_1(x) = \cos(\beta x)e^{\alpha x} \text{ et } f_2(x) = \sin(\beta x)e^{\alpha x}.$$

$$F = \{f, f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. $\boxed{F = \text{Vect}(f_1, f_2)}$ donc F est un espace vectoriel.

2. Montrons que (f_1, f_2) est une famille libre.

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(\beta x) e^{\alpha x} + \lambda_2 \sin(\beta x) e^{\alpha x} = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{\alpha x} \neq 0 \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ et } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 0, \text{ donc } (f_1, f_2) \text{ est une famille libre.}$$

Et $B = (f_1, f_2)$ est une base de F .

On a donc $\boxed{\dim F = 2}$

4. On considère l'application φ , définie sur F , qui à f associe f' , fonction dérivée de f .
 φ est linéaire car la dérivation est linéaire.

Montrons que $\varphi(f) \in F$.

$$f_1(x) = \cos(\beta x)e^{\alpha x} \text{ donc } f_1'(x) = -\beta \sin(\beta x)e^{\alpha x} + \alpha \cos(\beta x)e^{\alpha x} \text{ donc } \varphi(f_1) \in F$$

$$f_2(x) = \sin(\beta x)e^{\alpha x} \text{ donc } f_2'(x) = \beta \cos(\beta x)e^{\alpha x} + \alpha \sin(\beta x)e^{\alpha x} \text{ donc } \varphi(f_2) \in F$$

φ est linéaire et F est un espace vectoriel donc $\varphi(f) \in F \forall f \in F$

$$5. \varphi(f_1) = \alpha f_1 - \beta f_2 \text{ et } \varphi(f_2) = \beta f_1 + \alpha f_2$$

donc la matrice M de φ dans la base B est $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

$$6. \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \text{ car } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels non nuls donc } M \text{ est inversible le calcul}$$

$$\text{donne } \boxed{M^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}$$

$$7. M = \alpha I + \beta J \Rightarrow M - \alpha I = \beta J \Rightarrow (M - \alpha I)^2 = \beta^2 J^2 \Rightarrow M^2 - 2\alpha M + \alpha^2 I + \beta^2 I = 0$$

$$\text{soit } \boxed{M^2 - 2\alpha M + (\alpha^2 + \beta^2)I = 0}$$

$$\text{donc } r = 1, s = -2\alpha, t = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\begin{aligned}
8. \quad M^2 - 2\alpha M + (\alpha^2 + \beta^2)I = 0 &\Leftrightarrow \varphi^2 - 2\alpha\varphi + (\alpha^2 + \beta^2)id = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall f \in F, \varphi^2(f) - 2\alpha\varphi(f) + (\alpha^2 + \beta^2)f = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall f \in F, f'' - 2\alpha f' + (\alpha^2 + \beta^2)f = 0
\end{aligned}$$

donc f est solution de l'équation différentielle $y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0$

autre méthode

$$f_1(x) = \cos(\beta x)e^{\alpha x} \text{ et } f_2(x) = \sin(\beta x)e^{\alpha x}$$

$\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ sont solutions de l'équation caractéristique $r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 + \beta^2 = 0$

donc f_1 et f_2 sont solutions de l'équation différentielle $y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0$ et l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

9. La matrice M de φ dans la base B est inversible donc φ est une bijection de F sur F dont la

réciproque φ^{-1} a pour matrice $M^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ dans la base B .

$\forall f \in F, \varphi(f) = f'$ donc $\forall f \in F, \varphi^{-1}(f) = \phi$ où ϕ est l'unique primitive de f appartenant à F .

Si $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ alors $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base B . La matrice Y de ϕ dans

cette base est donc $Y = M^{-1}(X) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1 - \beta\lambda_2 \\ \beta\lambda_1 + \alpha\lambda_2 \end{pmatrix}$

Soit $\phi = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} ((\alpha\lambda_1 - \beta\lambda_2)f_1 + (\beta\lambda_1 + \alpha\lambda_2)f_2)$

$$10. \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos(3x)e^{4x} - 3\sin(3x)e^{4x}) dx$$

on applique le résultat précédent avec : $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -3, \alpha = 4, \beta = 3$

$$\text{soit } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4f_1(x) - 3f_2(x)) dx = \frac{1}{25} [25f_1(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = [\cos(3x)e^{4x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 \quad (\beta\lambda_1 + \alpha\lambda_2 = 0)$$